Jean-Charles Craveur

Modélisation par éléments finis

4e ÉDITION

DUNOD

Graphisme de couverture : Élisabeth Riba
Illustration de couverture : forest095/shutterstock.com

© Dunod, 2022
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084943-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos **IX**

1 Rappels de mécanique **1**

1.1 Vecteur des contraintes 1
1.2 Matrice des contraintes 3
1.3 Équations d'équilibre 4
1.4 Tenseur des déformations 9
1.5 Relations Contraintes-Déformations 10
1.6 Limite élastique, contrainte équivalente 12

2 Méthode des déplacements **15**

2.1 Treillis 15
2.2 Résolution RDM classique 16
2.3 Résolution RDM matricielle 16
2.4 Matrice de raideur d'une barre 18
2.5 Assemblage des matrices élémentaires 22
2.6 Traitement des conditions aux limites 23
2.7 Inversion du système linéaire 28
2.8 Staticité des structures 31
2.9 Calcul des contraintes 32
2.10 RDM matricielle et éléments finis 33

3 Méthodes d'approximation **35**

3.1 Résidus pondérés 35
3.2 Méthodes variationnelles 39
3.3 Exemple 40
3.4 Principe des travaux virtuels 43

4 Formulation d'un élément **45**

4.1 Fonctions d'interpolation 45
4.2 Propriétés des fonctions d'interpolation 46
4.3 Exemple simple de détermination 47
4.4 Famille de Lagrange 48
4.5 Famille de Serendip 50
4.6 Éléments isoparamétriques 52

4.7 Intégration numérique 54
4.8 Modes cinématiques parasites 58
4.9 Nœuds et points d'intégration 59
5 Analyse statique linéaire 61
5.1 Mécanique linéaire 61
5.2 Linéarité matérielle 62
5.3 Linéarité géométrique 62
5.4 Conditions aux limites bilatérales 66
5.5 Calcul statique linéaire et validation 67
5.6 Pivots nuls et pivots négatifs 70
6 Contraintes 73
6.1 Discrétisation et charges réparties 73
6.2 Contraintes 74
6.3 Contraintes moyennes 74
6.4 Contraintes extrapolées 75
6.5 Exemples 77
6.6 Compléments 79
7 Éléments de barre 85
7.1 Comportement de barre 85
7.2 Élément fini de barre 86
7.3 Barre du premier degré, non isoparamétrique 87
7.4 Barre du premier degré, isoparamétrique 88
7.5 Barre du second degré, isoparamétrique 89
7.6 Treillis de barres 91
7.7 Compléments 94
8 Éléments de membrane 97
8.1 EPC et comportement membranaire 97
8.2 Éléments finis de membrane 99
8.3 Construction d'éléments de membrane 100
8.4 Membranes du second degré 104
8.5 Premier exemple 104
8.6 Deuxième exemple 105
8.7 Triangle, quadrangle 110
8.8 Formulation état plan de déformation (EPD) 112
9 Éléments de volume 115
9.1 Généralités 115
9.2 Éléments finis de volume 115
9.3 Élancement 118
9.4 Contraintes de peau 119

9.5 Contact et héxaèdres 120
9.6 Premier exemple 121
9.7 Second exemple 124
10 Éléments de poutre 129
10.1 Comportement de poutre 129
10.2 Élément fini de poutre 130
10.3 Élément fini de poutre de Bernoulli 132
10.4 Élément fini de poutre de Timoshenko 134
10.5 Élément fini de poutre universelle 135
10.6 Modélisation 136
10.7 Post-traitement 138
11 Éléments de plaque et de coque 141
11.1 Introduction 141
11.2 Hypothèses de la théorie des plaques 141
11.3 Relations cinématiques 145
11.4 Relations moments-courbures 146
11.5 Éléments finis de plaque 148
11.6 Coques 151
11.7 Connexion des coques 153
11.8 Coques gauches 154
11.9 Triangle, quadrangle, contraintes 154
11.10 Compléments 159
12 Éléments axisymétriques 163
12.1 Modélisation axisymétrique 163
12.2 Éléments finis axisymétriques 164
12.3 Élément triangulaire du premier degré 166
12.4 Chargement d'un élément axisymétrique 167
12.5 Premier exemple 168
12.6 Deuxième exemple 169
12.7 Compléments 171
13 Outils de maillage 173
13.1 Introduction 173
13.2 Mailleur 1D 173
13.3 Mailleurs 2D 174
13.4 Mailleurs surfaciques en 3D 178
13.5 Mailleurs 3D 180
13.6 Lissage, recombinaison 183
13.7 Vérifications 184
13.8 Compléments 185

