

Jean-Michel Bauduin
Thierry Bars
Mélanie Cousin
Yves Josse
Frédéric Legrand
Josiane Manasses
Hélène Michel

PARCOURS PRÉPAS

PHYSIQUE

CHIMIE

MP/MP*

Création de couverture : Studio Dunod

© Dunod, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084950-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Partie 1 Mécanique

1 Référentiels non galiléens	9
2 Frottement solide	45

Partie 2 Électromagnétisme

3 Charges et courants électriques	77
4 Électrostatique.....	107
5 Magnétostatique	145
6 Dipôles électrique et magnétique.....	167
7 Équations de Maxwell	193
8 Ondes électromagnétiques dans le vide	231
9 Ondes électromagnétiques dans un milieu dispersif.....	267
10 Ondes électromagnétiques et métaux.....	295

Partie 3 Optique

11 Ondes lumineuses scalaires	327
12 Interférences de deux ondes.....	353
13 Interférences de Young	377
14 Interféromètre de Michelson	413
15 Interférences de N ondes.....	449

Partie 4 Physique quantique

16	Fonction d'onde et équation de Schrödinger.....	469
17	Particule dans un potentiel	491

Partie 5 Traitement du signal

18	Signaux périodiques.....	523
19	Électronique numérique.....	545

Partie 6 Thermodynamique

20	Systèmes ouverts en régime stationnaire	581
21	Transferts thermiques	605
22	Thermodynamique statistique.....	639

Partie 7 Thermodynamique des systèmes chimiques

23	Premier principe	673
24	Second principe	693

Partie 8 Électrochimie

25	Cinétique électrochimique.....	727
26	Conversions électrochimiques	755
27	Corrosion humide.....	789

Partie 9 Annexe

28	Calcul vectoriel.....	811
	Index.....	827

Avant-propos

« Quiconque a pensé pensera toujours, et l'entendement, une fois exercé à la réflexion, ne peut plus rester au repos. »

J.-J. Rousseau, *Émile, ou de l'éducation*

Les sciences physiques

Les sciences physiques ont pour objectif d'expliquer et de prévoir les phénomènes que nous pouvons observer. Par principe leurs lois, établies dans notre environnement terrestre, ont un caractère universel : valables dans nos laboratoires, elles sont réputées applicables en tout lieu, jusqu'aux confins de l'Univers, à toute date, dans le passé depuis la naissance de celui-ci, dans le présent et dans le futur, le plus lointain soit-il.

L'expérimentation y joue un rôle central. Une théorie, un modèle, ne valent que si leurs prévisions sont en accord avec les résultats expérimentaux, aux incertitudes près.

Expérimentation et développement théorique sont des moteurs qui se relaient l'un l'autre dans l'évolution des connaissances. Il est ainsi des étapes lors desquelles l'expérience permet de mettre en évidence un phénomène qui ne peut être expliqué par les théories existantes. Le travail du scientifique consiste alors à retoucher ces dernières, à les compléter, à en mettre de nouvelles en chantier pour rendre compte du phénomène observé. Il est à l'inverse d'autres étapes lors desquelles l'édifice théorique permet de prévoir un phénomène jusque-là inconnu. Le travail consiste alors à imaginer, à concevoir des expériences permettant de l'observer effectivement ou non et ainsi de confirmer ou d'infirmer certains éléments de l'édifice théorique.

L'histoire des sciences est riche d'exemples tels que mécanique newtonienne et observation du mouvement des planètes, théorie de l'électromagnétisme et prévision de l'existence des ondes électromagnétiques, modèle standard de la physique des particules et prévision de l'existence du boson de Higgs...

L'ouvrage

Son contenu est conforme à celui des programmes en vigueur.

Mais, au-delà de cela, nous avons délibérément pris le parti de faire découvrir au lecteur les concepts, les lois de la physique et de la chimie dans le cadre de problématiques concrètes, en utilisant aussi souvent que possible des résultats expérimentaux. Au travers de cette démarche, notre ambition est de lui donner le goût de l'expérimentation en le sensibilisant à la richesse d'une telle approche.

En cela, **nous avons cherché à mettre en avant l'esprit des programmes**, qui valorisent le travail mené à partir de données expérimentales.

Ainsi, nous avons également voulu **tenir compte de la tendance actuelle des problèmes de concours**, qui évaluent de plus en plus l'aptitude à commenter et à exploiter des résultats expérimentaux.

Toutes les expériences décrites et exploitées, aussi bien dans le cours que dans les exercices, ont été réalisées par les auteurs pour la rédaction de l'ouvrage.

Sa structure

Dans chaque chapitre le lecteur trouvera :

- **L'essentiel du cours**, déroulé à partir d'une contextualisation servant de fil conducteur, présentant les concepts essentiels et les méthodes importantes. Des pictogrammes sont utilisés pour en faciliter la lecture :

□ : pour des **questions destinées à structurer l'exposé**, questions qu'un étudiant curieux pourrait être amené à se poser ; nous l'incitons d'ailleurs à tenter d'y répondre au moins partiellement avant de poursuivre sa lecture,



■ : pour attirer l'attention sur un point important,



■ : pour mettre en valeur **une remarque** intéressante ou **une astuce**.

- Une **interrogation de cours** sous forme d'un QCM permettant au lecteur de tester rapidement sa compréhension des notions introduites dans l'essentiel du cours.
- Des **exercices** de niveaux progressifs, comprenant des liens avec les méthodes développées en cours (des méthodes vers les exercices et des exercices vers les méthodes) qui permettent une lecture croisée de l'ouvrage.
- Les **corrigés** de l'interrogation de cours et des exercices.

Remerciements

Nous tenons à remercier l'ensemble du personnel du laboratoire de sciences physiques du lycée Chateaubriand de Rennes pour son assistance et ses encouragements dans la réalisation des nombreuses expériences conçues pour cet ouvrage. Merci également aux collègues qui nous ont fait part de leurs observations. Enfin, ces remerciements ne sauraient être complets sans une mention spéciale à tous nos proches pour leur infinie patience !

Des vidéos pour vous aider à réussir en prépa

Pour réussir vos concours, vous devrez mettre en œuvre des compétences disciplinaires (*hard skills*), mais aussi des *soft skills*, ces compétences transversales qui vous permettront de tenir le bon rythme. La collection **Parcours Prépas** vous offre six vidéos pour vous préparer à réussir dès la première année et faire la différence le jour J par la maîtrise de votre énergie (physique, émotionnelle, mentale), par l'entretien de votre motivation et par vos méthodes de travail.

Tout d'abord deux vidéos méthodologiques d'**Alexis Brès**. Professeur agrégé de physique-chimie en MP2I (lycée Hoche, Versailles), il est aussi correcteur et concepteur de sujets pour la banque du concours e3a-Polytech ; ancien correcteur du concours d'entrée aux ENS. Auteur de *L'Oral de physique aux concours des ENS et de Polytechnique* (Dunod).



