Oraux
corrigés et commentés

Concours PC-PC*

Maths

2e édition

- ENS
- X-ESPCI
- Mines
- Centrale
- Mines-Télécom
- CCINP



ellipses

Éric Billault

Maths

Oraux

corrigés et commentés

Concours PC PC*

2e édition

Maths

ENS
X-ESPCI
Mines
Centrale
Mines-Télécom
CCINP (CCP)

Éric Billault
Professeur de chaire supérieure,
Lycée Lapérouse-Kerichen, Brest

ellipses

Collection

Oraux

corrigés et commentés

Retrouvez tous les livres de la collection sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-098978

Dépôt légal : janvier 2025

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2025
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

À Judith

Avant propos

Ce livre regroupe des exercices d'oraux qui ont été posés aux concours des Grandes Écoles (ENS, X-ESPCI, Mines-Ponts, Centrale, Mines-Télécom et CCINP) les années 2022, 2023 et 2024. Ces exercices proviennent essentiellement de deux sources :

- La revue RMS (Revue de Mathématiques Spéciales) dont le numéro de janvier regroupe un grand nombre d'exercices d'oraux.
- Le site BEOS (base d'épreuves d'orales scientifiques de concours aux grandes écoles) dont l'adresse est https ://beos.prepas.org/. Ce site recueille sur la base du volontariat les énoncés des candidats avec leurs éventuelles erreurs de transcription.

Chaque exercice est dénommé dans cet ouvrage « oral » mais l'épreuve orale à proprement parler peut en réalité consister en plusieurs exercices. Par exemple, l'oral de CCINP comporte deux exercices dit majeur et mineur, le premier étant avec préparation, le second sans.
Chaque banque de concours a ses spécificités concernant les modalités de l'oral (avec ou sans préparation, durée de préparation, coefficient...). Il est recommandé de consulter les notices des concours pour s'informer sur la manière dont se déroule l'oral.
À noter : le concours Centrale a un oral spécifique de Mathématiques-Informatique. Très peu de notions en définitive sont à connaître en Python. Il faut bien sûr maîtriser les bases de la programmation : boucle, instruction conditionnelle, écriture d'une fonction. Pour le reste, les instructions plus spécifiques (analyse numérique, tracé de courbes, matrice, polynôme, probabilités) sont compilées dans un document fourni lors de l'oral, document disponible sur le site de Centrale.

Les exercices de cet ouvrage sont triés par thème. Il y a bien sûr un côté arbitraire dans ce classement puisque certains exercices transversaux abordent plusieurs thèmes. La topologie et les espaces vectoriels normés ont été classés dans la chapitre « analyse générale ». À l'intérieur du classement par école, il n'y a pas d'ordre particulier.

Chaque correction est agrémentée de commentaires rappelant un point du cours, détaillant un calcul, prolongeant ou généralisant le résultat démontré, donnant une indication ou une idée pour aborder la question.

La connaissance et la maîtrise du cours sont certainement les deux critères principaux de notation de l'oral. Comme tout oral, le jury attend également certaines qualités d'exposition (clarté du discours, explication de la démarche, gestion du tableau...)
Il ne faut pas oublier que l'oral est aussi un dialogue avec l'examinateur-trice et un travail de résolution « en direct ». Les hésitations, les fausses routes, les calculs qui n'aboutissent pas, le test de différentes hypothèses font partie de l'activité habituelle de tout scientifique. Il n'y a aucune raison pour qu'une épreuve orale en Mathématiques y échappe. Il ne faut donc pas hésiter à raisonner « tout haut » en explicitant sa démarche, en motivant ses choix et être attentif aux directions vers lesquelles le jury souhaite vous orienter.

Bonne préparation.

Liste des notations et des abréviations

- *i.e* est la locution latine *id est* signifiant « c'est-à-dire ».
- Δ dans une égalité, par exemple « $\mathrm{ch}(x) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ », signifie « par définition ».
- := joue le même rôle que l'affectation en Informatique. Ce symbole est utilisé pour définir un objet mathématique ou poser une notation. Par exemple, « on pose $a := 1$ ».
- H.R = Hypothèse de Récurrence.
- $\widetilde{0}$ désigne la fonction nulle.
- $\|f\|_\infty^A$ est égal, par définition, à $\sup_{x\in A} |f(x)|$, A étant une partie de l'ensemble de définition de la fonction f. Lorsque la borne supérieure est atteinte, $\|f\|_\infty^A$ est égal à $\max_{x\in A} |f(x)|$.
- DSE signifie « Développement en Série Entière ».
- i.i.d en probabilité dans l'expression « soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d » signifie que les X_n sont indépendantes (au sens bien sûr de mutuellement indépendantes) et identiquement distribuées c'est-à-dire qu'elles suivent toutes la même loi.
- $\overleftrightarrow{[a,b]}$ désigne le segment $[a,b]$ si $a \leqslant b$ ou $[b,a]$ si $b \leqslant a$.
- La probabilité de l'événement A sachant l'événement B se note $\mathbf{P}_B(A)$ ou $\mathbf{P}(A \mid B)$.
- $X \perp\!\!\!\perp Y$ signifie que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
- Le symbole $\biguplus$ désigne une réunion disjointe c'est-à-dire $A \biguplus B = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$.
- L'évènement contraire de A se note $\overline{A}$ ou A^c.
- La fonction indicatrice de l'ensemble A se note $\mathbf{1}_A$. Par définition, on a

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

- Si A est une matrice, on note $[A]_{i,j}$ son coefficient situé sur la ligne i et la colonne j. Parfois, on utilise la notation plus classique $a_{i,j}$.
- $0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de format (n,p). En particulier, $0_{n,1}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, vecteur qu'on identifie au n-uplet nul $(0,\dots,0)$ de $\mathbf{K}^n$.
- $\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$ désigne la matrice diagonale $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

- Le déterminant d'ordre n de la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ se note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n]}$$

- Si $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ est une fonction de 2 variables, on désigne, pour un y fixé, par $f(\cdot, y)$ la fonction d'une seule variable $x \mapsto f(x, y)$. De même, pour un x fixé, $f(x, \cdot)$ désigne la fonction $y \mapsto f(x, y)$.

Table des matières

I. Algèbre **11**

1. Algèbre générale
ENS 13
X-ESPCI 21
Mines-Ponts 30
Centrale 41
Mines-Télécom 44
CCINP 46

2. Algèbre linéaire sans réduction
ENS 61
X-ESPCI 64
Mines-Ponts 81
Centrale 97
Mines-Télécom 121
CCINP 133

3. Réduction
ENS 149
X-ESPCI 156
Mines-Ponts 160
Centrale 178
Mines-Télécom 197
CCINP 205

4. Espace euclidien
ENS 249
X-ESPCI 255
Mines-Ponts 266
Centrale 287
Mines-Télécom 309
CCINP 322

II. Analyse **347**

5. Analyse générale
ENS . . . 349
X-ESPCI . . . 353
Mines-Ponts . . . 360
Centrale . . . 372
Mines-Télécom . . . 382
CCINP . . . 385

6. Suite et série
ENS . . . 399
X-ESPCI . . . 410
Mines-Ponts . . . 418
Centrale . . . 427
Mines-Télécom . . . 449
CCINP . . . 451

7. Intégration
ENS . . . 471
X-ESPCI . . . 476
Mines-Ponts . . . 479
Centrale . . . 486
Mines-Télécom . . . 494
CCINP . . . 495

8. Intégrale à paramètre
X-ESPCI . . . 513
Mines-Ponts . . . 516
Centrale . . . 519
Mines-Télécom . . . 530
CCINP . . . 532

9. Intégrale et série
X-ESPCI . . . 539
Mines-Ponts . . . 545
Centrale . . . 556
Mines-Télécom . . . 559
CCINP . . . 572

10. Suite et série de fonctions
X-ESPCI . . . 585
Mines-Ponts . . . 591
Centrale . . . 605
Mines-Télécom . . . 613
CCINP . . . 617

11. Série entière
ENS . . . 627
Mines-Ponts . . . 632
Centrale . . . 636
Mines-Télécom . . . 640
CCINP . . . 645

12. Équation différentielle
ENS 659
X-ESPCI 661
Mines-Ponts 662
Centrale 667
CCINP 676

13. Calcul différentiel
ENS 691
X-ESPCI 697
Mines-Ponts 700
Centrale 705
Mines-Télécom 716
CCINP 718

III. Probabilité **729**

14. Probabilité
ENS 731
X-ESPCI 745
Mines-Ponts 758
Centrale 778
Mines-Télécom 820
CCINP 856

Première partie

Algèbre

Chapitre n° 1

Algèbre générale

ENS

Oral n° 1

Thème : polynôme complexe, principe du maximum

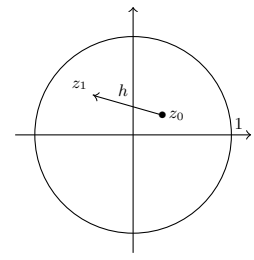
On note $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ et $\partial D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Montrer que

$$\max_{z \in D} |P(z)| = \max_{z \in \partial D} |P(z)|$$

Commentaires

La démonstration repose sur un raisonnement par l'absurde. On suppose que le maximum (qui existe) est atteint en un point z_0 intérieur au disque. En choisissant judicieusement une direction, on trouve un point $z_1 = z_0 + h$ du disque unité ouvert tel que $|P(z_1)| > |P(z_0)|$.

Remarquons que la continuité de $z \mapsto |P(z)|$ sur la partie fermée et bornée D assure l'existence du maximum.
Si le polynôme P est constant alors la propriété est trivialement vérifiée. On suppose que P est non constant.
Supposons que le maximum soit atteint en un point z_0 intérieur au disque D. Soit h un complexe non nul. Posons $z_1 = z_0 + h$.