14 Analyse modale **189**
14.1 Présentation 189
14.2 Modes propres et fréquences propres 190
14.3 Orthogonalité des modes propres 191
14.4 Modes rigides 193
14.5 Masse effective 194
14.6 Matrices de masse 195
14.7 Poutres et coques 198
14.8 Assemblage de la matrice de masse 199
14.9 Résolution du problème aux valeurs propres 199
14.10 Pivots en analyse modale 205
14.11 Influence de la température 205
14.12 Compléments 206
15 Réponse dynamique **211**
15.1 Généralités 211
15.2 Amortissement structural 212
15.3 Transitoire par superposition modale 212
15.4 Transitoire par intégration directe 220
15.5 Réponse harmonique 227
15.6 Excitation d'ensemble, excitation locale 231
16 Précontrainte **235**
16.1 Aspect Physique 235
16.2 Précontrainte de charge 235
16.3 Précontrainte d'assemblage 239
16.4 Effet de précontrainte 242
17 Flambage **245**
17.1 Flambage des poutres 245
17.2 Flambage d'Euler des structures 250
17.3 Tube sous vide 257
17.4 Cuve remplie d'eau 259
17.5 Poutre en flexion 263
17.6 Flambage des barres 265
18 Jeux et contacts **267**
18.1 Contact et analyse linéaire 267
18.2 Contact nœud sur nœud 268
18.3 Contact nœud sur surface 269
18.4 Gestion du contact 271
18.5 Contact et modes rigides 273

18.6 Flexion 3 points 275
18.7 Frettage 277
18.8 Bielle 283
19 Super-éléments 291
19.1 Introduction 291
19.2 Statique linéaire 291
19.3 Analyse modale 294
19.4 Premier exemple 296
19.5 Deuxième exemple 299
19.6 Troisième exemple 300
19.7 Quatrième exemple 300
20 Divers 303
20.1 Effets thermiques 303
20.2 Conditions aux frontières 309
20.3 Collage 313

Index 315

Avant-propos

Le calcul de structures par éléments finis est une discipline née il y a environ 60 ans, où se mêlent étroitement les mathématiques, la mécanique et l'analyse numérique, d'où sa complexité et les différentes approches que l'on peut en avoir. Les progrès réalisés en informatique sur cette période, tant par la puissance de calcul que par une interactivité toujours plus grande et des interfaces homme/machine sans cesse améliorées, ont contribué dès le milieu des années 80 à une diffusion toujours plus large de la conception assistée par ordinateur (CAO) dans les bureaux d'études. Les passerelles devenant de plus en plus « transparentes » entre la CAO et le maillage puis le calcul, cela a naturellement conduit à une utilisation sans cesse croissante des programmes de calcul par éléments finis : la simulation numérique est devenue incontournable dans les bureaux d'études. Par manque de formation scientifique, beaucoup d'utilisateurs de ces outils de simulation confondent cependant maillage et modélisation, planches de résultats en couleur et comportement réel de la structure. La plupart des cours et des ouvrages consacrés aux éléments finis abordent cette méthode sous l'aspect mathématique (principes variationnels, formulation des éléments, construction des matrices de raideur…), ce qui est indispensable pour les futurs développeurs de codes, dont le nombre est cependant très limité par rapport à celui des utilisateurs de ces codes. Cet ouvrage n'est ni un cours sur la méthode des éléments finis, ni un guide d'utilisation d'un logiciel particulier, mais une aide pour l'utilisateur de ces outils de simulation qui y trouvera des éléments théoriques puis pratiques dans les exemples illustrant les différents chapitres.