<http://dunod.link/jvy7mqd>

Vidéo 1 : Apprendre à apprendre Comment mobiliser efficacement son cours ?

Comment apprendre un cours ? Comment savoir si on l'a vraiment compris ? Comment le mobiliser dans les TD et dans les épreuves ? Comment créer du lien entre les connaissances pour se forger une intuition de la solution et gagner un temps précieux ?

Autant de questions-réponses abordées dans cette vidéo. Une méthodologie particulièrement adaptée à l'apprentissage des cours de physique, de mathématiques ou de sciences industrielles.



<http://dunod.link/z0psk69>

Vidéo 2 : Écrit, oral : aborder sereinement la résolution d'un problème

Si les exigences d'un sujet d'écrit et d'un oral peuvent sembler assez différentes, il existe des techniques communes pour aborder ces épreuves sans stress. Cette vidéo fournit :

- des techniques pour apprivoiser la résolution d'un problème de physique : modalités de décryptage du sujet et de mobilisation du cours ;
- des recommandations sur le fond et la forme pour gagner la confiance des correcteurs ;
- des tactiques cohérentes pour gagner des points ;
- des points de vigilance concernant la préparation des khôlles et des oraux.

Ensuite quatre vidéos « *soft skills* » pour aborder la prépa comme le ferait un sportif de haut niveau. Ces vidéos ont été conçues par **Stéphane Fassetta**, fondateur de Syprium, coach professionnel, préparateur mental de sportifs de haut niveau, professeur d'aïkido. Auteur de *Nos 8 profils énergétiques* (InterÉditions).



<http://dunod.link/80x2gwu>

Vidéo 3 : Les cinq piliers de l'énergie, ou comment réussir le marathon de la prépa ?

La prépa, c'est un peu comme le sport de haut niveau : plus le temps passe, plus le niveau ou les contraintes augmentent. Maîtriser son énergie, c'est donc faire un usage optimum

de ses ressources pour tenir le rythme des deux années, s'adapter à la diversité des situations et réussir ses épreuves. Cette vidéo présente les dimensions de notre énergie et les cinq piliers pour l'entretenir. La capacité à se ressourcer sur ces cinq piliers est une compétence à développer dès votre arrivée en prépa.



<http://dunod.link/sicy8u3>

Vidéo 4 : Gérer efficacement son temps en prépa

En prépa, on manque toujours de temps. L'enjeu est donc de gérer efficacement cette ressource pour atteindre les objectifs de vos différentes échéances.

Cette vidéo fournit des repères pour :

- trouver sa propre organisation personnelle : techniques de planification, objectifs SMART... ;
- développer sa capacité d'attention, essentielle à la compréhension, à la mémorisation, à la gestion de la charge mentale et à votre avancement ;
- connaître ses propres biorythmes pour un apprentissage efficient, en capitalisant sur les acquis de la chronobiologie.



<http://dunod.link/p5maym6>

Vidéo 5 : Gérer son stress et développer la confiance en soi pour les concours

Comme dans le sport de haut niveau, la préparation d'un concours soumet votre énergie à rude épreuve. Si une certaine pression est stimulante pour doper ses performances, l'installation dans un stress chronique compromet à la fois votre santé et vos chances de réussite.

Cette vidéo permet :

- d'identifier les sources externes et internes de son propre stress ;
- de comprendre le rôle du stress comme mécanisme naturel d'adaptation de l'organisme face à une situation déstabilisante et/ou à fort enjeu ;
- d'apprendre à reconnaître certains symptômes physiques, émotionnels ou cognitifs du stress pour prévenir l'épuisement ;
- de connaître les possibilités de régulation physique et mentale du stress ;
- d'entretenir passionnément sa motivation pour préserver durablement la confiance en soi, quelles que soient vos contre-performances.



<http://dunod.link/vncd3c5>

Vidéo 6 : Techniques respiratoires et de préparation mentale pour préparer les concours

La capacité à se relaxer ou à récupérer quand il le faut est essentielle pour tenir le rythme de préparation d'un concours.

Grâce à cette vidéo :

- vous saurez mettre en œuvre différentes techniques respiratoires adaptées à la récupération et à la dynamisation ;
- vous disposerez de deux techniques de préparation mentale pour conserver un état d'esprit positif, limiter votre niveau de stress et améliorer vos capacités d'attention.

Partie 1

Mécanique

Référentiels non galiléens

L'essentiel du cours

Contexte

Les sensations fortes provoquées par certaines attractions de fêtes foraines interrogent sur l'application des lois de la mécanique dans des référentiels non galiléens.

Nous envisagerons dans ce chapitre deux exemples de manèges, l'un en translation et l'autre en rotation autour d'un axe fixe par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$. Dans les deux cas, le passager peut subir des accélérations de plusieurs g par rapport à $\mathcal{R}_t$. Pour comprendre les actions qu'il ressent, nous devons réaliser une étude mécanique dans le référentiel non galiléen lié au manège.

■ 1 Référentiels en translation

Le train de l'attraction Psyké Underground du parc Walibi soumet le passager à une accélération horizontale importante lors de la phase initiale de propulsion. Nous avons reproduit au laboratoire cette phase d'accélération à l'aide de l'expérience schématisée sur la figure 1.1.

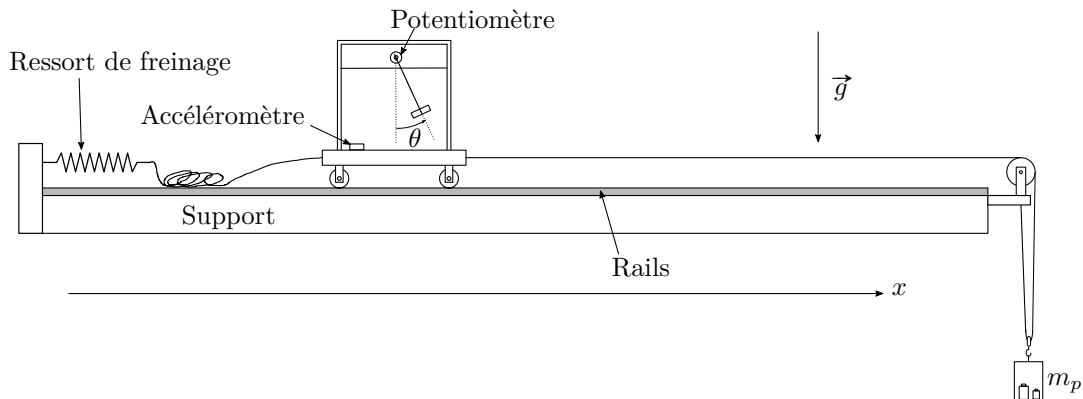


Figure 1.1. Pendule sur un chariot accéléré.