En notant n le degré de P, on a par la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P(z_1) = P(z_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} h^k = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} h^k$$

Posons pour tout $k \geqslant 1$, $a_k = \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}$. Si tous les a_k sont nuls alors P est constant. Il existe

donc a_r tel que a_r est le premier coefficient a_k non nul pour $k \geqslant 1$. Avec ces notations, nous avons

$$P(z_1) = P(z_0) + a_r h^r + h^{r+1} \underbrace{\left(a_{r+1} + \ldots + a_n h^{n-r-1}\right)}_{=\varphi(h)}$$

ou encore

$$P(z_0) + a_r h^r = P(z_1) - h^{r+1}\varphi(h)$$

Par inégalité triangulaire :

$$|P(z_0) + a_r h^r| \leqslant |P(z_1)| + \left|h^{r+1}\varphi(h)\right|$$

donc

$$|P(z_0) + a_r h^r| - \left|h^{r+1}\varphi(h)\right| \leqslant |P(z_1)|$$

Écrivons les formes exponentielles des complexes $P(z_0) = a\,\mathrm{e}^{i\alpha}$, $a_r = b\,\mathrm{e}^{i\beta}$ et $h = |h|\,\mathrm{e}^{i\theta}$. (Notons que $P(z_0)$ est non nul sinon P est nul.) Ainsi,

$$\begin{aligned}
|P(z_1)| &\geqslant \left|a\,\mathrm{e}^{i\alpha} + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta)}\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| \\
&\geqslant \left|\mathrm{e}^{i\alpha}\left(a + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)}\right)\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| \\
&\geqslant \left|a + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)}\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)|
\end{aligned}$$

On choisit θ tel que $\beta + r\theta - \alpha = 0\,[2\pi]$ de sorte que $\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)} = 1$. Ainsi,

$$|P(z_1)| \geqslant \left|a + b|h|^r\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| = a + b|h|^r - |h|^{r+1}|\varphi(h)| = a + |h|^r(b - |h||\varphi(h)|)$$

Maintenant, on choisit $|h|$ suffisamment petit de telle sorte que d'une part $|h||\varphi(h)| < b$ et d'autre part le point $z_1 = z_0 + h$ soit à l'intérieur de D. On a alors

$$|P(z_1)| > a = |P(z_0)|$$

ce qui est contradictoire avec la définition de z_0.

Commentaires

Nous avons montré en fait que si P est un polynôme complexe non constant, il n'a pas de maximum local à l'intérieur du disque unité.
Cette propriété s'appelle le principe du maximum. Elle s'applique plus généralement aux fonctions dites entières c'est-à-dire développables en série entière en tout point de $\mathbf{C}$.
Proposons une autre démonstration du principe du maximum pour les polynômes.
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. Supposons par l'absurde que le maximum de $|P|$ soit atteint en un point z_0 intérieur au disque D. Écrivons dans la base des $(z - z_0)^i$:

$$P(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n$$

Calculons, pour $0 < r < 1 - |z_0|$ (de telle sorte que $z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in D$), l'intégrale :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta$$

En utilisant le fait que pour un complexe u, $|u|^2 = u\overline{u}$:

$$\begin{aligned}\left|P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 &= \left|b_0 + b_1 r\,\mathrm{e}^{i\theta} + \ldots + b_n r^n\,\mathrm{e}^{in\theta}\right|^2 \\ &= (b_0 + b_1 r\,\mathrm{e}^{i\theta} + \ldots + b_n r^n\,\mathrm{e}^{in\theta})(\overline{b_0} + \overline{b_1} r\,\mathrm{e}^{-i\theta} + \ldots + \overline{b_n} r^n\,\mathrm{e}^{-in\theta}).\end{aligned}$$

Par développement et linéarité de l'intégrale, $I(r)$ apparaît comme une combinaison linéaire d'intégrales du type

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}.$$

On en déduit que

$$I(r) = |b_0|^2 + r^2|b_1|^2 + \ldots + r^{2n}|b_n|^2$$

Mais comme pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\left|P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| \leqslant |P(z_0)| = b_0$:

$$I(r) = |I(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |b_0|^2 = |b_0|^2$$

On a donc, pour $0 < r < 1 - |z_0|$,

$$|b_0|^2 + r^2|b_1|^2 + \ldots + r^{2n}|b_n|^2 \leqslant |b_0|^2$$

ce qui impose que $b_k = 0$ pour $k \geqslant 1$ donc que le polynôme P est constant ce qui est contradictoire.

Oral n° 2

Thème : polynôme complexe

Résoudre dans $\mathbf{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = P(X)^2$.

- On constate que les monômes X^n vérifie l'équation.
- Montrons que les monômes sont les seules solutions de cette équation.

  Soit P un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$.

  $$P(X) = \ldots + a_n X^n$$

  avec $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P, $n \in \mathbf{N}^*$ le degré de P et les pointillés désignant des monômes de degré $< n$.

  Supposons qu'il existe des monômes avant le monôme de plus haut degré. On note $a_m X^m$ le monôme qui précède le monôme de plus haut degré :

  $$P(X) = \ldots + a_m X^m + a_n X^n$$

  On a alors

  $$P(X^2) = \ldots + a_m X^{2m} + a_n X^{2n}$$

  et

  $$P(X)^2 = \ldots + a_m^2 X^{2m} + 2a_n a_m X^{n+m} + a_n^2 X^{2n}$$

  On en déduit que $a_n = a_n^2$ soit $a_n = 1$. Comme $2m < n + m < 2n$ car $m < n$ et qu'il n'y a pas de monôme de degré $n + m$ dans $P(X^2)$, $a_m = 0$. Donc le monôme $a_m X^m$ n'existe pas. Autrement dit, $P = X^n$.

Les solutions de l'équation sont tous les monômes unitaires.

Oral n° 3

Thème : polynôme, multiplicité des racines

Soit

$$E = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \forall x \in \mathbf{R}, P(x) \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad F = \{A^2 + B^2 \mid (A, B) \in \mathbf{R}[X]^2\}$$

1. Montrer que $F \subset E$.
2. Montrer que F est stable par produit.
3. Soit $P \in E$. Que dire du degré de P ? Que dire des multiplicités des racines réelles de P ?
4. Montrer que $E = F$.
5. Soit E' l'ensemble des polynômes P tels que P est positif ou nul sur le segment $[a, b]$. Soit F' l'ensemble des polynômes de la forme

$$(X - a)P + (b - X)Q + (X - a)(b - X)R + S$$

avec $(P, Q, R, S) \in E^4$. Montrer que $E' = F'$.

1. Soit $P \in F$. Il existe $(A, B) \in \mathbf{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$. Pour tout réel x, $P(x) = A^2(x) + B^2(x) \geqslant 0$. Donc $P \in E$.

2.

> **Commentaires**
>
> Indication : l'expression $A^2 + B^2$ est une identité remarquable dans $\mathbf{C}[X]$!

Soit $(P, Q) \in F$. Il existe $(A, B, C, D) \in \mathbf{R}[X]^4$ tel que $P = A^2 + B^2$ et $Q = C^2 + D^2$. On a dans $\mathbf{C}[X]$:

$$\begin{aligned} PQ &= (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (A + iB)(A - iB)(C + iD)(C - iD) \\ &= (A + iB)(C + iD)(A - iB)(C - iD) \\ &= \big[(AC - BD) + i(BC + AD)\big]\big[(AC - BD) - i(BC + AD)\big] \\ &= (AC - BD)^2 + (BC + AD)^2 \in F \end{aligned}$$

Ainsi, F est stable par produit.

Dans les questions suivantes, on considère un polynôme de degré $\geqslant 1$. Les polynômes constants de E s'écrivent bien sous la forme de la somme de deux carrés car si $P = c \in E$, $P = \sqrt{c}^2 + 0^2$.

3. Soit $P \in E \setminus \mathbf{R}_0[X]$. Au voisinage de $\pm\infty$, $P(x) \overset{x \to \pm\infty}{\sim} \mu x^d$ avec $\mu \in \mathbf{R}^*$ le coefficient dominant de P et $d = \deg(P)$. Comme P est positif, $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = +\infty$ donc $\mu > 0$ et d est un entier pair.

   Soit α une racine réelle de P de multiplicité m ($m \in \mathbf{N}^*$). Il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$. Supposons que m soit impair de sorte que le signe de $(x - \alpha)^m$ est

celui de $x-\alpha$. Comme P est positif, cela impose que Q est positif sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ et négatif sur l'intervalle $]-\infty,\alpha]$. Comme Q est continue, on a $\lim_{x\to\alpha} Q(x) = Q(\alpha)$. D'après les considérations sur le signe de Q, on en déduit que $Q(\alpha)\geqslant 0$ et $Q(\alpha)\leqslant 0$ donc $Q(\alpha)=0$ ce qui est contredit la multiplicité de α. Donc m est pair.

4. Compte tenue de la question précédente, la factorisation de P dans $\mathbf{C}[X]$ s'écrit

$$P = \mu\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{2m_k}\prod_{k=1}^{q}(X-\beta_k)^{n_k}(X-\overline{\beta_k})^{n_k}$$

où α_k sont les racines réelles de multiplicité paire $2m_k$ et β_k et $\overline{\beta_k}$ les racines complexes non réelles de multiplicité n_k.

> **Commentaires**
>
> Comme P est un polynôme à coefficients réels, ses racines complexes non réelles sont deux à deux conjuguées entre elles et de même multiplicité.

Réordonnons les facteurs :

$$P = \mu\underbrace{\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{m_k}\prod_{k=1}^{q}(X-\beta_k)^{n_k}}_{:=R(X)}\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{m_k}\prod_{k=1}^{q}(X-\overline{\beta_k})^{n_k}$$
$$= \mu R\overline{R} = \sqrt{\mu}R\overline{\sqrt{\mu}R} = |\sqrt{\mu}R|^2 = \mathfrak{Re}(\sqrt{\mu}R)^2 + \mathfrak{Im}(\sqrt{\mu}R)^2$$

On a donc prouvé que $P\in F$ d'où l'inclusion $E\subset F$ puis l'égalité $E=F$.

