

**PÉDAGOGIE
PRATIQUE
POUR TOUS**

concepts clés et situations- problèmes en mathématiques

**géométrie, mesures
et processus cognitifs**

2

Odette BASSIS



HACHETTE
Éducation

PÉDAGOGIE PRATIQUE À L'ÉCOLE
ET AU COLLÈGE

**CONCEPTS CLÉS
ET
SITUATIONS-PROBLÈMES
EN
MATHÉMATIQUES**

Tome 2
Géométrie, mesures...

Odette BASSIS
Contribution de Christian Foiret

hachette
ÉDUCATION

Les auteurs :

- **Odette Bassis** a enseigné en mathématiques dans le secondaire puis dans la formation initiale et continue des enseignants en IUFM. Elle a travaillé au plus près des classes, du cycle 2 au collège, et a enseigné sur « l'acte d'apprendre » en Sciences de l'Éducation (Paris-VIII et Paris-X).

C'est dans l'élaboration de la notion de « démarche d'auto-socio-construction du savoir » qu'elle contribue à apporter une avancée, à l'école et en formation d'adultes, dont cet ouvrage porte témoignage dans le champ spécifique des mathématiques.

Docteur en Sciences de l'Éducation, elle est présidente du Groupe français d'Éducation nouvelle.

Ouvrages du même auteur :

Mathématique : les enfants prennent le pouvoir, Nathan Éducation, 1984.

Se construire dans le savoir : à l'école et en formation d'adulte, ESF, 1998.

Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques, Tome 1, Hachette, 2003.

Co-auteur d'ouvrages collectifs du GFEN.

Auteur d'articles dans la revue *Dialogue* du GFEN (www.gfen.asso.fr) et autres revues.

- **Christian Foiret** est enseignant de CM2. Il est aussi directeur d'école dans l'une des ZEP de la banlieue orléanaise. Il y anime un groupe de travail cherchant à faire construire aux élèves du sens à l'école à travers les pratiques pédagogiques des enseignants.

Il est membre du GFEN du Loiret.

Cet ouvrage s'adresse :

À tous ceux qui partagent le pari d'une éducation nouvelle comme utopie concrète pour notre temps.

À tous ceux, jeunes et adultes, qui ont le désir de découvrir qu'apprendre peut être une fête !

Suivi éditorial : Josiane Attucci-Jan

Couverture : Studio Favre-Lhaïk

Réalisation : CMB Graphic

© HACHETTE LIVRE, 2004, 43, quai de Grenelle, 75905 Paris Cedex 15.

www.hachette-education.com

ISBN 978-2-01-181569-9

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

SOMMAIRE

<i>Introduction</i>	7
---------------------------	---

PREMIÈRE PARTIE : APPROCHE DE NOTIONS CLÉS

1. Le tableau à double entrée (Cycle 2)	13
2. Approche géométrique du théorème de Pythagore (Collège)	22
3. Approche géométrique du théorème de Thalès (Collège) ..	26
4. Introduction aux nombres irrationnels (Collège).....	30
<i>Récapitulatif. Ensembles de nombres</i>	43

DEUXIÈME PARTIE : DES POLYGOLES AUX CARRÉS

<i>Une démarche globale, dans un champ conceptuel, en étagements successifs (Cycle 3-Collège)</i>	47
<i>Des lignes aux polygones</i>	50
5. Caractérisation et classement de lignes planes	50
6. Des lignes brisées et fermées aux polygones	54
7. Polygones convexes – polygones concaves	59
<i>Des polygones aux triangles et aux quadrilatères</i>	61
8. Triangles et quadrilatères	61
9. Approche des propriétés des côtés : parallélisme de droites	69
10. Angles : classement et rangement.....	71
<i>Des quadrilatères aux carrés</i>	75
11. Le parallélisme des côtés : trapèzes et parallélogrammes ..	76
12. Quadrilatères ayant des angles droits.....	83
13. L'isométrie des côtés : parallélogrammes et losanges	86
14. Rectangles et carrés	89
<i>Structuration du tout en un champ conceptuel</i>	92
15. Des polygones aux carrés : diagramme récapitulatif	92
16. Discrimination et coordination entre propriétés et ensembles	96
17. Constitution d'ensembles et construction de schèmes logiques... ..	101

18.	Structuration du tout et des parties	103
<i>Annexes : Diagrammes des élèves</i>		106
<i>Réinvestissements</i>		112
19.	Construction géométrique des quadrilatères	112
20.	Médianes, diagonales, symétries, aires, transformations	114
21.	Réflexions sur les programmes officiels	117

TROISIÈME PARTIE : LES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES DU PLAN (Christian Foiret)