Un chariot guidé par deux rails fixés sur un support horizontal est entraîné par une corde à laquelle est suspendu un poids de masse m_p . Nous réalisons ainsi un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré du chariot dont l'accélération horizontale peut être modifiée en changeant m_p . Le système modèle remplaçant le passager du train est un pendule pesant dont la liaison pivot est réalisée par un potentiomètre multitours de $10\text{ k}\Omega$ donnant accès à l'angle θ défini sur la figure 1.1. Un accéléromètre MEMS fixé sur le chariot mesure son accélération horizontale.

□ Dans quel référentiel peut-on étudier le mouvement du pendule ?

L'angle θ permet de repérer la position du pendule par rapport au chariot mais comme celui-ci se déplace par rapport à l'observateur, il nous faut préciser les référentiels intervenant dans l'étude.

Définition : Référentiel

Un référentiel $\mathcal{R}$ est constitué :

- d'un solide de référence par rapport auquel on peut étudier le mouvement d'un objet ;
- d'une horloge qui permet le repérage temporel des événements subis par cet objet.

Un point O associé à une base vectorielle orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ constitue un repère lié au référentiel $\mathcal{R}$ si O , $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont fixes par rapport au solide de référence à tout instant.



La mécanique classique postule le caractère absolu du temps : une horloge indique le même temps dans un référentiel où elle est au repos et dans un référentiel où elle est en mouvement.

Le référentiel $\mathcal{R}$ lié aux rails (référentiel terrestre) est repéré par $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ alors que le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au chariot est repéré par $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$. Les repères sont représentés sur la figure 1.2.

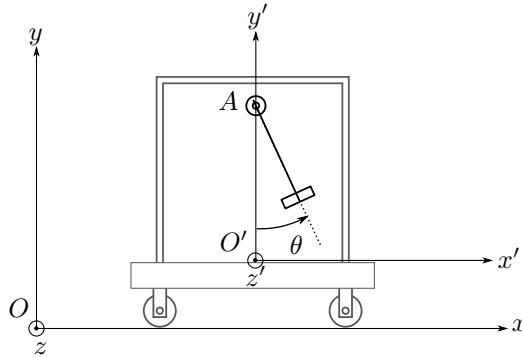


Figure 1.2. Présentation des repères.

Définition : Référentiel $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$

Un référentiel $\mathcal{R}'$ repéré par $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ est en mouvement de translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ repéré par $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ si ses vecteurs unitaires $\vec{u}_{x'}$, $\vec{u}_{y'}$ et $\vec{u}_{z'}$ possèdent une direction et un sens indépendants du temps dans $\mathcal{R}$. Mathématiquement :

$$\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Le mouvement de O' dans $\mathcal{R}$ caractérise complètement la translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.



Dans notre expérience, les bases $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ sont identiques !

Le mouvement d'un point matériel M peut être étudié dans $\mathcal{R}$ ou dans $\mathcal{R}'$.

□ **Comment composer les mouvements d'un point M dans deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre ?**

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ définit la position de M à l'instant t dans le référentiel $\mathcal{R}$. En utilisant la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, nous définissons les coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t), z(t))$ du point M : $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$.

Il est de la même manière possible de repérer le point M à l'instant t dans le référentiel $\mathcal{R}'$ par son vecteur position $\overrightarrow{O'M}(t)$. En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{O'M}(t) = x'(t)\vec{u}_{x'} + y'(t)\vec{u}_{y'} + z'(t)\vec{u}_{z'}$.

La relation de Chasles permet de relier facilement les deux vecteurs position :

$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t)$, où $\overrightarrow{OO'}(t)$ est le vecteur position de O' dans $\mathcal{R}$. Les coordonnées cartésiennes de O' dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ peuvent être introduites :

$$\overrightarrow{OO'}(t) = x_{O'}(t)\vec{u}_x + y_{O'}(t)\vec{u}_y + z_{O'}(t)\vec{u}_z.$$

Les vitesses des points O' et M dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'obtiennent en dérivant par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ les vecteurs position $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{OM}$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z \\ \vec{v}_{O'/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}_{O'}(t)\vec{u}_x + \dot{y}_{O'}(t)\vec{u}_y + \dot{z}_{O'}(t)\vec{u}_z.\end{aligned}$$

La vitesse du point M dans $\mathcal{R}'$ est quant à elle obtenue en dérivant $\overrightarrow{O'M}$ par rapport au temps

$$\text{dans } \mathcal{R}' : \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) = \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'(t)\vec{u}_{x'} + \dot{y}'(t)\vec{u}_{y'} + \dot{z}'(t)\vec{u}_{z'}.$$

En dérivant par rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}$ la relation de Chasles entre les vecteurs position, il vient :

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}}(t) + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ \text{Or } \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \dot{x}'(t)\vec{u}_{x'} + \dot{y}'(t)\vec{u}_{y'} + \dot{z}'(t)\vec{u}_{z'} \text{ puisque } \left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}. \\ \text{Ainsi, } \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) \text{ et donc } \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}}(t).\end{aligned}$$

Loi de composition des vitesses

La vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)$ d'un point M dans $\mathcal{R}$ et sa vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t)$ dans $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}_e(t) = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}}(t)$ sont liées par la relation :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{v}_e(t)$$

où $\vec{v}_e(t) = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}}(t)$ est appelée **vitesse d'entraînement**.

En dérivant par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ la loi de composition des vitesses, nous relierons les accélérations de M respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d^2 \vec{OM}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2 \vec{OO'}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d^2 \vec{O'M}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}(t) + \left. \frac{d^2 \vec{O'M}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

Or $\left. \frac{d^2 \vec{O'M}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}'(t) \vec{u}_{x'} + \ddot{y}'(t) \vec{u}_{y'} + \ddot{z}'(t) \vec{u}_{z'}$ puisque $\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$.

Ainsi, $\left. \frac{d^2 \vec{O'M}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2 \vec{O'M}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t)$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}(t)$.

Loi de composition des accélérations

L'accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t)$ d'un point M dans $\mathcal{R}$ et son accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t)$ dans $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$ avec une accélération $\vec{a}_e(t) = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}(t)$ sont liées par la relation :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{a}_e(t)$$

où $\vec{a}_e(t) = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}(t)$ est l'**accélération d'entraînement**.

□ Pourquoi un passager du train accéléré de l'attraction Psyké Underground est-il plaqué contre son siège ?