5.

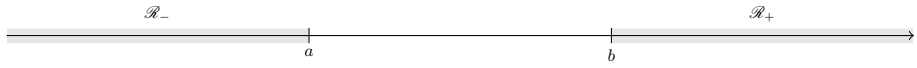
> **Commentaires**
>
> Dans cette question il faut considérer les racines réelles appartenant à l'intervalle $]a,b[$ et celles qui sont à l'extérieur de cet intervalle.

On vérifie facilement que $F'\subset E'$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $P\in E'$. Si P est constant, c'est évident. Supposons $\deg(P)\geqslant 1$. Soit α une racine réelle de P dans $]a,b[$ de multiplicité m : $P=(X-\alpha)^m Q$. Si on suppose que m est impair, comme dans la question précédente, la positivité de P sur $[a,b]$ implique que $Q(\alpha)=0$ ce qui n'est pas possible. On en déduit que les éventuelles racines de P dans l'intervalle $]a,b[$ ont toutes une multiplicité paire. On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des racines réelles à l'extérieur de $]a,b[$. La factorisation de P dans $\mathbf{R}[X]$ s'écrit

$$P = \mu\prod_{\alpha\in\mathscr{R}}(X-\alpha)^{m_\alpha}\underbrace{\prod_{\alpha\notin\mathscr{R}}(X-\alpha)^{m_\alpha}\prod_{k=1}^{q}(X^2+b_kX+c_k)}_{:=S}$$

où m_α désigne la multiplicité de α et $X^2+b_kX+c_k$ est un trinôme à discriminant strictement négatif. Ces trinômes ont un signe constant sur $\mathbf{R}$, comme ils tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, ils sont positifs sur $\mathbf{R}$. Pour $\alpha\notin\mathbf{R}$, m_α est un entier pair donc le polynôme $\prod_{\alpha\notin\mathscr{R}}(X-\alpha)^{m_\alpha}$ est positif sur $\mathbf{R}$. On en déduit que $S\in E$.

On scinde $\mathscr{R}$ en deux sous-ensembles disjoints : $\mathscr{R} = \mathscr{R}_- \uplus \mathscr{R}_+$ avec $\mathscr{R}_-$ (respectivement $\mathscr{R}_+$) l'ensemble des racines de P appartenant à l'intervalle $]-\infty, a]$ (respectivement $[b, +\infty[$).



On a

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} (X-\alpha)^{m_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} \big(X - a + (a-\alpha)\big)^{m_\alpha}$$

Comme $a - \alpha \geqslant 0$, en développant ce produit, on obtient une expression du type

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} (X-\alpha)^{m_\alpha} = \sum_{k=0}^{n_1} \gamma_k (X-a)^k$$

avec des coefficients γ_k positifs.

Commentaires

On n'a pas besoin d'expliciter ces coefficients γ_k ; seule leur positivité nous importe.

On sépare cette somme en deux selon la parité de l'indice k :

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} (X-\alpha)^{m_\alpha} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor n_1/2\rfloor} \gamma_{2\ell}(X-a)^{2\ell}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}} + (X-a) \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n_1-1)/2\rfloor} \gamma_{2\ell+1}(X-a)^{2\ell}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}}$$

On a donc

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} (X-\alpha)^{m_\alpha} = A + (X-a)B \quad \text{avec } (A,B)\in E^2$$

On fait le même travail avec le produit portant sur les racines de $\mathscr{R}_+$:

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+} (X-\alpha)^{m_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+} (-1)^{m_\alpha}(\alpha - X)^{m_\alpha} = (-1)^s \prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+} \big((\alpha-b) + (b-X)\big)^{m_\alpha}$$

avec $s = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}_+} m_\alpha$.

Comme $\alpha \geqslant b$, les différences $\alpha - b$ sont positives. En développant le produit, on obtient :

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+} (X-\alpha)^{m_\alpha} = (-1)^s \sum_{k=0}^{n_2} \gamma'_k (b-X)^k$$

avec $\gamma'_k \geqslant 0$. On sépare en deux sommes selon la parité de l'indice :

$$\sum_{k=0}^{n_2} \gamma'_k (b-X)^k = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor n_2/2\rfloor} \gamma'_{2\ell}(b-X)^{2\ell}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}} + (b-X) \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n_2-1)/2\rfloor} \gamma'_{2\ell+1}(b-X)^{2\ell}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}}$$

On a donc

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+}(X-\alpha)^{m_\alpha}=(-1)^s\big(C+(b-X)D\big)\quad\text{avec }(C,D)\in E^2$$

Le polynôme P s'écrit alors

$$P=\mu(-1)^s\,[A+(X-a)B]\,[C+(b-X)D]\,S$$

Sur le segment $[a,b]$, $P\geqslant 0$ et $[A+(x-a)B]\,[C+(b-x)]$ est positif donc $\mu(-1)^s>0$. En distribuant $\mu(-1)^sS$, on a

$$P=[A_1+(X-a)B_1]\,[C_1+(b-X)D_1]\quad\text{avec }(A_1,B_1,C_1,D_1)\in E^4$$

puis en développant :

$$P=(X-a)E+(b-X)F+(X-a)(b-X)G+H$$

avec $(E,F,G,H)\in E^4$.

X-ESPCI

Oral n° 4

Thème : relation coefficients/racines d'un polynôme

Résoudre le système

$$x+y+z=1, \quad xyz=1, \quad |x|=|y|=|z|=1$$

d'inconnue $(x,y,z)\in \mathbf{C}^3$.

Commentaires

Le point clé dans cet exercice est de penser à l'égalité $z\overline{z}=|z|^2$. Donc si $|z|=1$ alors $\overline{z}=\frac{1}{z}$.

On a $1=|x|^2=x\overline{x}$ donc $\overline{x}=\frac{1}{x}$. De même, $\overline{y}=\frac{1}{y}$ et $\overline{z}=\frac{1}{z}$. En conjugaison la première équation : $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}=1$. On a donc

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{xy+xz+yz}{xyz}=1 \Rightarrow xy+xz+yz=1$$

Soit à présent $\mathbf{P}\in\mathbf{C}[X]$ unitaire de racines x,y et z. On a donc $P(X)=(X-x)(X-y)(X-z)$. En développant :

$$P(X)=X^3-(x+y+z)X^2+(xy+xz+yz)X-xyz=X^3-X^2+X-1$$

Factorisons P :

$$P(X)=X^2(X-1)+X-1=(X-1)(X^2+1)=(X-1)(X-i)(X+i)$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathscr{S}=\{(1,i,-i);(1,-i,i);(-i,i,1);(i,1,-i),(-i,1,i);(i,-i,1)\}$$

Oral n° 5

Thème : calcul de $\zeta(2)$, méthode de papadimitriou

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme P_n tel que :
$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad P_n\big(\tan^2(t)\big) = \frac{\cos\big((2n+1)t\big)}{\cos^{2n+1}(t)}$$
2. Déterminer les racines de P_n et montrer que leur somme est égale à $\dfrac{n(2n-1)}{3}$.
3. Démontrer que
$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan^2(t) \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^{-2} \leqslant 1 + \tan^2(t)$$
et en déduire le calcul de la somme
$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Commentaires

Il existe de nombreuses méthodes pour calculer la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. La méthode proposée ici est due au mathématicien grec Ioannis Papadimitriou et date de 1973.

1. Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a
$$\cos\big((2n+1)t\big) = \mathfrak{Re}\big(\mathrm{e}^{(2n+1)it}\big) = \mathfrak{Re}\left[\big(\cos(t) + i\sin(t)\big)^{2n+1}\right]$$
On développe l'expression à l'aide de la formule du binôme de Newton :
$$\big(\cos(t) + i\sin(t)\big)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^{2n+1-k}(t) i^k \sin^k(t)$$
Seule la partie réelle de la somme nous intéresse, elle est égale à la somme des termes d'indices pairs :
$$\cos\big((2n+1)t\big) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n+1}{2l} (-1)^\ell \cos^{2n+1-2\ell}(t) \sin^{2\ell}(t)$$

Commentaires

Remarquons que l'indice ℓ varie entre 0 et n ; en effet, $0 \leqslant 2\ell \leqslant 2n+1 \Rightarrow 0 \leqslant \ell \leqslant n$.

Par suite,
$$\frac{\cos\big((2n+1)t\big)}{\cos^{2n+1}(t)} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n+1}{2\ell} (-1)^\ell \frac{\sin^{2\ell}(t)}{\cos^{2\ell}(t)} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n+1}{2\ell} (-1)^\ell \tan^{2\ell}(t)$$

Commentaires

$\tan(t)$ est bien défini car $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On pose

$$P_n(X) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n+1}{2\ell} (-1)^\ell X^\ell$$

On a donc prouvé l'existence d'un polynôme $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$P_n\big(\tan^2(t)\big) = \frac{\cos\big((2n+1)t\big)}{\cos^{2n+1}(t)}$$

Supposons qu'il existe un polynôme Q_n tel que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad Q_n\big(\tan^2(t)\big) = \frac{\cos\big((2n+1)t\big)}{\cos^{2n+1}(t)}$$

Dans ce cas, en posant $x = \tan^2(t)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $P_n(x) - Q_n(x) = 0$. Le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines. Il est donc nul et par conséquent $P_n = Q_n$.

Commentaires

Cet argument pour montrer que P_n est unique est à retenir. On suppose qu'il existe un autre polynôme Q_n vérifiant la propriété ou la relation étudiée puis on montre que la différence $\Delta_n = P_n - Q_n$ admet une infinité de racines ce qui prouve que le polynôme Δ_n est nul et donc que $P_n = Q_n$.

