

François Liret, Dominique Martinais

Analyse

1^{re} année

3^e ÉDITION

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture :
Nicolas Wiel et Elizabeth Riba (Graphiste)

© Dunod, 1997, 2003, 2020, 2025
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-088472-8

Préface

Pourquoi publier un nouveau manuel ? Après tout, au cours des dix et même des vingt dernières années les programmes ont peu changé : tout au plus un chapitre un peu marginal se trouve-t-il parfois ajouté, parfois supprimé. Dans l'ensemble ce que doivent, ce que peuvent apprendre étudiantes et étudiants durant leurs deux premières années à l'université demeure à peu près stable.

Mais tout le reste est profondément modifié. La société d'aujourd'hui ne ressemble plus à celle d'hier, les lycées et leurs élèves ont changé, et aussi leurs professeurs. L'enseignement dans les universités lui non plus n'est pas resté figé.

Cette évolution, d'ailleurs preuve de vitalité, doit se traduire aussi dans les ouvrages proposés à celles et ceux qui abordent maintenant les études universitaires : le public d'aujourd'hui mérite des livres qui ont été écrits pour lui, par des auteurs qui ont suivi et qui ont compris son évolution.

Telle est l'ambition de cette collection de premier cycle de mathématiques confiée à François Liret et Dominique Martinais qui apporte à ses lecteurs non seulement une présentation impeccable plaisante à l'œil et donc facile à lire, mais surtout le fruit d'années d'expérience et de réflexion sur la manière de rédiger un texte scientifique, sur l'importance respective de la présentation des *outils* qu'ils devront apprendre à manier, des *démonstrations* qui sont l'âme des mathématiques et des *explications* indispensables à la compréhension de celles-ci. Le cours est illustré d'exemples et d'exercices judicieux, qui apporte aux lecteurs tout ce qui leur est nécessaire pour réussir pleinement leurs études.

Michel Zisman

Professeur émérite de l'université Paris 7 - Denis Diderot

Table des matières

Chapitre 1. Nombres réels et fonctions

1. Opérations sur les nombres réels	2
2. Fonction numérique de variable réelle	7
Exercices	14

Chapitre 2. Limite et continuité

1. Limite d'une fonction	19
2. Propriétés des limites et opérations	24
3. Fonctions continues	31
Exercices	34

Chapitre 3. Les suites

1. Limite d'une suite	39
2. Théorèmes sur les limites	40
3. Des exemples importants	44
Exercices	49

Chapitre 4. Borne supérieure

1. La propriété des segments emboîtés	55
2. Suites et fonctions croissantes	62
3. Suites récurrentes	66
Exercices	71

Chapitre 5. Fonctions continues sur un intervalle

1. Image d'un intervalle	77
2. Image d'un segment	81
3. Fonctions monotones	83
Exercices	87

Chapitre 6. Dérivée d'une fonction

1. Dérivée en un point et fonction dérivée	93
2. Dérivée à gauche, dérivée à droite	95
3. Calcul des dérivées	96
4. Dérivées successives	101
Exercices	102

Chapitre 7. Utilisation de la dérivée

1. Extremum local d'une fonction	107
2. Le théorème des accroissements finis	110
3. Fonction convexe	114
4. Équations différentielles linéaires à coefficients constants	117
Exercices	121

Chapitre 8. Fonctions usuelles

1. Fonctions logarithme, puissance et exponentielle	127
2. Croissances comparées	133
3. Fonctions trigonométriques réciproques	136
4. Fonctions hyperboliques	140
Exercices	145

Chapitre 9. L'intégrale

1. Intégrale d'une fonction étagée	151
2. Fonction intégrable	154
3. Propriétés de l'intégrale	156
Exercices	164

Chapitre 10. Primitives

1. Primitives d'une fonction	167
2. Primitives usuelles	171
3. Intégration par parties	173
4. Changement de variable	174
5. Primitive d'une fonction rationnelle	177
6. D'autres calculs de primitives	181
Exercices	184

Chapitre 11. Utilisation des dérivées successives

1. Fonction de classe C^p	191
2. Un exemple de fonction de classe C^∞	193
3. Formules de Taylor	196
Exercices	202

Chapitre 12. Développements limités

1. Un exemple	207
2. Notion de développement limité	208
3. Développement limité des fonctions de classe C^n	212
4. Développement limité au point 0 des fonctions usuelles	215
5. Deux exemples garde-fou	218
Exercices	220