Dans l'attraction Psyké Underground, un passager du train accéléré se trouve plaqué contre son siège lors de la phase d'accélération. Tout se passe comme s'il subissait dans le référentiel du train une force liée à l'accélération de ce dernier dans le référentiel terrestre : cette pseudo-force sera nommée **force d'inertie**.

□ Qu'avons-nous observé expérimentalement ?

Présentons les résultats expérimentaux obtenus à l'aide du pendule modèle.

Les figures 1.3 et 1.4 présentent l'accélération et l'angle obtenus pour une masse $m_p = 1620$ g. Juste après le lâché du chariot à l'instant $t_1 = 1$ s, on observe une phase d'accélération, à peu près constante en moyenne ($0,35g$), correspondant au mouvement du chariot avant son freinage par le ressort. Durant cette phase, l'angle θ tend rapidement vers une valeur stationnaire $\theta_e = -19^\circ$, θ étant par convention positif lorsque le pendule est dévié vers l'avant. Les valeurs moyennes de l'accélération et de l'angle sont extraites sur un intervalle où le pendule a atteint un angle stationnaire, ici entre $t_2 = 1,5$ s et $t_3 = 1,8$ s. Après l'instant t_3 commence la phase de freinage du chariot que nous n'étudierons pas.

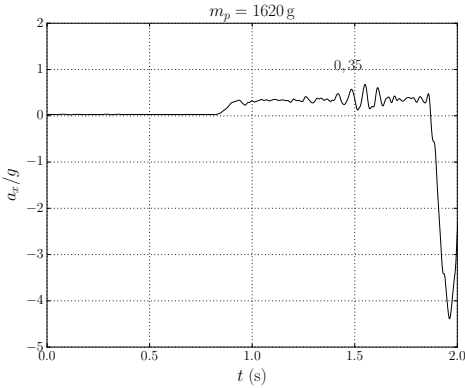


Figure 1.3. Accélération du chariot.

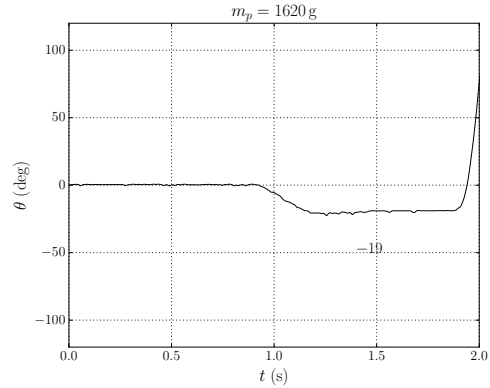


Figure 1.4. Angle du pendule.

Nous souhaitons préciser l'expression de la force d'inertie qui déplace le pendule vers l'arrière dans le référentiel du chariot. Pour simplifier l'étude dynamique, nous modélisons le pendule pesant de masse m par un pendule simple constitué d'un point M de masse m relié au point A par un fil sans masse et nous nous intéressons uniquement à la position d'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

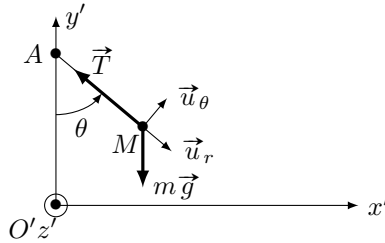


Figure 1.5. Modélisation par un pendule simple.

☐ Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ?

Rappelons ce que nous entendons par référentiel galiléen.

Référentiel galiléen

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout point M isolé (ou pseudo-isolé) est en mouvement de translation rectiligne uniforme (principe d'inertie ou 1^{re} loi de Newton).

Nous considérerons ici le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ comme galiléen ; les référentiels en mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$ ne sont galiléens que si la translation est rectiligne et uniforme. Ce n'est pas le cas du référentiel $\mathcal{R}'$ lié au chariot : il n'est donc pas galiléen.

☐ Peut-on appliquer la loi de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$ non galiléen ?

Commençons par déterminer l'équation du mouvement du point M dans $\mathcal{R}$ galiléen en lui appliquant la loi de la quantité de mouvement dans ce référentiel. En négligeant les frottements, le point M est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.



Les frottements au niveau de l'axe de rotation jouent un rôle important dans le régime transitoire amenant le pendule à sa position d'équilibre mais peuvent être négligés lorsque le pendule est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

Ainsi : $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{T} + m\vec{g}$.

Utilisons alors la loi de composition des accélérations : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{a}_e(t)$.

Nous en déduisons :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_e(t)$$

avec $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) = \vec{0}$ si M est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

Le terme $-m\vec{a}_e(t)$ s'ajoute aux forces subies par M et explique le déplacement observé du pendule par rapport au chariot. Nous notons ce terme $\vec{F}_{ie}(t)$ et l'appelons **force d'inertie d'entraînement**. Notons que cette pseudo-force est opposée à l'accélération du chariot ! De la même manière, le passager du train subit une force d'inertie opposée à l'accélération de ce dernier.

Loi de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

La loi de la quantité de mouvement s'applique au point M de masse m dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ en mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen en ajoutant aux forces $\vec{F}_k$ subies par M la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(t)$:

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) = \sum_k \vec{F}_k + \vec{F}_{ie}(t)$$

où $\vec{F}_{ie}(t) = -m\vec{a}_e(t)$ est la **force d'inertie d'entraînement**.



Les forces telles que le poids et la tension du fil sont invariantes par changement de référentiel. Les forces d'inertie dans un référentiel $\mathcal{R}'$ dépendent en revanche du mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Si $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, la force d'inertie d'entraînement est nulle car $\mathcal{R}'$ est galiléen !

Utilisons la base polaire liée à M et projetons la loi de la quantité de mouvement suivant $\vec{u}_\theta$ en notant θ_e l'angle d'équilibre du pendule. Nous obtenons : $0 = -mg \sin(\theta_e) - ma_e \cos(\theta_e)$ soit $\tan(\theta_e) = -a_e/g$.

Lors de notre expérience avec $m_p = 1620 \text{ g}$ nous avons obtenu : $\theta_e = -19^\circ$ pour $a_x/g = 0,35$ avec $a_x = a_e$. Nous en déduisons $\tan(\theta_e) = -0,34$ ce qui est cohérent.

En répétant l'expérience avec des masses m_p allant de 200 g à 2000 g et en calculant à chaque fois l'accélération a_x et l'angle θ_e lorsque ce dernier atteint sa valeur stationnaire nous constatons que θ_e est en valeur absolue d'autant plus grand que l'accélération a_x du chariot est importante.

La droite d'équation $\tan(\theta_e) = -a_x/g$ tracée sur la figure 1.6 confirme les résultats de notre modélisation.