La première édition de cet ouvrage a été publiée en 1995, après 12 ans de pratique quotidienne du calcul de structures, à l'ONERA puis chez SAMTECH. Enseignant-chercheur à l'ISMANS et formateur au CNRS depuis 1996, j'ai assisté à l'évolution des outils de calcul de structures et du travail réalisé en bureau de calcul. Il en a résulté quatre autres ouvrages écrits en collaboration, publiés par les éditions DUNOD, traitant de sujets plus spécialisés. À quelques mois de prendre ma retraite et à la demande des éditions DUNOD, j'ai entrepris d'actualiser et de remanier la troisième édition de ce livre, focalisée sur les problèmes de mécanique linéaire pour les structures constituées de matériaux isotropes. En effet, sur les vingt dernières années, certains éléments finis ont été supplantés par d'autres, plus performants, ayant un spectre d'utilisation plus large. Certaines méthodes sont devenues obsolètes, des procédures automatisées et transparentes ont remplacé des enchaînements de calculs et des gestions de fichiers pour le moins délicates. Par rapport à la version précédente, divers points ont été supprimés, d'autres détaillés car certaines notions de base sont toujours indispensables pour modéliser une structure, comprendre les étapes de calcul et la gestion des données de manière à valider le résultat obtenu par la simulation.

Même si les intitulés n'ont pas changé, les contenus et la manière de présenter le calcul de structures ont beaucoup évolué ces dernières années. Le contenu de cette nouvelle édition couvre une partie de l'enseignement dispensé à l'ISMANS en deuxième année

du cycle ingénieur, dans l'option MCOP spécialisée en calcul de structures. Tous les exemples de cet ouvrage font partie des exercices traités en cours et ont été réalisés avec SAMCEF.

Je ne saurais terminer cette présentation sans remercier Michael Bruyneel, ami de longue date avec lequel j'ai publié deux autres ouvrages, pour sa relecture attentive et ses encouragements. Je remercie également tous les étudiants qui ont intégré l'option MCOP de l'ISMANS depuis 1996, les collègues du CNRS et les industriels pour tous les projets de recherche qui nous ont permis de progresser dans l'art de la modélisation, et ont contribué à faire évoluer les cours. Je remercie également l'équipe de SAMTECH à Liège avec laquelle j'ai eu la chance et le privilège de travailler depuis bientôt 40 ans, et qui m'a tant apporté. J'adresse enfin un grand merci à ma femme pour sa patience et ses encouragements.

Coulaines, mai 2022

Chapitre 1

Rappels de mécanique

1.1 Vecteur des contraintes

On ne s'intéresse qu'aux **milieux continus** qui sont des domaines de l'espace à trois dimensions. Ce sont des corps purement fictifs où la matière est uniformément distribuée dans le volume, de sorte que tout élément infinitésimal a les mêmes propriétés que le corps lui-même. On suppose de plus qu'au voisinage d'un point quelconque du milieu, ces propriétés sont des fonctions continues et différentiables par rapport à toutes les variables définissant le point (coordonnées, temps…). Ces milieux continus ne subissent que des **transformations continues**. En particulier, deux points initialement voisins le restent à tout instant, tout en ayant des déplacements quelconques (finis ou infinitésimaux).

Une structure physique ne peut être sollicitée que sur son enveloppe externe, ou dans son volume. Les sollicitations agissant sur l'enveloppe sont dues soit à une autre structure (forces de contact), soit à un fluide (pression, pression hydrostatique). En résistance des matériaux, si la surface dS sur laquelle s'exerce l'effort est suffisamment petite devant la surface S de l'enveloppe du corps, on admet que la force est ponctuelle. En mécanique des milieux continus ou élasticité (MMC), ce modèle mathématique n'est pas utilisable. Les efforts volumiques sont des actions à distance, réparties dans le volume de la structure. Il n'y a pas d'agent extérieur qui transmet ces efforts. Les forces d'inertie, les forces centrifuges, les forces thermiques ou les forces électromagnétiques en sont des exemples.