2. Soit x dans $]0, +\infty[$. Il existe t dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan^2(t)$. (On a $t = \arctan(\sqrt{x})$.) On a alors,

$$P_n(x) = 0 \iff P_n\big(\tan^2(t)\big) = 0 \iff \frac{\cos\big((2n+1)t\big)}{\cos^{2n+1}(t)} = 0 \iff \cos\big((2n+1)t\big) = 0$$
$$\iff \exists k \in \mathbf{Z},\ t = t_k = \frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}$$

Posons, pour tout k dans $\mathbf{Z}$,

$$x_k := \tan^2(t_k) = \tan^2\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)$$

Lorsque $k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 < t_k < \frac{\pi}{2}$. Comme la fonction $t \mapsto \tan^2(t)$ est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est injective de sorte que les x_k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont deux à deux distincts. Donc P_n admet au moins n racines réelles distinctes.

Comme le monôme de plus haut degré de P_n est

$$\binom{2n+1}{2n}(-1)^n X^n = (2n+1)(-1)^n X^n$$

P_n est de degré n. On a donc trouvé toutes ses racines, il s'agit des $x_k = \tan^2(t_k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Si on note $P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, la somme des racines de P_n est

$$\sigma_n := \sum_{k=0}^{n-1} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{1}{(2n+1)(-1)^n}\binom{2n+1}{2n-2}(-1)^{n-1}$$

D'où

$$\sigma_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} = \frac{(2n)(2n-1)}{3!} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Commentaires

- On retrouve la formule donnant la somme des racines de la façon suivante. Le polynôme P_n se factorise en

  $$P_n = a_n(X - x_0)(X - x_1)\dots(X - x_{n-1})$$

  où a_n désigne le coefficient dominant de P_n.
  Lorsqu'on développe l'expression factorisée, les termes de degrés $n-1$ sont :

  $$a_n(-x_0X^{n-1} - x_1X^{n-1} - x_2X^{n-1} - \dots - x_{n-1}X^{n-1}) = -a_n\sigma_nX^{n-1}$$

  Par identification avec la forme additive de $P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $\sigma_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$.
- Effectuons des tests de cohérence. Pour $n = 1$, on a $P_1 = 1 - 3X$ ayant pour unique racine $x_0 = \frac{1}{3}$ (qui est bien égal à $\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$). La somme des racines est $\sigma_1 = \frac{1}{3}$. Or la formule trouvée donne $\frac{1\times1}{3} = \frac{1}{3}$ ✓
  Pour $n = 2$, on a $P_2 = 5X^2 - 10X + 1$ de racines

  $$x_0 = \frac{1}{5}(5 - 2\sqrt{5}) \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{1}{5}(5 + 2\sqrt{5})$$

  (On en déduit d'ailleurs en identifiant avec l'expression des racines de P_2 que $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{1}{5}(5 - 2\sqrt{5})}$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{1}{5}(5 + 2\sqrt{5})}$.) La somme des racines est égale à $\sigma_2 = x_0 + x_1 = 2$. La formule donne $\frac{2\times\not{3}}{\not{3}} = 2$ ✓

3. La deuxième inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2} \leqslant \frac{1}{\cos^2(t)} \iff \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 \geqslant \cos^2(t) \iff \frac{\pi}{2} - t \geqslant \cos(t)$$

La dernière équivalence est justifiée car $\frac{\pi}{2} - t \geqslant 0$ et $\cos(t) \geqslant 0$.

La fonction cos est concave car $\cos^{(2)} = -\cos \leqslant 0$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc le graphe de cos est en-dessous de chacune de ses tangentes en particulier la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ dont l'équation est $y = \frac{\pi}{2} - t$. On a donc $\cos(t) \leqslant \frac{\pi}{2} - t$.

La première inégalité est quant à elle équivalente à $\tan(t) \leqslant \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t}$ car les deux membres de l'inégalité sont positifs.

Si on pose $u = \frac{\pi}{2} - t$, l'inégalité est équivalente à

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \leqslant \frac{1}{u} \iff \frac{1}{\tan(u)} \leqslant \frac{1}{u} \iff u \leqslant \tan(u)$$

Or cette dernière inégalité est vraie lorsque $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En effet, sur cet intervalle, $\tan^{(2)} = (1+\tan^2)' = 2\tan(1+\tan^2) \geqslant 0$ donc tan est convexe donc son graphe est au-dessus de sa tangente en 0 dont l'équation est $y = u$.

Utilisons l'encadrement précédent avec $t = t_k \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \underbrace{\tan^2(t_k)}_{=x_k} \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - t_k\right)^{-2} \leqslant 1 + \underbrace{\tan^2(t_k)}_{=x_k}$$

Par somme :

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - t_k\right)^2} \leqslant n + \sigma_n$$

Or

$$\frac{\pi}{2} - t_k = \frac{\pi}{2} - \frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2} = \frac{n-k}{2n+1}\pi$$

On obtient ainsi l'encadrement :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n+1)^2}{(n-k)^2} \leqslant n + \frac{n(2n-1)}{3}$$

soit

$$\underbrace{\pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}}_{=a_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \underbrace{\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right)}_{=b_n}$$

Comme $a_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\cancel{n^2}}{12\cancel{n^2}}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6} \to \frac{\pi^2}{6}$ et $b_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4\cancel{n^2}}\frac{2\cancel{n^2}}{3} = \frac{\pi^2}{6} \to \frac{\pi^2}{6}$, on en déduit que

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Oral n° 6

THÈME : NOMBRE DE DIVISEURS

On note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que $\tau(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

Montrons d'abord l'équivalence suivante :

$$\big(\forall \varepsilon > 0, \quad \tau(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\varepsilon)\big) \iff \big(\forall \varepsilon > 0, \quad \tau(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(n^\varepsilon)\big)$$

Le sens direct est évident car si la suite $\big(\tau(n)/n^\varepsilon\big)$ converge vers 0 alors, en particulier, elle est bornée. Réciproquement on suppose que la suite $\big(\tau(n)/n^\delta\big)$ est bornée et ceci pour tout réel $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un réel δ tel que $0 < \delta < \varepsilon$. On a

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = \underbrace{\frac{\tau(n)}{n^\delta}}_{\text{bornée}} \underbrace{n^{\delta-\varepsilon}}_{\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On fixe un réel $\varepsilon > 0$. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, l'entier n se factorise en $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ où les p_i désignent des nombres premiers et les a_i des entiers naturels non nuls. Les diviseurs de n sont les entiers du type $p_1^{b_1} \dots p_r^{b_r}$ avec $0 \leqslant b_i \leqslant a_i$. Il y a $a_i + 1$ choix pour la puissance b_i de sorte que $\tau(n) = (a_1 + 1) \dots (a_r + 1)$ puis

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i + 1}{p_i^{a_i\varepsilon}}$$

Commentaires

L'idée est de séparer le produit en deux. D'une part les quotients inférieurs ou égaux à 1, d'autre part les autres supérieurs à 1 dont on prouve qu'ils sont en nombre fini. Sachant que $p_i^{\alpha_i\varepsilon} = \mathrm{e}^{\alpha_i\varepsilon\ln(p_i)} \geqslant 1 + \alpha_i\varepsilon\ln(p_i)$, on a $\frac{a_i+1}{p_i^{a_i\varepsilon}} \leqslant \frac{a_i+1}{1+\alpha_i\varepsilon\ln(p_i)}$. Ce quotient est plus petit que 1 si $\varepsilon\ln(p_i) \geqslant 1$. On est donc amené à considérer les facteurs du produit tels que $p_j \geqslant \mathrm{e}^{1/\varepsilon}$ et ceux tels que $p_j < \mathrm{e}^{1/\varepsilon}$.

On a

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ p_i \geqslant \mathrm{e}^{1/\varepsilon}}} \frac{a_i + 1}{p_i^{a_i\varepsilon}} \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ p_i < \mathrm{e}^{1/\varepsilon}}} \frac{a_i + 1}{p_i^{a_i\varepsilon}}$$

Comme $p_i^{\alpha_i\varepsilon} = \mathrm{e}^{\alpha_i\varepsilon\ln(p_i)} \geqslant 1 + \alpha_i\varepsilon\ln(p_i)$, les facteurs du produit vérifient

$$\frac{a_i + 1}{p_i^{a_i\varepsilon}} \leqslant \frac{a_i + 1}{1 + a_i\varepsilon\ln(p_i)}$$

Si $p_i \geqslant \mathrm{e}^{1/\varepsilon}$ alors $\varepsilon\ln(p_i) \geqslant 1$ puis $\frac{a_i+1}{1+a_i\varepsilon\ln(p_i)} \leqslant 1$.