Chapitre 13. Le calcul des développements limités

1. Développement limité d'une somme et du produit par un nombre	223
2. Tronquer un polynôme	225
3. Développement limité d'un produit	226
4. Développement limité d'une composée	227
5. Calcul pratique du développement limité d'un quotient	231
6. Quelques cas particuliers	233
7. Applications des développements limités	233
Exercices	237

Chapitre 14. Étude de fonctions

1. Sens de variation	243
2. Étude locale en un point	243
3. Branche infinie et asymptote	248
4. Représentation graphique	251
5. Un exemple d'étude de fonction	251
Exercices	255

Chapitre 15. Courbes paramétrées

1. Limite, continuité et dérivée d'une fonction vectorielle	263
2. Courbe paramétrée	265
3. Plan d'étude d'une courbe paramétrée	272
4. Un exemple d'étude de courbe paramétrée	274
5. Longueur d'un arc paramétré	276
Exercices	280

Chapitre 16.	Étude de primitives	
1. Un exemple		285
2. Intégrales impropres		288
3. Des théorèmes de convergence		292
4. Fonctions équivalentes		296
5. Comment étudier une fonction primitive		300
Exercices		303
 Chapitre 17.	 Équations différentielles	
1. Notion d'équation différentielle		309
2. Équations différentielles linéaires		311
3. Équations différentielles à variables séparées		316
4. Équations différentielles autonomes		321
Exercices		327
 Chapitre 18.	 Méthodes numériques	
1. Interpolation par des fonctions splines cubiques		333
2. Résolution d'équations		339
3. Calcul approché d'intégrales		347
4. Résolution numérique d'équations différentielles		353
Exercices		361
 Quelques repères historiques		365
Index		369

Avant-Propos

Nous avons voulu que ce cours de première année reste élémentaire et que les résultats en soient démontrés soigneusement. L'exposé est en général très détaillé : nous espérons qu'il permettra aux étudiants d'apprendre à raisonner. Nous avons également tenu à présenter les algorithmes de calcul qu'il est nécessaire de pratiquer et à mettre en évidence des conseils pour chercher les exercices. Lorsque dans le texte, l'un des mots théorème, proposition ou corollaire est souligné, c'est qu'il s'agit d'un énoncé important.

Puisse ce manuel aider les étudiants dans leur apprentissage des mathématiques.

Nous devons un grand merci à Michel Zisman qui nous a patiemment relus et dont les conseils et nombreuses suggestions nous ont été très utiles. Merci également à Alberto Arabia qui a mis son talent et sa compétence en informatique au service de la mise en page. Enfin nous remercions Anne Bourguignon qui s'est chargée avec efficacité de l'édition de ce livre.

Les auteurs

Pour cette nouvelle édition, nous avons ajouté un chapitre de méthodes numériques où nous présentons quelques méthodes classiques pour interpoler des points et faire des calculs approchés de solutions d'équations numériques, d'intégrales ou de solutions d'équations différentielles. Les programmes y sont écrits en Python de manière élémentaire.

Nous remercions de nouveau Alberto Arabia qui a soigné la présentation du texte et la lisibilité des figures.

Quelques lettres grecques employées en mathématiques

α	alpha	ε	epsilon	λ, Λ	lambda	σ, Σ	sigma
β	bêta	ζ	zêta	μ	mu	φ, Φ	phi
γ, Γ	gamma	η	êta	π, Π	pi	ψ, Ψ	psi
δ, Δ	delta	θ	thêta	ρ	rho	ω, Ω	oméga