On conçoit bien qu'un corps soumis à l'action d'un ensemble de forces extérieures doit être capable d'« encaisser » les efforts. La contribution à l'effort ne sera pas la même en tout point intérieur au corps : des zones seront plus sollicitées que d'autres, les efforts internes sont variables en direction et en intensité d'un point à un autre. Il est donc très important de décrire précisément la répartition des contributions de la matière. Tous les principes de la mécanique font appel à la notion d'action extérieure. Pour étudier la répartition des efforts et moments en un point M situé à l'intérieur de la matière, que l'on appelle « forces intérieures » par abus de langage, il faut effectuer une **coupe fictive** par un plan contenant ce point. On remplace virtuellement la structure par ses deux parties, notées I et II.

On isole la partie I, la section est définie par un point de passage M, et la normale à la section, dirigée conventionnellement vers l'extérieur de la partie I considérée. On appelle **facette** un élément de surface infinitésimal dS appartenant au plan de coupe. Soit F_1 et F_2 les deux systèmes partiels de forces extérieures respectivement appliqués aux parties I et II. Pour qu'en isolant virtuellement la partie I, elle garde la même position d'équilibre que quand elle est liée à la partie II, il faut lui appliquer les efforts extérieurs F_1 et les actions de la partie II sur la partie I dans la section (Figure 1.1). $\Delta\vec{F}$ est la force qui représente l'action exercée au voisinage du point M par la partie II sur la partie I,

ce voisinage étant la facette *dS*. On appelle **vecteur contrainte** au voisinage du point M suivant la normale $\vec{n}$ le vecteur défini par :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \lim_{dS\to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{dS}$$

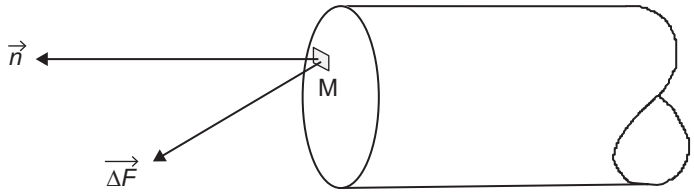


Figure 1.1 – Efforts en M dans la section orientée

Par abus de langage, on parle de **contrainte** au point M. La notion de contrainte et sa formalisation sont dues au mathématicien français Cauchy. Une contrainte est homogène à une pression, qui est une force par unité de surface. Elle s'exprime en pascal dans le système international (1 Pa = 1 N/m^2), mais on utilise souvent en mécanique le mégapascal (1 MPa = 10^6 N/m^2 = 1 N/mm^2). Le vecteur contrainte peut être projeté sur la normale et selon deux directions contenues dans le plan de la facette, l'ensemble de ces trois vecteurs formant un repère orthonormé, ou dans tout autre système d'axes. Les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}$ dans le repère attaché à la section en M sont définies par les relations suivantes et ont une limite finie lorsque *dS* tend vers 0 :

$$\frac{\Delta F_n}{dS}, \frac{\Delta F_{t1}}{dS}, \frac{\Delta F_{t2}}{dS}$$

$\lim_{dS\to 0} \frac{\Delta F_n}{dS}$ est la **contrainte normale**, c'est la composante du vecteur contrainte au point M dans la direction de la normale sortante. On la note généralement σ. C'est une traction si elle est dirigée dans le sens de la normale sortante, auquel cas elle a une valeur positive. C'est une compression si elle est dirigée dans le sens de la normale rentrante, auquel cas elle a une valeur négative.