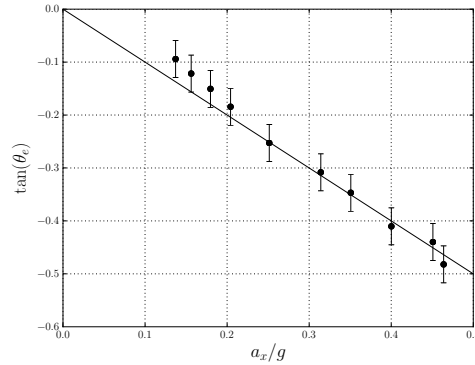


Figure 1.6. Lien entre l'angle d'équilibre du pendule et l'accélération du chariot.

□ **Peut-on appliquer le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}'$ non galiléen ?**

Le théorème du moment cinétique s'applique au point M dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ en mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen en ajoutant aux moments des forces $\vec{F}_k$ subies par M le moment de la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(t)$.

Théorèmes du moment cinétique dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

- Théorème du moment cinétique par rapport à un point A fixe dans $\mathcal{R}'$.

Si A est un point fixe de $\mathcal{R}'$, la dérivée temporelle dans $\mathcal{R}'$ du moment cinétique $\vec{L}_{A/\mathcal{R}'} = \vec{AM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t)$ d'un point matériel M de masse m par rapport à A est égale au moment en A des forces appliquées à M , force d'inertie d'entraînement incluse :

$$\left. \frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \sum_k \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_k) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ie})$$

- Théorème du moment cinétique par rapport à un axe orienté (Δ) fixe dans $\mathcal{R}'$.

Si (Δ) est un axe orienté fixe dans $\mathcal{R}'$, la dérivée temporelle du moment cinétique $L_{\Delta/\mathcal{R}'}$ d'un point matériel M par rapport à (Δ) est égale au moment par rapport à (Δ) des forces appliquées à M , force d'inertie d'entraînement incluse :

$$\frac{dL_{\Delta/\mathcal{R}'}}{dt} = \sum_k \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_k) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ie})$$

Appliquons le théorème du moment cinétique au pendule simple dans $\mathcal{R}'$ par rapport à l'axe (Az) fixe dans $\mathcal{R}'$. Nous obtenons : $0 = -mgL \sin(\theta_e) - ma_e L \cos(\theta_e)$ à l'équilibre et retrouvons bien la position d'équilibre θ_e telle que $\tan(\theta_e) = -\frac{a_e}{g}$.

□ **Comment réaliser un bilan énergétique dans $\mathcal{R}'$ non galiléen ?**

Nous écrirons les théorèmes énergétiques dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen comme dans un référentiel galiléen en tenant compte de la force d'inertie d'entraînement.

Théorèmes énergétiques dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

- Théorème de la puissance cinétique dans $\mathcal{R}'$.

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique $E_{c/\mathcal{R}'}$ d'un point matériel M dans $\mathcal{R}'$ est égale à la puissance dans $\mathcal{R}'$ des forces appliquées à M , force d'inertie d'entraînement incluse :

$$\frac{dE_{c/\mathcal{R}'}}{dt} = \sum_k \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_k) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_{ie})$$

- Théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}'$.

La variation de l'énergie cinétique $E_{c/\mathcal{R}'}$ d'un point matériel M dans $\mathcal{R}'$ qui se déplace entre les instants t_1 et t_2 de la position M_1 à la position M_2 est égale à la somme des travaux dans $\mathcal{R}'$ des forces appliquées à M , force d'inertie d'entraînement incluse :

$$\Delta(E_{c/\mathcal{R}'}) = E_{c/\mathcal{R}'}(t_2) - E_{c/\mathcal{R}'}(t_1) = \sum_k W_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_k)_{M_1 \rightarrow M_2} + W_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_{ie})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Entre deux instants infiniment proches :

$$dE_{c/\mathcal{R}'} = \sum_k \delta W_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_k) + \delta W_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_{ie})$$

Dans le cas du pendule de l'expérience, nous remarquons que la force d'inertie d'entraînement joue un rôle analogue au poids dans une direction horizontale. Or le poids est une force conservative dont l'énergie potentielle peut ici s'écrire $E_{p,p} = -mgL \cos(\theta) + \text{cste}$.

La puissance de la force $\vec{F}_{ie}$ dans $\mathcal{R}'$ est $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_{ie}) = \vec{F}_{ie} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = -ma_e L \dot{\theta} \cos(\theta) = -\frac{dE_{p,ie}}{dt}$ en posant $E_{p,ie} = ma_e L \sin(\theta) + \text{cste}$.



La force d'inertie d'entraînement est conservative dans le cas où $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation d'accélération constante $\vec{a}_e$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Il est ainsi possible de définir l'énergie potentielle E_p de M dans $\mathcal{R}'$ en ajoutant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement à l'énergie potentielle des forces conservatives s'exerçant sur M .

L'énergie potentielle $E_p = -mgL \cos(\theta) + ma_e L \sin(\theta) + \text{cste}$ peut être utilisée pour retrouver la position d'équilibre. Un extremum de E_p est obtenu pour un angle $\theta = \theta_e$ tel que $\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_e) = 0$, c'est-à-dire $mgL \sin(\theta_e) + ma_e L \cos(\theta_e) = 0$. Nous retrouvons bien la même expression de l'angle d'équilibre.

Par ailleurs $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_e) = mgL \cos(\theta_e) - ma_e L \sin(\theta_e) > 0$: la position d'équilibre $\theta = \theta_e$ est stable.

□ **Comment fonctionne un accéléromètre ?**

En combinant le poids $m\vec{g}$ d'un point M de masse m et la force d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_e$ que ce dernier subit dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du chariot, nous constatons qu'il existe dans $\mathcal{R}'$ un champ de pesanteur apparent $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_e$.

Un accéléromètre est constitué d'un élément élastique se déformant suivant un axe ($O'x'$) sous l'action de ce champ apparent, permettant ainsi de mesurer la composante de ce champ suivant cet

axe. Il peut être modélisé simplement par un ensemble masse-ressort, le frottement fluide jouant un rôle très important pour que la masse accélérée atteigne son équilibre rapidement et sans osciller.



Le pendule étudié dans l'expérience joue le rôle d'accéléromètre puisque la détermination de l'angle d'équilibre θ_e permet d'accéder à l'accélération horizontale du chariot.

□ Qu'entend-on par état d'impesanteur ?

Une tour de chute est un type d'attraction dans laquelle une nacelle contenant les passagers est hissée en haut d'une tour puis lâchée subitement. La nacelle est alors en chute libre, notamment au début du mouvement lorsque les forces de frottement de l'air peuvent être négligées.

Le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la nacelle est en mouvement de translation accéléré par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$. L'accélération $\vec{a}_e$ de la nacelle dans $\mathcal{R}_t$ s'obtient facilement en appliquant le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_t$ au système constitué par la nacelle et ses passagers : $\vec{a}_e = \vec{g}$.