Principales notations utilisées

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$[a, b],]a, +\infty[, \text{ etc }$	intervalles de $\mathbb{R}$
$f : A \rightarrow B$	application d'un ensemble A dans un ensemble B
f^{-1}	bijection réciproque de la bijection f
$\sup A, \inf A$	borne supérieure, borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$
$E(x)$	partie entière du nombre réel x
$ x $	valeur absolue du nombre réel x
$ z $	module du nombre complexe z
$\sqrt{x}, \sqrt[n]{x}$	racine carrée, racine n -ième du nombre réel x
Log	fonction logarithme (népérien)
$\exp$	fonction exponentielle
e	nombre $\exp(1)$
$\sin, \cos, \text{tg}$	fonctions sinus, cosinus, tangente
$\text{Arc sin}, \text{Arc cos}, \text{Arc tg}$	fonctions arc sinus, arc cosinus, arc tangente
$\text{sh}, \text{ch}, \text{th}$	fonctions sinus, cosinus, tangente hyperbolique
(u_n)	suite de terme général u_n
$\lim u_n$	limite de la suite (u_n)
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	limite, à droite, à gauche, de $f(x)$ quand x tend vers x_0
$f', f'', f^{(n)}$	dérivée de f , dérivée seconde, dérivée n -ième
f'_g, f'_d	dérivée à gauche de f , dérivée à droite
$\int_a^b f(t) dt$	intégrale ou intégrale impropre de a à b de la fonction f
$\int f(t) dt$	une primitive de la fonction f
$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$	$f(x)$ et $g(x)$ sont équivalents quand x tend vers x_0

Chapitre 1

Nombres réels et fonctions

Au Lycée, vous avez rencontré les nombres réels sous des formes différentes. Voici des exemples de nombres réels.

- Les entiers naturels et les entiers relatifs.
- Les nombres décimaux $a10^n$ où a et n sont des entiers relatifs ; ainsi 3×10^{-5} et -417×10^4 sont des nombres décimaux.
- Les nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier positif. Un nombre décimal est en particulier rationnel.
- Les nombres définis par leur *développement décimal*, comme $31,22\dots$, où les trois points indiquent que toutes les décimales valent 2. Un autre exemple est $-4,78612121\dots$, où les trois points indiquent que la suite des décimales continue « comme indiquée », c'est-à-dire en écrivant les chiffres 1 et 2 alternativement. Bien sûr, on ne voit en général sur les premières décimales aucune loi permettant de deviner les suivantes. Bientôt, nous comprendrons pourquoi un développement décimal définit un nombre réel. Pour le moment, remarquons que le développement d'un nombre décimal se termine par des zéros : $3158 \times 10^{-2} = 31,5800\dots$. Et réciproquement, si un développement décimal se termine par des zéros, alors le nombre est décimal.
- Les nombres définis par des opérations à partir d'autres nombres réels, par exemple $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt[3]{-7}$ ou $(1-3^{-n})^{2^n}$.
- Des nombres particuliers, utiles en Mathématiques, qui bénéficient pour cela d'une notation spéciale : citons le nombre e , base du logarithme népérien et le nombre π qui est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

1. Opérations sur les nombres réels

L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$. On peut ajouter, soustraire ou multiplier des nombres réels et diviser par un nombre réel différent de 0. Les règles de calcul sont celles que vous avez toujours pratiquées :

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, \quad 0 + a = a, \quad a + b = 0 \iff a = -b, \quad a + (b + c) = (a + b) + c \\ ab &= ba, \quad 1 \times a = a, \quad ab = 1 \iff a = 1/b, \quad a(bc) = (ab)c, \quad a(b + c) = ab + ac \\ ab &= 0 \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0). \end{aligned}$$

L'ordre sur $\mathbb{R}$

Tout nombre réel différent de 0 est positif ou négatif ; on note parfois $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nul. Si a et b sont des nombres réels, on dit que a est inférieur ou égal à b si le nombre $b - a$ est positif ou nul ; cette relation se note $a \leq b$ ou bien $b \geq a$.

Si $a \leq b$ et $a \neq b$, on dit que a est strictement plus petit que b , ce qui se note $a < b$ ou encore $b > a$.

Ainsi, une et une seule des relations suivantes est vérifiée :

$$a = b, \quad a < b \quad \text{ou} \quad a > b.$$

On définit le plus grand des nombres réels a et b en posant

$$\max(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } b \geq a \\ a & \text{si } a > b. \end{cases}$$

On définit de même $\min(a, b)$, le plus petit des nombres a et b .

Rappelons quelques unes des opérations permises sur les inégalités :

- $a < b \iff a + c < b + c$ pour tout nombre réel c
- si $a < b$ et $a' \leq b'$, alors $a + a' < b + b'$
- $a < b \iff -b < -a$
- si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$

et la propriété fondamentale (dite d'Archimède) :

- si A est un nombre réel positif ou nul, il existe un entier n tel que $n > A$.