$\lim_{dS\to 0} \frac{\Delta F_{t1}}{dS}$ et $\lim_{dS\to 0} \frac{\Delta F_{t2}}{dS}$ sont les **contraintes tangentielles** ou **contraintes de cisaillement**, notées respectivement σ_{nt1} et σ_{nt2} ou τ_{nt1} et τ_{nt1}

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma\ \vec{n} + \tau\ \vec{t} = \sigma\ \vec{n} + \tau_{nt1}\ \vec{t_1} + \tau_{nt2}\ \vec{t_2}$$

Dans la notation σ_{ij} ou τ_{ij}, le premier indice indique que la normale au point considéré est le vecteur *i*. Le second indice indique quelle est la composante du vecteur contrainte qui est examinée. On a défini le vecteur contrainte et ses composantes pour la partie I dans la section orientée passant par le point M. Par application du principe d'action/réaction, le vecteur contrainte représentant l'action en M de la partie I sur la partie II est l'opposé de celui représentant l'action de la partie II sur la partie I.

$$\vec{T}(M,\vec{n})+\vec{T}(M,-\vec{n})=0 \quad \rightarrow \quad \vec{T}(M,-\vec{n})=-\vec{T}(M,\vec{n})$$

Mais la normale sortante pour la partie II est l'opposée de la normale sortante pour la partie I, de sorte que les projections de ces vecteurs contraintes opposés sur des directions opposées sont les mêmes. La contrainte en un point de la section caractérise intrinsèquement ce qui s'y passe et ne dépend pas du fait que l'on examine l'action de II sur I ou de I sur II.

1.2 Matrice des contraintes

Il y a en un point d'une structure en équilibre un état de contrainte. Une infinité de facettes passe par ce point donc une infinité de vecteurs à trois composantes caractérise cet état de contrainte. Ces vecteurs contraintes forment le **faisceau des contraintes** en M, l'extrémité du vecteur contrainte en M décrivant dans l'espace une surface quand la normale à la section balaie tout l'espace. La valeur de la contrainte normale et des contraintes tangentielles changent avec l'orientation de la normale sortante, mais l'état de contrainte ne change pas puisque l'on coupe virtuellement en passant par le point. La connaissance au point M d'une matrice 3×3 appelée **matrice des contraintes** est suffisante pour déterminer l'**état de contrainte** en ce point.

Soit trois axes de référence formant un repère orthonormé, par exemple les axes *Mx*, *My* et *Mz*. On suppose connus les vecteurs contraintes en M sur les trois facettes dont les normales sont ces axes. Le tétraèdre de la Figure 1.2 étant en équilibre, la somme des efforts qui y est appliquée est nulle.

$$\vec{T}(M,\vec{n}).dS+\vec{T}(M,-\vec{x}).dS_x+\vec{T}(M,-\vec{y}).dS_y+\vec{T}(M,-\vec{z}).dS_z=\vec{0}$$

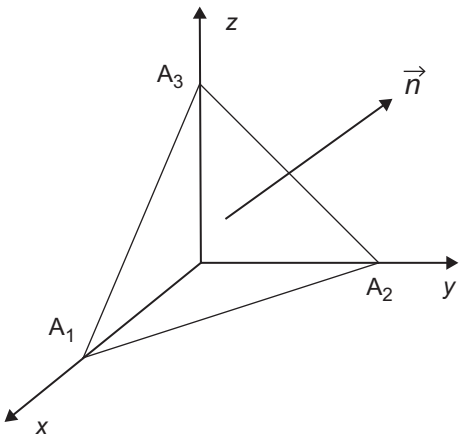


Figure 1.2 – Équilibre du tétraèdre

On projette cette équation vectorielle sur les trois axes de référence, n_x, n_y et n_z étant les trois composantes du vecteur normal exprimé dans ce repère de référence. On obtient :

$$\vec{T}(M,\vec{n}).dS=\begin{pmatrix}\sigma_{xx}n_x dS+\tau_{yx}n_y dS+\tau_{zx}n_z dS\\ \tau_{xy}n_x dS+\sigma_{yy}n_y dS+\tau_{zy}n_z dS\\ \tau_{xz}n_x dS+\tau_{yz}n_y dS+\sigma_{zz}n_z dS\end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(M,\vec{n})=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{pmatrix}=[\sigma]\vec{n}$$