Ainsi, dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la loi de la quantité de mouvement s'appliquera à un point M de masse m de la façon suivante :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{F} + m\vec{g} - m\vec{a}_e = \vec{F}$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées à M autres que son poids. En d'autres termes, la pesanteur n'existe plus pour un passager de la nacelle en chute libre : il est dans un état d'impesanteur.

■ 2 Référentiels en rotation

Le gravitron est une attraction de fête foraine constituée d'une salle circulaire dont les parois intérieures sont équipées de places capitonnées pouvant accueillir les passagers. La salle tourne autour de son axe et les passagers sont plaqués contre la paroi mobile, subissant une accélération de plusieurs g dans le référentiel terrestre.

Nous avons reproduit au laboratoire le principe de cette attraction à l'aide de l'expérience présentée sur la figure 1.7. Une plateforme est entraînée en rotation autour d'un axe vertical par un moteur électrique avec une vitesse angulaire Ω ajustable. Un accéléromètre est fixé à une distance r de l'axe, guidé par un rail. Sur ce rail est aussi fixé le support d'un pendule pesant fixé à son extrémité A sur l'arbre d'un potentiomètre multitours constituant la liaison pivot. L'électronique embarquée sur la plateforme permet de transmettre les données par liaison radio à un ordinateur.

Une LED de puissance éclaire une photodiode et l'extrémité du rail projette une ombre sur la photodiode à chaque tour. Un amplificateur suivi d'un comparateur permet d'obtenir un signal constitué d'impulsions, dont la période est relevée avec un oscilloscope.

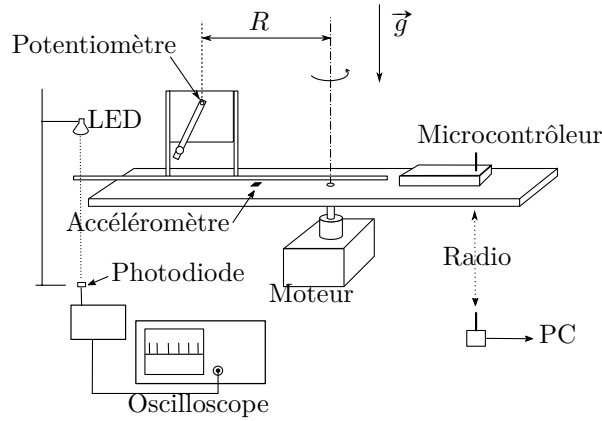


Figure 1.7. Pendule sur une plateforme tournante.

□ **Dans quel référentiel peut-on étudier le mouvement du pendule ?**

L'angle mesuré permet de repérer la position du pendule par rapport à la plateforme. Cependant, celle-ci se déplace par rapport à l'observateur : il est nécessaire de préciser les référentiels intervenant dans cette étude.

Définition : Référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme par rapport à un axe fixe dans $\mathcal{R}$

Un référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe fixe (Oz) par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ de repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ si on peut repérer $\mathcal{R}'$ par le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_z)$ dont les vecteurs unitaires $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ sont en mouvement de rotation autour de l'axe (Oz) dans $\mathcal{R}$ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$ constant.

Le schéma de la figure 1.8 précise les notations utilisées par la suite. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est ici repéré par $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où (Oz) est l'axe de rotation de la plateforme. Le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à cette dernière est quant à lui repéré par $(O, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_z)$, en mouvement de rotation autour de l'axe (Oz) fixe dans $\mathcal{R}$ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\alpha} \vec{u}_z$ constant. Le pendule oscille dans le plan $(O, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_z)$ autour de l'axe (Ay') .

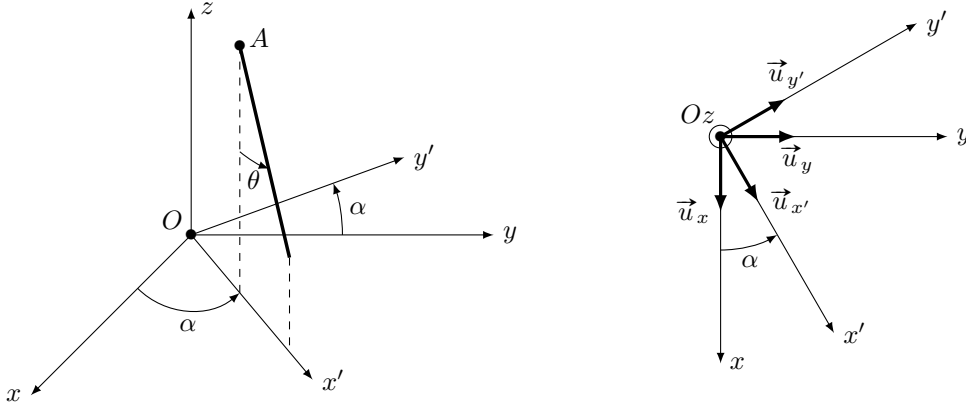


Figure 1.8. Présentation des repères utiles.



Il est important de ne pas confondre l'angle θ qui décrit le mouvement du pendule et l'angle α qui rend compte de la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

□ **Comment composer les mouvements d'un point M dans deux référentiels en rotation l'un par rapport à l'autre ?**

La position d'un point M peut être repérée à l'instant t par son vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$.

Nous pouvons utiliser la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et les coordonnées cartésiennes de M $(x(t), y(t), z(t))$ pour étudier le mouvement de M dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$.

De la même manière, dans le référentiel $\mathcal{R}'$: $\overrightarrow{OM}(t) = x'(t)\vec{u}_{x'} + y'(t)\vec{u}_{y'} + z(t)\vec{u}_z$.

Il est important de noter que les vecteurs unitaires $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ ne sont pas fixes par rapport à $\mathcal{R}$: la dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ de ces vecteurs n'est pas nulle. Exprimons $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en utilisant l'angle α introduit sur la figure 1.8.

$\vec{u}_{x'} = \cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_y$ et $\vec{u}_{y'} = -\sin(\alpha)\vec{u}_x + \cos(\alpha)\vec{u}_y$. Dérivons ces vecteurs par rapport au temps dans $\mathcal{R}$: $\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\sin(\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_x + \cos(\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_y = \dot{\alpha}\vec{u}_{y'}$ et $\left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\dot{\alpha}\vec{u}_{x'}$. Or $\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{u}_z$.

Nous constatons donc que : $\left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{x'}$ et $\left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{y'}$.

Envisageons ainsi un vecteur $\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{u}_{x'} + A_y(t)\vec{u}_{y'} + A_z(t)\vec{u}_z$ et dérivons-le par rapport au temps dans $\mathcal{R}$:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{A}_x(t)\vec{u}_{x'} + \dot{A}_y(t)\vec{u}_{y'} + \dot{A}_z(t)\vec{u}_z + A_x(t)\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{x'} + A_y(t)\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{y'}$$

Ainsi : $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}(t)$: la dérivée par rapport au temps d'un vecteur dépend du référentiel dans lequel on la calcule.