Posons $\phi(t) := \frac{t+1}{1+t\varepsilon\ln(p_i)}$ de dérivée $\phi'(t) = \frac{1-\varepsilon\ln(p_i)}{(1+t\varepsilon\ln(p_i))^2}$. Si $p_i < \mathrm{e}^{1/\varepsilon}$ alors $\varepsilon\ln(p_i) < 1$ donc $\phi'(t) > 0$. La fonction ϕ est croissante et est donc majorée par $\lim_{t\to+\infty}\phi(t) = \frac{1}{\varepsilon\ln(p_i)}$. On

obtient donc

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = \underbrace{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ p_i\geqslant \mathrm{e}^{1/\varepsilon}}} \frac{a_i+1}{p_i^{a_i\varepsilon}}}_{\leqslant 1} \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ p_i<\mathrm{e}^{1/\varepsilon}}} \frac{a_i+1}{p_i^{a_i\varepsilon}} \leqslant \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ p_i<\mathrm{e}^{1/\varepsilon}}} \frac{1}{\varepsilon\ln(p_i)}$$

Comme $p_i \geqslant 2$, $\frac{1}{\varepsilon\ln(p_i)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)\varepsilon}$. Le nombre de p_i tels que $p_i < \mathrm{e}^{1/\varepsilon}$ est majorée par $\lfloor \mathrm{e}^{1/\varepsilon}\rfloor$. On a donc

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} \leqslant \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ p_i<\mathrm{e}^{1/\varepsilon}}} \frac{1}{\varepsilon\ln(p_i)} \leqslant \left(\frac{1}{\ln(2)\varepsilon}\right)^{\lfloor \mathrm{e}^{1/\varepsilon}\rfloor}$$

On a donc prouvé que $\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = \mathrm{O}(1)$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc que $\tau(n) = \mathrm{o}(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

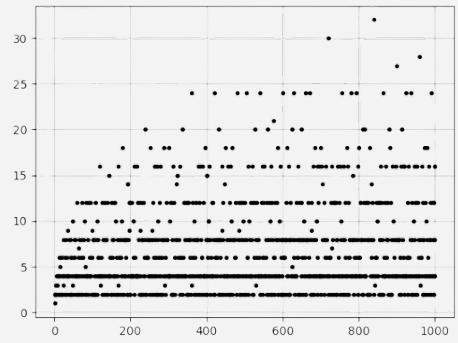
Commentaires

La fonction τ est assez erratique. Sa borne inférieure est 2 puisque pour tout nombre premier p, $\tau(p) = 2$. Elle prend des valeurs arbitrairement grandes puisque $\tau(2^a) = a+1$. Le programme suivant affiche sur un graphique les 1 000 premières valeurs de τ .

```
def tau(n):
    s=0
    for m in range(1,n+1):
        if n%m==0:
            s=s+1
    return(s)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.arange(1,1001, 1)
y = [ tau(n) for n in x]
plt.plot(x,y,"k.")
plt.grid()
plt.show()
```

On obtient :



Posons $\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} \tau(k)$. Une fonction plus significative que $\tau(n)$ est la fonction $\frac{1}{n}\sigma(n)$ égale au nombre moyen de diviseurs de l'entier n. Dans les sommes suivantes, les sommes portent sur des entiers entre 1 et n. Comme $\tau(k) = \sum_{d|k} 1$, par Fubini, on a

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} 1 = \sum_{d=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ d|k}}^{n} 1$$

La seconde somme est le nombre de multiples de d dans $[\![1, n]\!]$ c'est-à-dire les ℓd tels que $1 \leqslant \ell d \leqslant n \iff 1 \leqslant \ell \leqslant \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$. On a donc

$$\sigma(n) = \sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Comme $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$, on a

$$nH_n - n = \sum_{d=1}^{n} \left(\frac{n}{d} - 1 \right) \leqslant s_n \leqslant \sum_{d=1}^{n} \frac{n}{d} = nH_n \quad \text{avec } H_n := \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$$

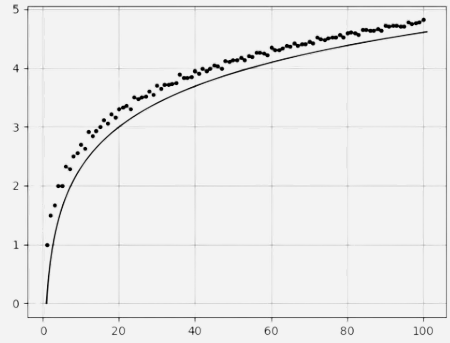
D'où l'encadrement : $H_n - 1 \leqslant \frac{s_n}{n} \leqslant H_n$. On sait que $H_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ (cf. oral n° 194) donc $\frac{\sigma(n)}{n} \overset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Autrement dit, le nombre moyen de diviseurs d'un entier se raréfie lorsque n croît. Le programme suivant calcule le nombre moyen de diviseurs et représente la courbe du logarithme et la suite $n \mapsto \frac{1}{n}\sigma(n)$.

```
s=0
L=[]
N=101
for n in range(1,N):
    s=s+tau(n)
    L.append(s/n)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.arange(1,N, 1)
```

```
11 t = np.linspace(1,N,10*N)
12 y = np.log(t)
13 plt.plot(x,L,"k.")
14 plt.plot(t,y,"k")
15 plt.grid()
16 plt.show()
```

On obtient :



Mines-Ponts

Oral n° 7

Thème : dénombrement des idempotents

Soit $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$. Dénombrer les fonctions f telles que $f \circ f = f$.

Commentaires

Une telle application s'appelle un idempotent. Il est clair de $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ et les applications constantes sont des idempotents.
Pour $n = 2$, on a 3 idempotents : Id, $(1, 1)$ (c'est-à-dire l'application constante $x \in [\![1, 2]\!] \mapsto 1$) et $(2, 2)$.
Pour $n = 3$, outre les applications constantes et l'identité, on a par exemple, l'application f telle que $\big(f(1), f(2), f(3)\big) = (1, 2, 2)$. En effet, on a $f\big(f(1)\big) = f(1)$, $f\big(f(2)\big) = f(2)$ et $f\big(f(3)\big) = f(2) = f(3)$.

Posons $E = [\![1, n]\!]$. Soit f une telle application de E dans E telle que $f \circ f = f$. Pour tout $y = f(x) \in f(E)$, $f(y) = f\big(f(x)\big) = f(x) = y$. Donc la restriction $f_{|f(E)} = \mathrm{Id}_{f(E)}$. Notons que la restriction $f_{|E \setminus f(E)}$ est une application quelconque à valeurs dans $f(E)$.
Réciproquement, si on se donne une partie non vide de E disons A et une application g de $E \setminus A$ dans A, on définit l'application f de E dans E par $f_{|A} = \mathrm{Id}_A$ et $f_{|E \setminus A} = g$. Montrons que $f \circ f = f$. Soit $x \in E$. Si $x \in A$ alors $f\big(f(x)\big) = f\big(\mathrm{Id}_A(x)\big) = f(x)$. Si $x \in E \setminus A$ alors $f\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = g(x)$ car $g(x) \in A$. Comme $x \in E \setminus A$, par définition, $g(x) = f(x)$ donc on a $f\big(f(x)\big) = f(x)$.
Se donner une application $f \in E^E$ telle que $f \circ f = f$ revient à se donner une partie non vide A de E et une application quelconque de $E \setminus A$ dans A. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Il y a $\binom{n}{p}$ parties A dans E de cardinal p. Puis il y a p^{n-p} applications de $E \setminus A$ dans A. Le cardinal cherché est donc

$$\sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} p^{n-p}$$

Oral n° 8

Thème : relations coefficients/racines d'un polynôme

Soit n un entier impair plus grand que 3. On pose $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Commentaires

- Cet exercice n'est pas facile car il faut interpréter le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$ comme le produit des racines d'un polynôme à déterminer.

  Posons $z = \frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$. Notons que nécessairement $z \neq -1$ sinon on aurait $1+\cancel{\omega^k} = -1+\cancel{\omega^k}$ ce qui n'est pas possible. De même, z ne peut être nul sinon $\omega^k = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}} = 1$ c'est-à-dire $k = 0$ ce qui est exclu.

  De $z = \frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$, on tire que $\omega^k = \frac{1-z}{1+z}$. Comme ω^k est une racine n-ème de l'unité, $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n = 1$ soit $(1-z)^n = (1+z)^n$. Cela suggère d'introduire le polynôme $P_n(X) = (1+X)^n - (1-X)^n$. 0 est une racine de P_n. Donc $P_n(X) = XQ_n(X)$ où Q_n est un polynôme de degré $n-1$. C'est ce polynôme qui nous intéresse.

- Justifions que les produits sont bien définis. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'angle $\frac{2\pi k}{n} \in]0, 2\pi]$. On a donc $1+\omega^k = 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}} = -1 \iff \frac{2\pi k}{n} = \pi \iff n = 2k$

  L'angle $\frac{\pi k}{n} \in]0, \pi]$. On a donc $\frac{\pi k}{n} = \frac{\pi}{2} \iff n = 2k$.

  n est impair donc $1+\omega^k \neq 0$ et $\frac{\pi k}{n} \neq \frac{\pi}{2}$ donc les produits $\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont bien définis.

On pose $P_n(X) = (1+X)^n - (1-X)^n$. Par développement,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1-(-1)^k\right) X^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(1-(-1)^k\right) X^k = X \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(1-(-1)^k\right) X^{k-1}}_{:=Q_n}$$

Q_n est un polynôme de degré $n-1$ de coefficient dominant $\binom{n}{n}\left(1-(-1)^n\right) = 2$ car n est impair de coefficient constant $Q_n(0) = \binom{n}{1}\left(1-(-1)^1\right) = 2n$.
Les racines de Q_n sont les racines non nulles de P_n. Par ailleurs, -1 n'est pas une racine de P_n car $P_n(-1) = -2^n \neq 0$. Soit à présent $z \in \mathbf{C} \setminus \{-1, 0\}$. On a

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff (1+z)^n = (1-z)^n \overset{z\neq -1}{\iff} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{1-z}{1+z} \text{ est une racine } n\text{-ème de l'unité} \\ &\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \text{ tel que } \frac{1-z}{1+z} = \omega^k \end{aligned}$$

On a exclu $k=0$ sinon on aurait $\frac{1-z}{1+z}=1$ soit $z=0$ ce qui est exclu. On a donc

$$P_n(z)=0 \iff 1-z=\omega^k(1+z) \iff z(1+\omega^k)=1-\omega^k \iff z=\frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$$

La division par $1+\omega^k$ est légitime car si $1+\omega^k=0$ alors l'équation devient $z\times 0=1-\omega^k=2$. Notons $z_k:=\frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$ les racines de Q_n. On a, d'après la formule donnant le produit des racines d'un polynôme de degré $n-1$:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}=\prod_{k=1}^{n-1}z_k=(-1)^{n-1}\frac{Q_n(0)}{2}=n$$