<i>Introduction</i>	121
<i>Les étapes, pas à pas (Cycle 3-Collège)</i>	124
22. Étape 1 : « Colorier ».....	124
23. Étape 2 : « Essayer de reproduire la planche »	126
24. Étape 3 : « Comment a-t-on inventé la planche ? ».....	129
25. Étape 4 : « Formuler »	130
26. Étape 5 : « Reconstruire ».....	135
27. Étape 6 : « Créer son œuvre personnelle »	140

QUATRIÈME PARTIE : MESURER (CYCLE 3-COLLÈGE)

<i>Introduction</i>	149
<i>Mesurer une longueur</i>	151
28. Notion d'étalon	151
29. Notion d'encadrement.....	154
30. Multiples et sous-multiples	156
31. Le mètre étalon : données historiques.....	159
<i>Mesurer une surface</i>	165
32. Notion de surface	165
33. Notion d'étalon de mesure de surface.....	167
34. Le quadrillage	176
35. Sous-multiples et multiples, données historiques	179
36. Réinvestissements et variantes des situations initiales.....	181

<i>Capacités et volumes</i>	183
<i>Mesurer le temps</i>	186
37. Du familier à des situations qui interrogent.....	186
38. Du réussir au comprendre.....	189
39. Retour sur les objets familiers et apports historiques.....	191
40. Introduire autrement aux situations initiales.....	195
<i>De la notion d'équilibre à la mesure d'une masse</i>	197
41. Jouer avec une planche et un support.....	197
42. Représenter, problématiser, formuler.....	199
43. Étalon de mesure de masse et données historiques.....	207
<i>Processus de recherche des élèves et animation de l'enseignant</i>	210
<i>BIBLIOGRAPHIE</i>	219

INTRODUCTION

« L'apprentissage serait parfaitement inutile s'il ne pouvait utiliser que ce qui est déjà venu à maturité dans le développement, s'il n'était pas lui-même la source du développement, la source du nouveau¹. »

Cet ouvrage s'adresse aux enseignants des cycles 2 et 3 aussi bien qu'à ceux du collège parce qu'il repose sur le choix délibéré, comme dans le tome précédent, d'aller quérir des problématiques conceptuelles clés qui constituent l'ossature des programmes, tout au long de la scolarité obligatoire.

Il demeure évident que les erreurs et lacunes des élèves, qui se catapultent tout au long des années de cette scolarité, ne peuvent trouver réparation seulement dans des répétitions explicatives ou des activités et exercices télé-guidés où l'élève ne demeure que receveur/reproducteur et non vraiment acteur et où l'enseignant lui-même se trouve démuné de moyens pour y pallier. Avec le risque, si ces fondements conceptuels ne sont pas construits réellement, et particulièrement en mathématiques, de mettre en cause une architecture de savoirs et qu'en faire fi c'est risquer de voir s'effondrer la suite comme château de cartes. Situation qui laisse l'élève en difficulté, si ce n'est en souffrance, et l'enseignant lui-même désarmé. Tant pour l'un parce qu'il craint déjà qu'il soit trop tard – et qu'il en prend à ses dépens son parti – que pour l'autre, convaincu qu'il n'a pas le temps, avec la tentation pour l'un et l'autre de se détourner d'une possibilité de mise en réussite enfin amorcée.

Des conséquences plus lourdes encore, y compris pour ceux qui « réussissent », sont le fait d'un découpage des contenus, et plus encore d'une redondance des notions abordées, tout au long des programmes, justement parce qu'elles tournent le dos à une approche cohérente des fondements conceptuels de ces contenus. L'exemple flagrant est celui de la progression prescrite concernant les quadrilatères qui commence par le carré, le rectangle, puis le losange et le parallélogramme et cela, tout au long des programmes de l'élémentaire et du collège. Comment un élève peut-il comprendre séparément des figures alors qu'elles relèvent toutes du parallélogramme, lequel d'ailleurs n'est qu'un polygone particulier parmi tant d'autres ? Ce qui renvoie à la conception d'une progression allant non point des carrés aux polygones mais justement, l'inverse. Progression où les élèves peuvent y découvrir, en fait, sens et cohérence. Dans la mesure où le

1. Vygotski, *Pensée et langage*, Messidor, 1985, p. 275.

sens à se construire est moins dans la familiarité de ces figures présentes dans les situations concrètes de la vie que dans la recherche des relations qu'elles entretiennent entre elles, cachées derrière l'apparence des choses.

Tisser ensemble sens et fonctionnalité : c'est ouvrir un chemin vers le savoir faisant rupture à la fois avec le perceptif immédiat, un pragmatisme cloisonné, en même temps qu'avec des données formellement retenues. Ce qui est rendu possible par le pari, largement confirmé par l'expérience, des potentialités souvent ignorées ou cachées des élèves à pouvoir devenir concepteurs de leurs savoirs ainsi que des enseignants à devenir capables d'en créer les conditions.