Voici une conséquence importante de la propriété d'Archimède :

$$\text{si } a > 0 \text{ et } A \geq 0, \text{ il existe un entier } n \geq 1 \text{ tel que } \frac{A}{n} < a.$$

En effet, puisqu'on a $A/a \geq 0$, il existe un entier n tel que $n > A/a$ donc $n > 0$. En multipliant cette inégalité par a qui est positif, il vient $na > A$ ou encore $A/n < a$.

On en déduit aussi la proposition suivante.

Proposition. Soit a un nombre réel strictement positif et soit x un nombre réel. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ka \leq x < (k+1)a$.

Démonstration. Supposons $x \geq 0$. Puisque a est strictement positif, le nombre réel x/a est positif ou nul. D'après la propriété d'Archimède, il existe donc au moins un entier $n \geq 1$ tel que $n > x/a$. Si p est un entier naturel tel que $p \leq x/a$, alors on a $0 \leq p < n$; il n'y a donc qu'un nombre fini d'entiers naturels inférieurs ou égaux à x/a . Si nous appelons k le plus grand de ces entiers, alors les deux inégalités $k \leq x/a$ et $k+1 > x/a$ sont vérifiées. En multipliant celles-ci par le nombre positif a , il vient $ka \leq x < (k+1)a$.

Supposons $x < 0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $-n > -x/a$ c'est-à-dire $n < x/a$. Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p tels que $n \leq p \leq x/a$. En appelant k le plus grand de ces entiers, nous avons $k \leq x/a$ et $k+1 > x/a$, c'est-à-dire $ka \leq x < (k+1)a$.

Nous avons démontré qu'il existe au moins un entier $k \in \mathbb{Z}$ qui vérifie l'encadrement de la proposition. Montrons maintenant que cet entier k est unique. Supposons que ℓ est un entier vérifiant aussi les inégalités $\ell a \leq x < (\ell+1)a$. Nous avons $\ell a \leq x < (k+1)a$ donc en simplifiant par a qui est strictement positif, il vient $\ell < k+1$. Puisque k et ℓ sont des entiers, on en déduit $\ell \leq k$. De même, les inégalités $ka \leq x < (\ell+1)a$ impliquent $k < \ell+1$ donc $k \leq \ell$. Ainsi nous avons $\ell = k$ et cela montre l'unicité de l'entier k vérifiant les inégalités $ka \leq x < (k+1)a$. ■

Appliquons la proposition en choisissant $a = 1$: pour tout nombre réel x , il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$. L'entier k est le plus grand entier inférieur ou égal à x . Cela justifie la définition suivante.

Définition

Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la *partie entière* de x ; nous le noterons $E(x)$.

Par définition, $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

On a par exemple

$$(E(x) = 0 \iff 0 \leq x < 1) \text{ et } (E(x) = -3 \iff -3 \leq x < -2).$$

Définitions

Soient a et b des nombres réels.

- Si $a \leq b$, le *segment* $[a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.
- On définit des *intervalles ouverts* :
 - si $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.
 - l'intervalle $]a, +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.
 - l'intervalle $]-\infty, a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.
 - $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
- Si $a < b$, l'intervalle $]a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$ et l'intervalle $[a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.
- Les intervalles $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont formés respectivement des nombres réels x tels que $x \geq a$ et $x \leq a$.

Si $a < b$, les nombres a et b s'appellent les *extrémités* des intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b[$; le nombre positif $b - a$ s'appelle la *longueur* de l'intervalle ; le *centre*, ou le *milieu* de l'intervalle, est le nombre $c = (a + b)/2$; on a $c - a = b - c = (b - a)/2 > 0$, donc c appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Enfin, nous dirons qu'un nombre réel x est *compris entre* a et b si l'on a ($a \leq b$ et $a \leq x \leq b$) ou bien si l'on a ($b \leq a$ et $b \leq x \leq a$).

Remarquons que le segment $[a, a]$ est l'ensemble $\{a\}$ dont le seul élément est a .

Voici deux propriétés importantes des intervalles.

Proposition. Soit I un intervalle.