On a également par la factorisation par l'angle moitié :

$$\frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}=\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{n}}+1}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{i\pi k}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{-i\pi k}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{i\pi k}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{-i\pi k}{n}}}=\frac{2i\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)}=i\tan\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

On a donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-\omega^k}{1+\omega^k}=\prod_{k=1}^{n-1}i\tan\left(\frac{\pi k}{n}\right)=i^{2p}\prod_{k=1}^{n-1}\tan\left(\frac{\pi k}{n}\right)=(-1)^p\prod_{k=1}^{n-1}\tan\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

en posant $n=2p+1$ avec $p\geqslant 1$. On en déduit que

$$\prod_{k=1}^{n-1}\tan\left(\frac{\pi k}{n}\right)=\frac{n}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}=n(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Commentaires

Vérifions la cohérence de cette formule pour $n=3$.

$$\prod_{k=1}^{2}\tan\left(\frac{\pi k}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}(-\sqrt{3})=-3$$

La formule donne $3(-1)^{\frac{3-1}{2}}=-3$ ✓

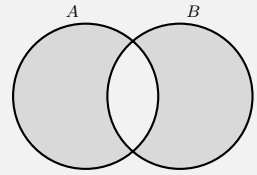
Oral n° 9

Thème : différence symétrique

Pour deux ensembles E et F, on note $E\Delta F := (E \cup F) \setminus (E \cap F)$. Pour trois ensembles A, B, C, montrer que $A\Delta C = B\Delta C$ si, seulement si, $A = B$.

Commentaires

On commence par faire un dessin. La zone grisée représente la différence symétrique $A\Delta B$.



Soit $x \in A$. Supposons que $x \notin C$. Donc $x \in A\Delta C$ donc $x \in B\Delta C$ donc $x \in B \cup C$. Mais comme $x \notin C$, $x \in B$. On a montré l'inclusion $A \subset B$. Le même raisonnement montre que $B \subset A$ d'où l'égalité demandée.
L'implication réciproque est évidente.

Commentaires

Ce petit exercice a de nombreux développements.

- Redémontrons l'égalité en utilisant la fonction indicatrice d'un ensemble.
  Dans la suite, A, B, C désignent des parties d'un ensemble E. On définit l'application $\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$. Cette application s'appelle la fonction indicatrice de la partie A ; elle caractérise complètement cette partie dans le sens où

  $$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$$

  On a le formulaire suivant :

  1. $\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A$ (noter que $\mathbf{1}_E$ est la fonction constante en 1).
  2. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.
  3. Si A et B sont disjoints alors $\mathbf{1}_{A\uplus B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.
  4. Pour une réunion quelconque : $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.
  5. $\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

  La dernière formule découle des précédentes. On peut réécrire la différence symétrique comme une réunion disjointe : $A\Delta B = (A \cap B^c) \uplus (B \cap A^c)$. On a alors :

  $$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A\Delta B} &= \mathbf{1}_{A\cap B^c} + \mathbf{1}_{B\cap A^c} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{B^c} + \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{A^c} \\ &= \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_B(\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \end{aligned}$$

Supposons à présent que $A\Delta C = B\Delta C$. On a donc l'égalité des fonctions indicatrices :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\Delta C} = \mathbf{1}_{B\Delta C} &\Rightarrow \mathbf{1}_A + \cancel{\mathbf{1}_C} - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_B + \cancel{\mathbf{1}_C} - 2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_C(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B) = \widetilde{0} \iff (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_E - 2\mathbf{1}_C) = \widetilde{0}\end{aligned}$$

où $\widetilde{0}$ désigne la fonction nulle de E dans $\{0,1\}$. Comme $(\mathbf{1}_E - 2\mathbf{1}_C)$ est non nul car $\mathbf{1}_C$ est à valeurs dans $\{0,1\}$, on a $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ et donc $A = B$.

- Grâce aux fonctions indicatrices, on montre que la différence symétrique est associative : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} &= \mathbf{1}_{A\Delta B} + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_{A\Delta B}\mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_c - 2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C + 4\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C) - 2\mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B\Delta C} - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{B\Delta C} = \mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)}\end{aligned}$$

On peut redémontrer l'exercice grâce à l'associativité de Δ :

$$\begin{aligned}A\Delta C = B\Delta C &\Rightarrow (A\Delta C)\Delta C = (B\Delta C)\Delta C \\ &\Rightarrow A\Delta(C\Delta C) = B\Delta(C\Delta C) \quad \text{grâce à l'associativité} \\ &\Rightarrow A\Delta\emptyset = B\Delta\emptyset \quad \text{car } C\Delta C = (C \cup C) \setminus (C \cap C) = \emptyset \\ &\Rightarrow A = B \quad \text{car } A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A\end{aligned}$$

Oral n° 10

Thème : nombres complexes, polynôme scindé

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbf{R}$ si, et seulement si, $\forall z \in \mathbf{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n$.

- Supposons que P soit scindé sur $\mathbf{R}$. Il existe $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$$

On a alors pour tout $z \in \mathbf{C}$:

$$|P(z)| = \left|\prod_{k=1}^{n}(z - x_k)\right| = \prod_{k=1}^{n}|z - x_k| \geqslant \prod_{k=1}^{n}|\mathfrak{Im}(z - x_k)| = \prod_{k=1}^{n}|\mathfrak{Im}(z)| = |\mathfrak{Im}(z)|^n$$

Commentaires

L'inégalité vient du fait que pour tout complexe u, $|u| \geqslant |\mathfrak{Im}(u)|$. En effet, posons $u = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On a $y^2 \leqslant x^2 + y^2 = |u|^2$. En passant à la racine carrée : $|y| \leqslant |u|$.

- Supposons que $\forall z \in \mathbf{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathfrak{Im}(z)|^n$. Si z est une racine de P, on obtient $|\mathfrak{Im}(z)|^n \leqslant |P(z)| = 0$ donc $\mathfrak{Im}(z) = 0$ donc z est un réel. Toutes les racines complexes de P sont donc réelles. Comme P est scindé sur $\mathbf{C}$, il l'est donc sur $\mathbf{R}$.

Oral n° 11

Thème : polynôme laissant invariant $\mathbf{U}$

Soit $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $d \in \mathbf{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ dans $\mathbf{C}[X]$ avec $a_0 a_d \neq 0$. On suppose que $P(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbf{N}$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
2. Calculer,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})}\,\mathrm{e}^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
et aboutir à une contradiction.
3. Déterminer les $Q \in \mathbf{C}(X]$ tels que $Q(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$.

Commentaires

- La condition $a_0 a_d \neq 0$ signifie que a_0 est non nul et a_d est non nul. Donc que $P(0) \neq 0$ et $\deg(P) = d$.
- On peut commencer à réfléchir à la question 3 et chercher des polynômes solutions du problème. Les monômes $\mathrm{e}^{i\theta} X^m$ pour $m \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$ répondent clairement au problème. On montre dans cet exercice que ce sont les seuls.

1. Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, notons M_ℓ le monôme X^ℓ. Le polynôme P s'écrit $P = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell M_\ell$. Soit $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$. On a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_\ell(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\ell\theta}\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(\ell-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = \ell \\ \frac{1}{(\ell-k)i}\left[\mathrm{e}^{i(\ell-k)\theta}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si} \quad k \neq \ell \end{cases}$$
Autrement dit, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_\ell(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \delta_{k,\ell}$$
Par linéarité de l'intégrale :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_\ell(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell \delta_{k,\ell} = a_k$$
avec la convention que $a_k = 0$ si $k \notin [\![0, d]\!]$.

2. On a par propriété de la conjugaison : $\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} = \sum_{k=0}^{d} a_k \,\mathrm{e}^{-ik\theta}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})}\,\mathrm{e}^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\,\mathrm{e}^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-i(k+d)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &\overset{\text{Question 1}}{=} \sum_{k=0}^{d} a_k a_{k+d} = a_0 a_d \neq 0\end{aligned}$$

car $a_{k+d} = 0$ dès que $k \geqslant 1$.

Par ailleurs, $P(\mathrm{e}^{i\theta})\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} = |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2 = 1$ car $P(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$. Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})}\,\mathrm{e}^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-id\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$$

car $d \neq 0$. Il y a donc une contradiction.

3. Parmi les polynômes constants, il est clair que seuls les polynômes constants du type $\mathrm{e}^{i\theta}$ laissent invariant $\mathbf{U}$. Soit à présent P un polynôme de degré $d \geqslant 1$ tel que $P(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$. D'après la question 2, on a $a_0 a_d = 0$ donc $a_0 = 0$ (puisque le coefficient dominant a_d est, par définition, non nul), autrement dit 0 est une racine de P. On note m l'ordre de multiplicité de 0 dans P. On a donc $P = X^m Q(X)$ avec $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$.

   Soit $z \in \mathbf{U}$. On a $1 = |P(z)| = |z^m||Q(z)| = |z|^m|Q(z)| = |Q(z)|$ donc $Q(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$. D'après la question 2, ceci n'est pas possible si $\deg(Q) \geqslant 1$ donc Q est un polynôme constant donc $Q = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $P = \mathrm{e}^{i\theta} X^m$.

   Réciproquement, si $P = \mathrm{e}^{i\theta} X^m$, pour $z \in \mathbf{U}$, $|P(z)| = |\,\mathrm{e}^{i\theta}\,||z|^m = 1$ donc $P(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$.

   Conclusion : les polynômes qui stabilisent le cercle unité sont les monômes $\mathrm{e}^{i\theta} X^m$ avec $(m, \theta) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.