Comme dans le tome précédent de cet ouvrage, celui-ci, sur la base des mêmes présupposés, présente des démarches de construction de savoir qui, depuis des années, ont été effectivement menées, éprouvées. Et si le lecteur peut être étonné de trouver des démarches allant du cycle 2 au collège c'est qu'elles ont un lien dans les modes de cheminement qu'elles mettent en œuvre comme dans un certain fil directeur, sur le plan conceptuel, qu'elles tissent. Certaines des démarches sont longuement décrites, analysées (tableau à double entrée, polygones, transformations géométriques, mesures...), d'autres sont seulement abordées (théorèmes de Pythagore, de Thalès...) et d'autres esquissées en leur fondement (nombres irrationnels, réinvestissements en géométrie). Toutes proposent des situations-problèmes propres à interroger, à chercher, à fouiller. Des situations-problèmes telles qu'il est possible d'en proposer certaines à des élèves de l'école élémentaire, alors que les notions concernées sont au programme du collège². Et inversement des situations, prescrites dès les programmes de l'élémentaire, qui peuvent être traitées avec grand bénéfice au collège, venant combler des « manques à comprendre » qui viennent en défaut dans la mise en œuvre des programmes du collège³. C'est bien là un parti pris délibéré commun aux deux tomes dont il faut préciser cependant que si, sur le plan de leurs contenus, ils se complètent, ils peuvent être abordés toutefois indépendamment l'un de l'autre.

Pourtant, comme pour le tome précédent, cet ouvrage ne prétend pas du tout couvrir tous les concepts clés des programmes. Ce n'est pas son propos. De ce point de vue, il ne cherche aucunement à être un manuel au sens habituel du terme. Pourtant, si les démarches proposées sont menées, alors le bénéfice en sera vite tiré concernant ce qui, des programmes, n'y est point abordé. Bien plus, la formation d'une pensée réflexive, critique, conceptua-

2. Ainsi en est-il pour les situations d'approche des théorèmes de Pythagore ou de Thalès, comme réinvestissements de l'aire du carré et de la proportionnalité (à propos des ombres portées).

3. Notamment pour les polygones, les mesures tout comme on peut le voir pour la numération, les décimaux, la proportionnalité, etc., dans Odette Bassis, *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques*, tome 1, Hachette, 2003.

lisante qui s'est forgée tout au long de ces démarches permet de déborder le cadre du prescrit, comme on pourra en juger dans le déroulé des processus décrits. Ainsi peuvent être évitées des redites fastidieuses tant pour les élèves que pour les enseignants dans la mesure où, des assises conceptuelles étant construites, les réinvestissements qu'elles rendent désormais possibles en assurent une solidité et une durabilité qui contribuent à leur irréversibilité.

Car l'expérience vécue d'une incitation à chercher, à élaborer, à conceptualiser ne peut que laisser trace, en profondeur, stimulant l'appétit d'interroger ailleurs et autrement.

Le choix de cet ouvrage est de vouloir accompagner l'enseignant tout au long des situations vécues quant aux modes possibles d'intervention de sa part, au cours des cheminements des élèves, ainsi que de faire route avec lui quant aux analyses menées. Sachant que s'il y a – et pour qu'il y ait – construction par l'élève de ses savoirs, encore faut-il qu'il y ait construction par l'enseignant lui-même d'une posture nouvelle de l'acte d'enseigner sous-tendue par des enjeux décisifs :

- **Une autre approche des savoirs à enseigner et de leur progression** : où fonctionnalité et sens puissent se conjuguer en tournant le dos à un pragmatisme étroit, à un formalisme figé et à une linéarité segmentée de la succession des notions qui, bien loin de simplifier et d'aider, fait barrage à toute ouverture dans un champ conceptuel plus large dans lequel pourtant ces notions s'insèrent. Une autre approche, en somme, pour laquelle ce qu'il y a à savoir ne prend sens que dans la recherche de « ce qu'il y a à comprendre pour savoir ».

- **Une autre approche de l'acte d'apprendre** : où des situations-problèmes impulsent une activité de recherche effective de chaque élève et des élèves entre eux, les conduisant par étapes d'élaborations successives jusqu'à la conceptualisation des notions abordées.

- **Une attente positive des possibilités des élèves** qui permet, pour si peu que soient incitées, mises en acte et soutenues leurs potentialités, de leur faire franchir des étapes jusque-là imprévisibles, comme on pourra le constater dans les démarches relatées dans cet ouvrage, en accord avec Vygotski qui insiste encore : « L'apprentissage scolaire peut non seulement suivre le développement, non seulement marcher au même pas que lui, mais il peut le devancer, le faisant progresser et suscitant en lui de nouvelles formations⁴. »

Bien sûr, cela ne peut se faire dans un volontarisme naïf, mais avec toute la patience et la confiance, l'exigence et la ténacité que requiert l'acte d'enseigner qui de fait, de façon manifeste ou latente, de façon consciente ou

4. Vygotski, *op. cit.*, p. 254.