Formule de la dérivation composée

$\mathcal{R}'$ est un référentiel en mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ autour d'un axe fixe par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Pour tout vecteur $\vec{A}(t)$:

$$\left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}(t)$$

Appliquons cette formule de dérivation à $\vec{OM}(t)$ pour composer les vitesses de M dans les deux référentiels.

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}(t) = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}(t).$$

Loi de composition des vitesses

La vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)$ d'un point M dans $\mathcal{R}$ et sa vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t)$ dans $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ par rapport à $\mathcal{R}$ autour de l'axe fixe contenant l'origine commune O de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont liées par la relation :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{v}_e(t)$$

où $\vec{v}_e(t) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}(t)$ est appelée **vitesse d'entraînement**.

Dérivons une seconde fois : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d(\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$, avec

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) \\ &= \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) \\ \text{et } \left. \frac{d(\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}(t)) \end{aligned}$$

Finalement : $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}(t)) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t)$.

L'expression de $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}(t))$ peut se simplifier en introduisant le projeté orthogonal H de M sur l'axe de rotation défini sur la figure 1.9.

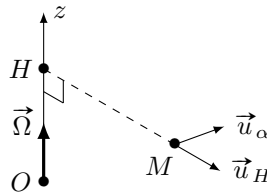


Figure 1.9. Projeté du point M sur l'axe de rotation.

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}(t)) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}(t)) = (\vec{\Omega} \cdot \vec{HM}(t)) \vec{\Omega} - \Omega^2 \vec{HM}(t) = -\Omega^2 \vec{HM}(t).$$

Loi de composition des accélérations

L'accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t)$ d'un point M dans $\mathcal{R}$ et son accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t)$ dans $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ par rapport à $\mathcal{R}$ autour de l'axe fixe contenant l'origine commune O de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont liées par la relation :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{a}_e(t) + \vec{a}_c(t)$$

- $\vec{a}_e(t) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}(t)) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}(t)$ est l'**accélération d'entraînement**. H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation (Oz) : l'accélération d'entraînement est axipète.
- $\vec{a}_c(t) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t)$ est l'**accélération de Coriolis**.

L'accéléromètre fixe par rapport à la plateforme en rotation donne l'accélération d'entraînement. La figure 1.10 montre l'évolution de l'accélération d'entraînement en fonction de Ω^2 pour différentes positions de l'accéléromètre, en très bon accord avec l'expression théorique :

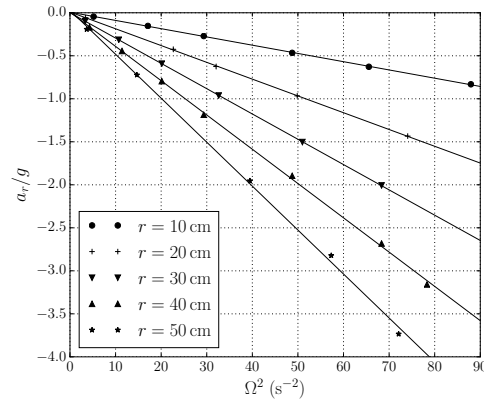


Figure 1.10. Accélération d'entraînement.

Méthode 1.1 : Composer les mouvements d'un point M dans deux référentiels

Pour composer les mouvements d'un point M dans deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

- Identifier le type de mouvement du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.
- Écrire la loi de composition des vitesses $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{v}_e(t)$ et utiliser l'expression de la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(t)$ adaptée à la situation.
- Écrire la loi de composition des accélérations $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{a}_e(t) + \vec{a}_c(t)$ en utilisant les expressions adaptées de l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(t)$ et de l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c(t)$.



Exercices (1.1) (1.2) (1.3)



L'accélération de Coriolis est nulle dans le cas d'un mouvement de translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ car $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

□ **Pourquoi un passager de l'attraction Gravitron est-il plaqué contre la paroi de la salle en rotation ?**

Tout se passe comme s'il subissait dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la salle une force liée à la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel terrestre : cette pseudo-force est qualifiée de **force d'inertie**.

□ **Qu'avons-nous obtenu expérimentalement ?**

Présentons les résultats obtenus à l'aide du pendule modèle placé sur la plateforme tournante. L'expérience est conduite en augmentant la vitesse du moteur par paliers d'un vingtaines de secondes, laissant le temps au pendule d'atteindre l'équilibre et à l'oscilloscope de calculer la période de rotation.

Le schéma simplifié de la figure 1.11 présente les notations qui seront utilisées pour le repérage du pendule dans le référentiel de la plateforme.

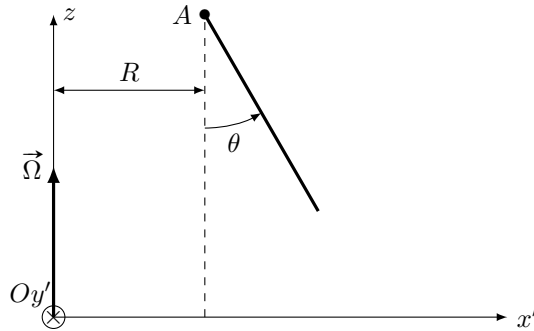


Figure 1.11. Schéma simplifié du pendule sur la plateforme.

Voici un exemple d'enregistrement de l'angle θ du pendule, réalisé pour $R = 45$ cm :

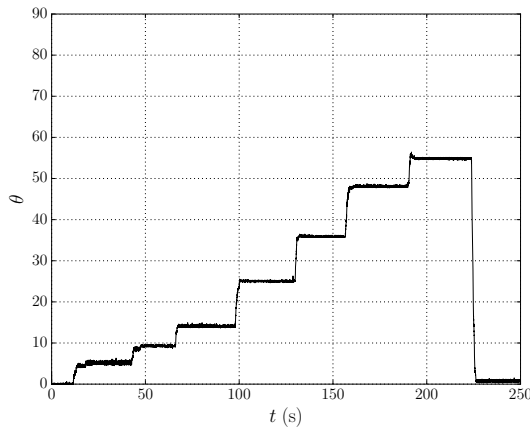


Figure 1.12. Enregistrement de l'angle d'équilibre avec $R = 45$ cm.

Il apparaît que l'angle d'équilibre atteint par le pendule au cours de chaque palier augmente au fur et à mesure que la vitesse angulaire de la plateforme augmente.

Nous souhaitons préciser l'expression de la force d'inertie qui déplace le pendule dans le référentiel de la plateforme et proposer une loi reliant cet angle d'équilibre θ_e à la vitesse angulaire Ω .