- Si x et y sont des éléments de I tels que $x < y$, alors on a $[x, y] \subset I$.
- Si I est un intervalle ouvert, alors pour tout nombre $x \in I$, il existe un intervalle ouvert de centre x contenu dans I .

Démonstration. Faisons la démonstration dans le cas où I possède des extrémités a et b ; les autres cas sont plus simples. Soient x et y des éléments de I tels que $x < y$ et soit $z \in]x, y[$. On a $a \leq x$, $x < z < y$ et $y \leq b$ donc aussi $a < z < b$. Ainsi z appartient à l'intervalle $]a, b[$. Puisque $]a, b[$ est inclus dans I , cela entraîne que z appartient à I . Il s'ensuit $]x, y[\subset I$, d'où $[x, y] \subset I$ car x et y appartiennent à I .

Supposons par exemple $I =]a, b[$ et $x \in I$. Les nombres $b - x$ et $x - a$ sont strictement positifs. Notons r le plus petit de ces nombres, de sorte qu'on a $r > 0$ et $a \leq x - r < x + r \leq b$. Quel que soit le nombre z appartenant à $]x - r, x + r[$, nous avons $a \leq x - r < z < x + r \leq b$ donc $a < z < b$, c'est-à-dire $z \in I$. L'intervalle ouvert $]x - r, x + r[$ est donc contenu dans I . Les dessins ci-dessous permettent de visualiser ce raisonnement.



Lemme. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et soit s un nombre réel tel que $0 < s < b - a$. Il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ns \in]a, b[$.

Démonstration. Soit p la partie entière de a/s . Par définition, p est un entier et vérifie $p \leq a/s < p + 1$, donc on a $ps \leq a < (p + 1)s$ car s est positif. On a $(p + 1)s = ps + s \leq a + s < a + (b - a) = b$ donc il vient $a < (p + 1)s < b$. L'entier $n = p + 1$ vérifie donc la conclusion du lemme. ■

Proposition. Dans tout intervalle ouvert non vide, il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.

Démonstration. Puisque tout intervalle ouvert contient un intervalle $]a, b[$ où a et b sont des nombres réels tels que $a < b$, il suffit de faire la démonstration pour un intervalle $]a, b[$. Soit A un nombre réel strictement positif. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $q \geq 1$ tel que $A/q < b - a$. D'après le lemme, il existe un entier p tel que $p(A/q) \in]a, b[$. En choisissant $A = 1$, on trouve que le nombre rationnel p/q appartient à $]a, b[$.

Nous venons de montrer que tout intervalle ouvert non vide contient au moins un nombre rationnel. Appliquons cela à l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$: il existe un nombre rationnel r tel que $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$. On a donc $a < r + \sqrt{2} < b$, autrement dit $r + \sqrt{2} \in]a, b[$. On sait que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel (voir le chapitre 9 du tome d'algèbre), donc $r + \sqrt{2}$ est irrationnel (sinon, $(r + \sqrt{2}) - r = \sqrt{2}$ serait rationnel). L'intervalle $]a, b[$ contient donc au moins un nombre irrationnel.

Pour tout entier $N \geq 1$, montrons que l'intervalle $]a, b[$ contient au moins N nombres rationnels et N nombres irrationnels. Pour cela, posons $\ell = b - a$ et partageons l'intervalle $]a, b[$ en N intervalles de longueur ℓ/N :

$$\left] a, a + \frac{\ell}{N} \right[, \quad \left] a + \frac{\ell}{N}, a + \frac{2\ell}{N} \right[, \quad \dots , \quad \left] a + \frac{(N-1)\ell}{N}, b \right[.$$

Dans chacun de ces intervalles, il y a au moins un nombre rationnel et un nombre irrationnel, et ces intervalles sont disjoints deux-à-deux ; il y a donc au moins N nombres rationnels et N nombres irrationnels dans l'intervalle $]a, b[$. Nous avons montré que, pour tout entier $N \geq 1$, l'intervalle $]a, b[$ contient au moins N nombres rationnels et N nombres irrationnels. Cela étant vrai quel que soit l'entier N , l'intervalle $]a, b[$ contient une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels. ■

Majorant, minorant

Définitions

Soit A une partie non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$. On dit que

- A est *majorée* s'il existe un nombre réel M tel que $x \leq M$ quel que soit $x \in A$; un tel nombre M s'appelle un *majorant* de A ;
- A est *minorée* s'il existe un nombre réel m tel que $m \leq x$ quel que soit $x \in A$; un tel nombre m s'appelle un *minorant* de A ;
- A est *bornée* si A est majorée et minorée.