La matrice $[\sigma]$ est la matrice des contraintes au point M exprimée dans le repère de référence. Elle est définie par neuf termes qui sont les trois composantes des trois vecteurs contraintes dans un repère orthonormé direct arbitraire de référence. Donc, si on connaît les vecteurs contraintes sur trois facettes deux à deux perpendiculaires formant le repère de référence, on peut calculer le vecteur contrainte sur une facette d'orientation quelconque, il suffit de connaître les composantes du vecteur normal dans ce repère de référence. Les composantes normales et tangentielles du vecteur contrainte sont les composantes de ce vecteur dans le repère lié à la facette (Figure 1.3). La matrice des contraintes est représentative d'un tenseur du second ordre appelé **tenseur des contraintes**.

1.3 Équations d'équilibre

On isole autour du point M un volume élémentaire de côtés *dx* et *dy,* d'épaisseur uniforme *dz*, et on s'intéresse aux contraintes tangentielles agissant dans le plan *xy* (Figure 1.4). Le volume élémentaire étant arbitraire et infinitésimal, il est toujours possible de choisir des dimensions arbitraires telles que les contraintes évoluent peu entre deux faces parallèles, auquel cas un développement limité au premier ordre s'avère suffisant pour donner l'évolution des contraintes. Les forces de volume éventuelles ont une résultante qui passe par le centre de gravité du volume, à savoir le point M, leur moment par rapport au point M est nul. On suppose, au vu des dimensions arbitraires des côtés du volume, qu'il en est de même pour les contraintes normales : elles n'engendrent aucun moment.

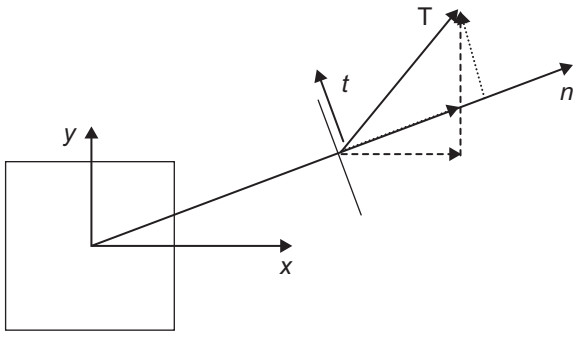


Figure 1.3 – Décomposition du vecteur contrainte dans le repère lié à la facette ou dans le repère de référence

Pour les contraintes tangentielles, la convention est que, ayant choisi une facette de référence, le cisaillement y est compté positif dans le sens trigonométrique ; sur la facette suivante, le cisaillement est compté positif dans le sens opposé.

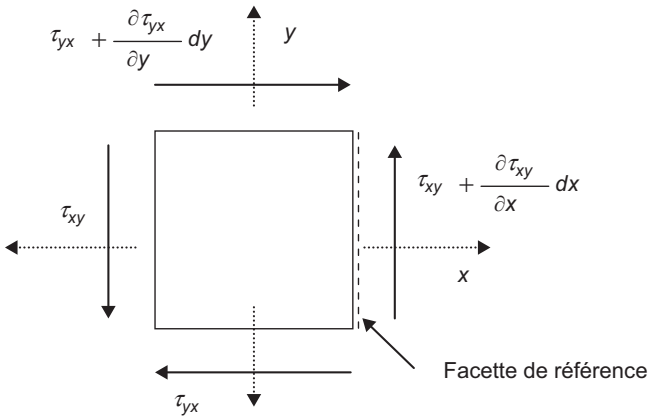


Figure 1.4 – Équilibre en rotation (contraintes de cisaillement)

Lorsqu'un effort fait basculer la structure de *x* vers *y* dans le sens trigonométrique, le moment associé est compté positivement. Il est négatif dans le cas contraire. Du fait de l'équilibre en rotation, la somme des quatre moments dus aux contraintes tangentielles appliquées sur le volume élémentaire autour de l'axe *Oz* est nulle :

$$\tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dxdz \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dxdz \frac{dy}{2} = 0$$