Commentaires

On peut résoudre cet exercice plus simplement. Posons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On a

$$1 = |P(\mathrm{e}^{i\theta})|^2 = P(\mathrm{e}^{i\theta})\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} = \sum_{k=0}^{d} a_k \,\mathrm{e}^{ik\theta} \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\,\mathrm{e}^{-ik\theta}$$

On multiplie par cette égalité par $\mathrm{e}^{id\theta}$:

$$(\mathrm{e}^{i\theta})^d = \sum_{k=0}^{d} a_k \,\mathrm{e}^{ik\theta} \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\,\mathrm{e}^{i(d-k)\theta}$$

Posons $\Delta = X^d - P(X)Q(X)$ avec $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^{d-k}$. D'après l'égalité précédente, Δ admet une infinité de racines donc Δ est le polynôme nul. Autrement dit, on a $PQ = X^d$ donc P divise X^d donc $P = \lambda X^m$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$ et m un entier (inférieur ou égal à d). La condition $P(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$ impose que $|\lambda| = 1$. On retrouve donc $P = \mathrm{e}^{i\theta} X^m$.

Oral n° 12

Thème : dénombrement, injection, surjection, probabilité

Soient E et F deux ensembles finies de cardinaux respectifs m et n tels que $m \leqslant n$. On note $i_{m,n}$ le nombre d'injections de E dans F et $s_{n,m}$ le nombre de surjections de F sur E. On pose

$$C = \{(f,g) \in F^E \times E^F \mid g \circ f = \mathrm{Id}_E\}$$

1. Rappeler une expression de $i_{m,n}$.
2. Rappeler des propriétés de f et g si $(f,g) \in C$.
3. Justifier que $|C| = i_{m,n} \times m^{n-m}$.
4. Montrer que $|C| \leqslant s_{n,m} \left(\frac{n}{m}\right)^m$.
   Indication : on pourra utiliser le fait que pour tout $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in (\mathbf{R}_+^*)^m$:
   $$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \ln(a_i) \leqslant \ln\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$$
5. En déduire qu'une application $f : E \to F$ prise au hasard (de façon uniforme dans F^E) a moins de chance d'être injective qu'une application $g : F \to E$ n'a de chance d'être surjective.

On note $\mathscr{I}(E,F)$ l'ensemble des injections de E dans F et $\mathscr{S}(F,E)$ l'ensemble des surjections de F dans E.
Posons $E = \{x_i \mid i \in [\![1,m]\!]\}$.

1. On a $i_{m,n} = |\mathscr{I}(E,F)| = n(n-1)\dots(n-m+1)$.

   Commentaires

   On retrouve ce résultat de la façon suivante. Se donner une application f de E dans F revient à se donner un m-uplet $\big(f(x_1),\dots,f(x_m)\big)$ de F^m. Si on impose que f est injective, il y a n choix pour l'image $f(x_1)$, puis $n-1$ choix pour $f(x_2)$, ..., et $n+1-m$ choix pour $f(x_m)$. Donc il y a $n(n-1)\dots(n+1-m)$ applications injectives de E dans F.

2. Soit $(f,g) \in C$ c'est-à-dire $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrons que f est injective. Soit $(x,x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. En composant par g : $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$. Comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, $x = x'$.

   Montrons que g est surjective. Soit $x \in F$. Comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, $g\big(f(x)\big) = x$ donc $x = g(y)$ avec $y = f(x)$ qui est un élément de F.

   On a donc montré que $C \subset \mathscr{I}(E,F) \times \mathscr{S}(F,E)$.

3. Pour $f \in \mathscr{I}(E,F)$ fixé, on note
   $$C_f := \{(f,g) \in E^F \times F^E \mid (f,g) \in C\}$$
   la section « verticale » de C. On a alors la réunion disjointe :
   $$C = \biguplus_{f\in\mathscr{I}(E,F)} C_f$$

En effet, si $(f,g) \in C$ alors $f \in \mathscr{I}(E,F)$ (cf. question 2) et donc $(f,g) \in C_f$. Réciproquement, tous les C_f sont inclus dans C par définition donc leur réunion aussi.

Montrons que la réunion est disjointe. Soit $(f,f') \in \mathscr{I}(E,F)^2$ tel que $f \neq f'$. Supposons par l'absurde que $C_f \cap C_{f'}$ soit non vide. Soit (u,v) dans l'intersection $C_f \cap C_{f'}$. On a alors $u = f = f'$ ce qui est contradictoire.

On en déduit que

$$|C| = \sum_{f \in \mathscr{I}(E,F)} |C_f|$$

Fixons f dans $\mathscr{I}(E,F)$. Calculons le cardinal de C_f. Pour cela, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & C_f & \longrightarrow & E^{F \setminus f(E)} \\ & (f,g) & \longmapsto & g_{|F \setminus f(E)} \end{array}$$

On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & E^{F \setminus f(E)} & \longrightarrow & C_f \\ & h & \longmapsto & (f,g) \end{array}$$

avec $g : F \to E$ définie par

$$g(y) = \begin{cases} \text{l'unique } x \text{ tel que } f(x) = y & \text{si } y \in f(E) \\ h(y) & \text{si } y \in F \setminus f(E) \end{cases}$$

(x est unique car $f \in \mathscr{I}(E,F)$). Par construction, $g \circ f = \mathrm{id}_E$. En effet, si $x \in E$ alors $g\big(f(x)\big) = x$ par définition de g. Donc ψ est bien à valeurs dans C_f.

Commentaires

Lorsqu'on considère le couple (f,g) de C_f, g est entièrement déterminée sur $f(E)$ car on a $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Pour tout $y = f(x)$ de l'image $f(E)$, on a nécessairement $g(y) = x$. Choisir $g \in C_f$ revient donc à choisir les images de $F \setminus f(E)$; cela revient à choisir une application quelconque de $F \setminus f(E)$ dans E. Donc $|C_f| = |E^{F \setminus f(E)}|$.

On a également, $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{C_f}$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{E^{F \setminus f(E)}}$ ce qui montre que ϕ est une bijection et donc que tous les C_f sont équipotents à $E^{F \setminus f(E)}$. On a donc

$$|C_f| = |E^{F \setminus f(E)}| = |E|^{|F \setminus f(E)|} = m^{n-m}$$

Commentaires

Comme f est injective, $|f(E)| = |E| = m$.

De la réunion disjointe décomposant C, on obtient

$$|C| = \sum_{f \in \mathscr{I}(E,F)} |C_f| = \sum_{f \in \mathscr{I}(E,F)} m^{n-m} = i_{n,m} m^{n-m}$$

4. Comme dans la question précédente, pour $g \in \mathscr{S}(E,F)$ fixé, on note
$$C_g := \{(f,g) \in E^F \times F^E \mid (f,g) \in C\}$$
la section « horizontale » de C. On a alors la réunion disjointe :
$$C = \biguplus_{g \in \mathscr{S}(E,F)} C_g$$
On a
$$|C| = \sum_{g \in \mathscr{S}(E,F)} |C_g|$$
$|C_g|$ est le nombre de $f \in F^E$ telles que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Se donner f revient à se donner le m-uplet $\big(f(x_1), \dots, f(x_m)\big)$ tel que $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $f(x_i) \in g^{-1}\big(\{x_i\}\big)$ (l'image réciproque de $\{x_i\}$). On a donc
$$|C_g| = \prod_{i=1}^{m} |g^{-1}\big(\{x_i\}\big)|$$
Or $\sum_{i=1}^m |g^{-1}\big(\{x_i\}\big)| = |F| = n$ car g est surjective. D'après l'indication, on a
$$\frac{1}{m} \ln\left(\prod_{i=1}^{m} |g^{-1}\big(\{x_i\}\big)|\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} |g^{-1}\big(\{x_i\}\big)|\right) = \ln\left(\frac{n}{m}\right)$$
D'où
$$\prod_{i=1}^{m} |g^{-1}\big(\{x_i\}\big)| \leqslant \mathrm{e}^{m \ln\left(\frac{n}{m}\right)} = \left(\frac{n}{m}\right)^m$$
On a donc
$$|C| \leqslant \sum_{g \in \mathscr{S}(E,F)} \left(\frac{n}{m}\right)^m = s_{n,m}\left(\frac{n}{m}\right)^m$$

> **Commentaires**
>
> L'inégalité
> $$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \ln(a_i) \leqslant \ln\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$$
> provient de la concavité du logarithme sur $]0,+\infty[$. L'inégalité de Jansen donne
> $$\sum_{i=1}^{m} t_i \ln(a_i) \leqslant \ln\left(t_i \sum_{i=1}^{m} a_i\right) \quad \text{pour tout } (t_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in \mathbf{R}_+^m \text{ tel que } \sum_{i=1}^{m} t_i = 1$$
> En choisissant $t_i = \frac{1}{m}$, on obtient l'inégalité de l'indication.

5. De 3 et 4, on déduit l'inégalité :
$$i_{m,n} m^{n-m} \leqslant s_{n,m}\left(\frac{n}{m}\right)^m \quad \Rightarrow \quad i_{m,n} m^n \leqslant s_{n,m} n^m \quad \Rightarrow \quad \frac{i_{m,n}}{n^m} \leqslant \frac{s_{n,m}}{n^m}$$
ce qui s'écrit :
$$\frac{|\mathscr{I}(E,F)|}{|F^E|} \leqslant \frac{|\mathscr{S}(E,F)|}{|E^F|}$$
La première fraction est la probabilité de tirer au hasard une application injective de E dans F (on utilise la formule d'équiprobabilité « nombre de cas favorables / nombres de cas possibles »). La seconde fraction est la probabilité de tirer au hasard une application surjective de F dans E.

Centrale

Oral n° 13 (Python)

Thème : racine n-ème de l'unité

Soit $n \geqslant 1$. On pose $\omega := \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $G_n := \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$.