Exemples

- Un intervalle $[a, +\infty[$ est minoré (par exemple, a et $a - 1$ sont des minorants). Les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b]$ sont bornés : ils sont en effet minorés par a et majorés par b .
- Si M est un majorant de A , tout nombre réel $M' \geq M$ est aussi un majorant de A . De même, si m est un minorant de A et si l'on a $m' \leq m$, alors m' est un minorant de A .
- L'ensemble $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{n}{n+1} \right\}$ est borné : en effet, nous avons $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$, donc 0 est un minorant de A et 1 est un majorant de A .
- L'ensemble $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = n^2 - n \right\}$ est minoré et non majoré. Montrons que A est minoré par 0 : pour tout entier $n \geq 2$, le nombre $n^2 - n = n(n-1)$ est strictement positif et l'on a $n(n-1) = 0$ si $n = 0$ ou si $n = 1$; on en déduit que l'on a $x \geq 0$ quel que soit $x \in A$. Montrons que A n'est pas majoré. Soit M un nombre réel. Par la propriété d'Archimède, il existe un entier $n \geq 2$ tel que $n > M$. Puisque $n(n-1) \geq n$, nous avons aussi $n(n-1) > M$. Ainsi $n^2 - n \in A$ et $n^2 - n > M$, donc M n'est pas un majorant de A . Nous avons ainsi montré qu'aucun nombre réel ne peut être majorant de A .

2. Fonction numérique de variable réelle

En analyse, on s'intéresse en premier lieu aux applications $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est une partie de $\mathbb{R}$, en général un intervalle ou une réunion d'intervalles. Une telle application s'appelle une *fonction* et l'ensemble U est son *domaine de définition*.

Lorsque nous considérerons une fonction définie sur un intervalle I , il sera sous-entendu que I n'est pas un segment $[a, a]$ réduit à un seul élément.

Si la fonction f est définie par une formule, il nous arrivera de ne pas indiquer l'ensemble de départ : celui-ci sera « la plus grande » partie de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) où la formule qui définit f a un sens.

Ainsi l'expression « la fonction $x \mapsto x^2$ » désigne précisément l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ pour tout nombre réel x .

De même, la fonction $x \mapsto 1/x$ est l'application $f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ pour tout nombre réel $x \neq 0$.

Les opérations et relations entre nombres réels s'étendent aux fonctions de façon naturelle. Voici les définitions qui seront utiles dans la suite du cours.

Définitions

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions définies sur le même ensemble de départ U . On définit

- la fonction *somme* $f + g : U \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout nombre réel λ , la fonction $\lambda f : U \rightarrow \mathbb{R}$, en posant $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in U$,
- la fonction *produit* $fg : U \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \in U$.

On dit que f est *inférieure ou égal* à g , et l'on note $f \leq g$, si l'on a $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in U$. On définit de même la relation *supérieure ou égale*.

Définitions

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit V une partie non vide de U .

- La fonction f est *positive ou nulle* sur V si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in V$.
- La fonction f est *strictement positive* sur V si $f(x) > 0$ pour tout $x \in V$.

On définit de même une fonction *négative ou nulle* sur V et une fonction *strictement négative* sur V .

S'il existe un nombre a tel que $f(x) = a$ pour tout $x \in V$, on dit que f est *constante* sur V . Si $a = 0$, on dit que f est *nulle* sur V ; si de plus $U = V$, on dit simplement que f est constante de valeur a et que f est nulle si $a = 0$.