L'équation ci-dessus est vraie quel que soit l'élément de volume. Les longueurs *dx* et *dy* étant arbitraires et infinitésimales, il est légitime de supposer que les variations des contraintes sur *dx* et *dy* sont négligeables par rapport aux contraintes elles-mêmes. Il reste après simplification l'égalité entre les deux contraintes de cisaillement agissant sur deux facettes perpendiculaires :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Par un raisonnement similaire sur les autres faces du volume élémentaire, on montre que le tenseur des contraintes est symétrique. Ceci implique qu'avec la convention de signe utilisée, les contraintes de cisaillement agissant sur deux faces adjacentes sont toutes les deux orientées vers l'arête commune ou en sens inverse. La matrice des contraintes est symétrique, entièrement déterminée par la connaissance de six de ses neuf termes : les trois contraintes normales et trois des six contraintes de cisaillement.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad ou \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Soit maintenant un petit volume élémentaire autour de M, en équilibre dans la structure soumise à des forces de volume de densité F_x, F_y et F_z. Sur chaque facette du volume s'exercent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. On écrit l'équilibre en translation sur x de ce volume. Si la contrainte a pour valeur σ_{xx} sur la face 1, la force qui s'y exerce est $-\sigma_{xx}dydz$ car la normale sortante de la face 1 est dirigée selon les x négatifs. La contrainte est susceptible de varier d'une face à celle qui lui est parallèle. Mais les dimensions de l'élément de volume sont infinitésimales de sorte qu'il est possible de supposer qu'un développement au premier ordre traduit cette évolution. En respectant ces conventions, on représente sur la Figure 1.5 les forces appliquées sur les 6 facettes selon l'axe x. À l'équilibre, la somme de toutes les forces est nulle dans chaque direction et après simplification, il reste :

$$F_x dxdydz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dzdxdy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dydxdz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

Par un raisonnement analogue, on obtient des formules équivalentes à la précédente en permutant les indices, qui se regroupent en une seule en adoptant les conventions classiques pour les indices muets et les dérivées partielles :

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0$$

Cette équation doit être vérifiée en tout point du solide et est considérée comme l'équation de base de la mécanique des milieux continus. On peut aussi partir de l'équation vectorielle globale, en appelant V le domaine et S sa frontière :

$$\iint_S \vec{T}\, dS + \iiint_V \vec{F}\, dv = \vec{0}$$

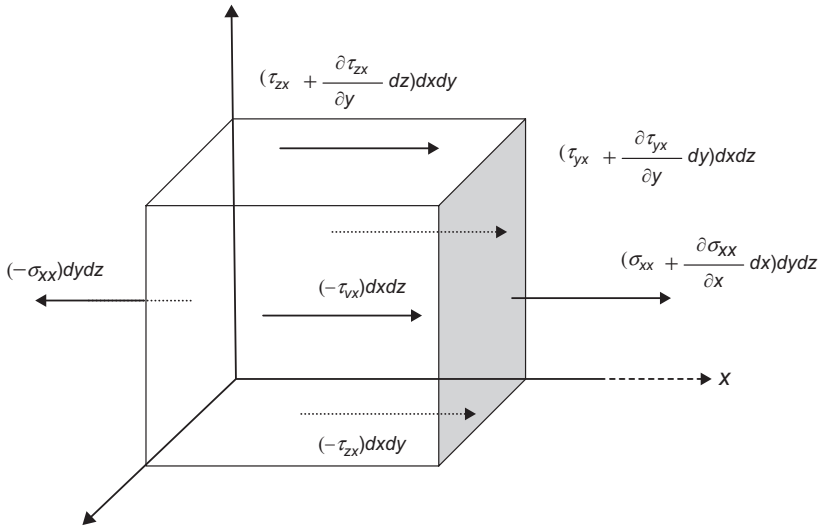


Figure 1.5 – Équilibre en translation selon l'axe x