1. Calculer G_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Pour $p \in \mathbf{Z}$, déterminer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{pk}$.
3. Créer une fonction `Gauss` qui prend en entrée la valeur n et renvoie G_n. Vérifier à partir d'elle le résultat de la question 1.
4. Vérifier la validité de la formule $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+p)^2}$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$.
5. Montrer que $G_5 = \sqrt{5}$. On pourra remarquer que, pour $n = 5$, le nombre $z := \omega + \omega^{-1}$ vérifie $z^2 + z - 1 = 0$.

1.
   - Pour $n = 1$, $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$. Donc $G_1 = 1^0 = 1$.
   - Pour $n = 2$, $\omega = \mathrm{e}^{i\pi} = -1$. Donc $G_2 = (-1)^0 + (-1)^1 = 0$.
   - Pour $n = 3$, $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = j$. Donc $G_3 = 1 + j + j^4 = 1 + 2j = \sqrt{3}\, i$.
   - Pour $n = 4$, $\omega = i$. Donc $G_4 = 1 + i + i^4 + i^9 = 1 + i + 1 + i = 2 + 2i$.
2. Soit $p \in \mathbf{Z}$. On a
$$\omega^p = 1 \iff \mathrm{e}^{\frac{2i\pi p}{n}} = 1 \iff \exists k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } p = kn$$
Supposons que p ne soit pas un multiple de n. On a
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k \overset{\omega^p \neq 1}{=} \frac{1 - (\omega^p)^n}{1 - \omega^p} = 0$$
car $(\omega^p)^n = \omega^{pn} = (\omega^n)^p = 1$.
Si p est un multiple de n,
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} \overset{\omega^p = 1}{=} n$$
Conclusion : on a
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin n\mathbf{Z} \\ n & \text{si } p \in n\mathbf{Z} \end{cases}$$
où $n\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des multiples de n.

3. Le programme suivant

```
import cmath
from math import *
I=1.j


def Gauss(n):
    omega=cos(2*pi/n)+I*sin(2*pi/n)
    S=0
    for k in range(n):
        S=S+omega**(k**2)
    return(S)

for n in range(1,5):
    print(Gauss(n))
```

donne les résultat :

```
1 (1+0j)
2 1.2246467991473532e-16j
3 (9.992007221626409e-16+1.7320508075688776j)
4 (2.0000000000000004+1.9999999999999998j)
```

ce qui compte tenu des erreurs d'arrondis est cohérent.

> **Commentaires**
>
> Rappelons que Python désigne le nombre complexe i par `j`.

4. Montrons par récurrence sur l'entier naturel p que $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+p)^2}$.

   - Pour $p = 0$, l'égalité est vraie par définition de G_n.
   - Supposons que l'égalité soit vraie à un rang p. On a par changement d'indice :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+p+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k+p)^2} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+p)^2}}_{=G_n} + \omega^{(n+p)^2} - \omega^{p^2} = G_n$$

   car $\omega^{(n+p)^2} = \omega^{n^2+2np}\omega^{p^2} = \omega^{p^2}$ car $n^2 + 2np = n(n + 2p)$ est un multiple de n. L'égalité est donc vraie au rang $p + 1$.

Montrons par une récurrence descendante sur l'entier négatif p que $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+p)^2}$.

   - Pour $p = 0$, l'égalité est vraie par définition de G_n.
   - Supposons que l'égalité soit vraie à un rang p. On a par changement d'indice :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+p-1)^2} = \sum_{k=-1}^{n-2} \omega^{(k+p)^2} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+p)^2}}_{=G_n} + \omega^{(p-1)^2} - \omega^{(n+p-1)^2} = G_n$$

   car $\omega^{(n+p-1)^2} = \omega^{(p-1)^2}\omega^{n^2+2n(p-1)} = \omega^{(p-1)^2}$ car $n^2 + 2n(p - 1)$ est un multiple de n. L'égalité est donc vraie au rang $p - 1$.

5. On a $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$ donc $\omega^5 = 1$. On en déduit que $\omega^4 = \omega^{-1}$, $\omega^9 = \omega^{-1}$ et $\omega^{16} = \omega$. On a donc
$$G_5 = 1 + \omega + \omega^4 + \omega^9 + \omega^{16} = 1 + \omega + \omega^{-1} + \omega^{-1} + \omega = 1 + 2z$$
avec $z = \omega + \omega^{-1} = \omega + \overline{\omega} = 2\mathfrak{Re}(\omega) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ car $1 = |\omega|^2 = \omega\overline{\omega}$ donc $\omega^{-1} = \overline{\omega}$. Comme $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $z > 0$.

   L'équation du second degré $z^2 + z - 1 = 0$ admet comme racines $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Comme $z > 0$, on a $z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Donc $G_5 = 1 + 2z = \sqrt{5}$.

Commentaires

Justifions que le réel $z = \omega + \omega^{-1}$ est solution de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$. On a
$$\begin{aligned} z^2 + z - 1 &= (\omega + \omega^{-1})^2 + \omega + \omega^{-1} - 1 = \omega^2 + 2 + \omega^{-2} + \omega + \omega^{-1} - 1 \\ &= \omega^2 + 2 + \omega^3 + \omega + \omega^4 - 1 = 0 \end{aligned}$$
car on sait que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

Mines-Télécom

Oral n° 14

Thème : équation dans $\mathbf{C}[X]$

On cherche tous les polynômes P vérifiant l'équation

$$(E) : P(X^2) = P(X-1)P(X)$$

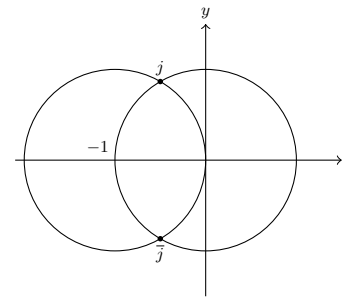
1. Montrer que si P est une solution non constante de l'équation alors ses racines sont de module 1.
2. Résoudre alors l'équation (E).

Commençons par remarquer que le polynôme nul vérifie (E) et que si $P = \lambda$ est un polynôme constant non nul vérifiant (E) alors $\lambda = \lambda^2$. Comme λ est non nul, $\lambda = 1$.

1. Soit P un polynôme non constant solution de l'équation (E). D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine complexe z.

   - Supposons que $z = 0$. Alors, d'après (E), pour $X = 1$, $P(1) = P(0)P(1) = 0$. Puis, pour $X = 2 = 2^1$, $P(2^2) = P(1)P(2) = 0$.
     On a alors $P(2^4) = P\big((2^2)^2\big) = P(3)P(4) = 0$. De proche en proche, on montre que les $2^{(2^n)}$ sont des racines de P donc P admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul mais P est non constant. On en déduit que la racine z n'est pas nulle.
   - Soit $z \in \mathbf{C}^*$. De l'équation (E), on tire que $P(z^2) = P(z-1)P(z) = 0$ donc z^2 est une racine de P. Puis, en remplaçant X par z^2, $P(z^4) = P(z^2-1)P(z^2) = 0$ donc z^4 est une racine de P. De proche en proche, on montre que les $z^{(2^n)}$ sont des racines de P. Comme les racines de P sont en nombre fini, il existe $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $n \neq m$ et $z^{(2^n)} = z^{(2^m)}$. En divisant par $z^{(2^m)}$ (qui est non nul car z est non nul) : $z^{(2^n - 2^m)} = 1$. Posons $p = 2^n - 2^m$ et supposons par exemple $n > m$, p est alors un entier naturel non nul et $z^p = 1$. Donc en passant en module, $|z| = 1$. (On a même montré que z est une racine p-ème de l'unité.)

2. • Soit P un polynôme non constant solution de l'équation (E). Soit z une racine de P. Comme
$$P\big((z+1)^2\big) = P(z)P(z+1) = 0,$$
$(z+1)^2$ est également une racine de P. Donc, d'après la question 1, $|z+1|^2 = 1$ puis $|z+1| = 1$.
On en déduit que z vérifie
$$\begin{cases} |z| & = 1 \\ |z+1| & = 1 \end{cases}$$
c'est-à-dire z appartient à l'intersection du cercle unité et du cercle de rayon 1 de centre $(-1,0)$. On a donc que $z = j$ ou $z = \overline{j}$ avec
$$j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



P est donc de la forme
$$P(X) = \lambda(X-j)^a(X-\overline{j})^b$$
avec $(a,b) \in \mathbf{N}^2$.
Le coefficient dominant est nécessairement égal à 1 car le monôme de plus haut degré de $P(X^2)$ est du type $\lambda X^{2(a+b)}$ et celui de $P(X-1)P(X)$ est $\lambda^2 X^{2(a+b)}$ donc $\lambda = \lambda^2$ c'est-à-dire $\lambda = 1$.

• Réciproquement, soit $P = (X-j)^a(X-\overline{j})^b$. On a alors
$$P(X^2) = (X^2-j)^a(X^2-\overline{j})^b = (X^2-\overline{j}^2)^a(X^2-j^2)^b = (X-\overline{j})^a(X+\overline{j})^a(X-j)^b(X+j)^b$$
Comme $1+j = -\overline{j}$, on a
$$\begin{aligned} P(X)P(X-1) &= (X-j)^a(X-\overline{j})^b\big(X-(1+j)\big)^a\big(X-(1+\overline{j})\big)^b \\ &= (X-j)^a(X-\overline{j})^b(X+\overline{j})^a(X+j)^b. \end{aligned}$$
On a donc
$$(X-\overline{j})^a(X+\overline{j})^a(X-j)^b(X+j)^b = (X-j)^a(X-\overline{j})^b(X+\overline{j})^a(X+j)^b$$
Par unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles, $a = b$.

Les solutions du problème sont le polynôme nul et les polynômes du type
$$(X-j)^a(X-\overline{j})^a = (X^2+X+1)^a$$
avec $a \in \mathbf{N}$.

(Remarquons que si $a = 0$ alors on obtient le polynôme constant en 1.)