Définitions

- Soit U une partie de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in U$, on ait $-x \in U$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que
 - f est *paire* si l'on a $f(-x) = f(x)$ quel que soit $x \in U$,
 - f est *impaire* si l'on a $f(-x) = -f(x)$ quel que soit $x \in U$.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit T un nombre réel strictement positif. On dit que f est *T -périodique*, ou *périodique de période T* , si $f(x + T) = f(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Exemples

- La fonction exponentielle, que l'on note $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement positive, car pour tout nombre réel x , on a $\exp(x) > 0$.
- Deux fonctions ne sont pas toujours comparables pour la relation d'inégalité. Ainsi pour les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$, aucune des relations $f \leq g$ ou $g \leq f$ n'est vraie ; en effet, on a $g(1/2) = 1/4 < 1/2 = f(1/2)$ et $g(2) = 4 > 2 = f(2)$: il n'est donc pas vrai que l'on a $g(x) \geq f(x)$ quelque soit x et il n'est pas vrai non plus que l'on a $g(x) \leq f(x)$ quelque soit x .
- Définissons les fonctions $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^3 \leq x^2 \leq x$, autrement dit on a $h \leq g \leq f$.
- La fonction $x \mapsto 2\cos^2 x - \cos 2x$ est constante de valeur 1 : cela résulte de la formule de trigonométrie $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.
- La fonction cosinus est paire et 2π -périodique. Puisque $\sin(x + \pi) = -\sin x$, la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est π -périodique. La fonction $x \mapsto \sin(2x/3)$ est impaire et 3π -périodique.

Définitions

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit V une partie non vide de U . On dit que

- f est *croissante sur V* si pour tous x et y appartenant à V , on a
$$x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$$
- f est *strictement croissante sur V* si pour tous x et y appartenant à V , on a
$$x > y \implies f(x) > f(y)$$
- f est *décroissante sur V* si pour tous x et y appartenant à V , on a
$$x \geq y \implies f(x) \leq f(y).$$

On définit de même une fonction *strictement décroissante sur V* . On dit que f est *monotone sur V* si f est croissante ou décroissante sur V , *strictement monotone* sur V si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur V .

Si une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est (par exemple) croissante sur U , on dit simplement qu'elle est croissante.

Remarquons qu'une fonction f est croissante si et seulement si $-f$ est décroissante et qu'une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante.

La proposition suivante est simple et commode.

Proposition. Soient f et g des fonctions.

- Si f et g sont croissantes sur U , la somme $f + g$ est croissante sur U .
- Supposons que f et g sont positives ou nulles sur U . Si f et g sont croissantes sur U , alors leur produit fg est croissante sur U .
- Si f et g sont toutes deux croissantes ou bien toutes deux décroissantes, alors leur composée, si elle existe, est croissante. Si l'une des fonctions f ou g est croissante et l'autre décroissante, la composée est décroissante.

Démonstration. Les deux premières affirmations résultent des définitions et des règles de calcul sur les inégalités. Démontrons l'affirmation concernant la composée de deux fonctions croissantes. Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions croissantes telles que la composée $g \circ f$ existe. Si x et y sont des éléments de U tels que $x \geq y$, on a $f(x) \geq f(y)$ car f est croissante. Puisque l'application composée $g \circ f$ existe, c'est que l'on a l'inclusion $f(U) \subset W$, donc $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à W . Comme g est croissante, on en déduit $g(f(x)) \geq g(f(y))$ c'est-à-dire, par définition de la fonction $g \circ f$, $g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$. Nous avons ainsi montré que pour tous éléments x et y appartenant à U , on a l'implication $(x \geq y \implies g \circ f(x) \geq g \circ f(y))$. L'application $g \circ f$ est donc croissante. La démonstration est tout à fait semblable pour la composée de deux fonctions décroissantes ou la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. ■

Exemples

- La fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Si x et y sont des nombres tels que $x < y < 0$, alors en divisant par le produit xy qui est positif, il vient $1/y < 1/x$: la fonction $x \mapsto 1/x$ est donc aussi strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.
- Soit f une fonction strictement positive. Si f est croissante, alors la fonction $1/f$, qui à x associe $1/f(x)$, est décroissante : posons en effet, $u(x) = 1/x$. Puisqu'on a $f(x) \in]0, +\infty[$ pour tout x , la composée $u \circ f$ est définie et l'on a $1/f(x) = (u \circ f)(x)$. La fonction u étant décroissante sur $]0, +\infty[$, la composée $u \circ f$ est décroissante si f est croissante.
Si f est décroissante, alors la fonction $1/f$ est croissante. On a les mêmes résultats pour une fonction f strictement négative.
- La fonction racine carrée $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, notée $x \mapsto \sqrt{x}$, est strictement croissante.