Le pendule étant réalisé à l'aide d'une barre en plexiglas de masse m_b et de longueur L sur laquelle est fixée un poids de masse $m \gg m_b$, il est possible pour simplifier l'étude de modéliser le pendule par le pendule simple représenté sur la figure 1.13 constitué d'un point M de masse m relié au point A par un fil sans masse de longueur L . Nous nous intéressons uniquement aux éventuelles positions d'équilibre du pendule.

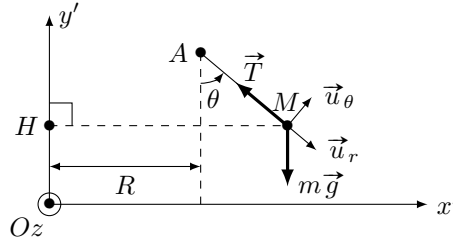


Figure 1.13. Modélisation par un pendule simple.

□ **Comment appliquer la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen ?**

Commençons par déterminer l'équation du mouvement du point M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ galiléen en lui appliquant la loi de la quantité de mouvement. En négligeant les frottements lorsque le pendule est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$, le point M est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la tension $\vec{T}$ de la tige. Ainsi : $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{T} + m\vec{g}$.

Utilisons alors la loi de composition des accélérations $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) + \vec{a}_e(t) + \vec{a}_c(t)$. Nous en déduisons : $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_e(t) - m\vec{a}_c(t)$, avec $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) = \vec{0}$ et $\vec{a}_c(t) = \vec{0}$ si M est immobile dans $\mathcal{R}'$.

Le terme $-m\vec{a}_e(t)$ s'ajoute ainsi aux forces subies par M et explique le déplacement observé du pendule par rapport au chariot. Nous notons ce terme $\vec{F}_{ie}$ et l'appelons **force d'inertie d'entraînement**. Le terme $-m\vec{a}_c(t)$ s'ajoute aussi aux forces subies par M lorsque celui-ci se déplace dans $\mathcal{R}'$. Nous notons ce terme $\vec{F}_{ic}$ et l'appelons **force d'inertie de Coriolis**.

Loi de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

La loi de la quantité de mouvement s'applique au point M de masse m dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Oz) par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen en ajoutant aux forces $\vec{F}_k$ subies par M les **forces d'inertie d'entraînement** $\vec{F}_{ie}(t)$ et de **Coriolis** $\vec{F}_{ic}(t)$:

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}(t) = \sum_k \vec{F}_k + \vec{F}_{ie}(t) + \vec{F}_{ic}(t)$$

avec $\vec{F}_{ie}(t) = -m\vec{a}_e(t) = -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}(t)) = +m\Omega^2 \overrightarrow{HM}(t)$ où H est le projeté orthogonal de M à l'instant t sur l'axe (Oz) et $\vec{F}_{ic}(t) = -m\vec{a}_c(t) = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t)$.



La force d'inertie d'entraînement est dirigée de l'axe de rotation vers l'extérieur, perpendiculairement à l'axe : elle est dite **axifuge**.

Utilisons la base polaire liée à M et projetons la loi de la quantité de mouvement suivant $\vec{u}_\theta$ en notant θ_e l'angle d'équilibre du pendule. Nous obtenons : $0 = -mg \sin(\theta_e) + m\Omega^2 HM \cos(\theta_e)$ avec $HM = R + L \sin(\theta_e)$. Ainsi : $\frac{\tan(\theta_e)}{R + L \sin(\theta_e)} = \frac{\Omega^2}{g}$.

Nous avons mesuré les angles d'équilibre θ_e avec un pendule de longueur $L = 11$ cm pour différentes positions du pendule (c'est-à-dire différentes valeurs de R) et différentes vitesses angulaires Ω puis nous avons tracé $\frac{\tan(\theta_e)}{R + L \sin(\theta_e)}$ en fonction de Ω^2/g (voir figure 1.14).

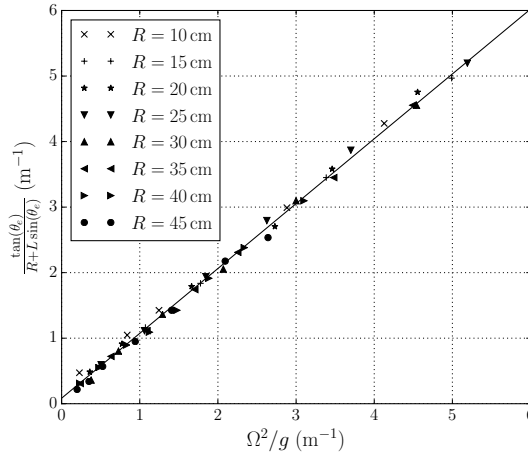


Figure 1.14. Enregistrement de l'angle d'équilibre pour différentes valeurs de R .

La loi liant θ_e à Ω est en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus.

□ **Comment appliquer le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}'$ non galiléen ?**

Le théorème du moment cinétique s'applique au point M dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Oz) par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen en ajoutant aux moments des forces $\vec{F}_k$ subies par M le moment des forces d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(t)$ et de Coriolis $\vec{F}_{ic}(t)$.

Théorème du moment cinétique par rapport à un point A fixe dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Oz) par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Si A est un point fixe de $\mathcal{R}'$, la dérivée temporelle dans $\mathcal{R}'$ du moment cinétique $\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}$ d'un point matériel M par rapport à A est égale au moment en A des forces appliquées à M , forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis incluses :

$$\left. \frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \sum_k \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_k) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{ic})$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe (Δ) fixe dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Oz) par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Si (Δ) est un axe orienté fixe dans $\mathcal{R}'$, la dérivée temporelle du moment cinétique $L_{\Delta/\mathcal{R}'}$ d'un point matériel M par rapport à (Δ) est égale au moment par rapport à (Δ) des forces appliquées à M , forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis incluses :

$$\frac{dL_{\Delta/\mathcal{R}'}}{dt} = \sum_k \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_k) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ie}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ic})$$

Appliquons le théorème du moment cinétique au pendule simple dans $\mathcal{R}'$ par rapport à l'axe (Az) fixe dans $\mathcal{R}'$. Nous obtenons : $-mgL \sin(\theta_e) + m\Omega^2 (R + L \sin(\theta_e)) L \cos(\theta_e) = 0$ à l'équilibre et retrouvons bien la relation obtenue à l'aide de la loi de la quantité de mouvement.

□ **Comment réaliser un bilan énergétique dans $\mathcal{R}'$ non galiléen ?**

Nous écrirons les théorèmes énergétiques dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen comme dans un référentiel galiléen en tenant compte de la force d'inertie d'entraînement.



La force de Coriolis ne travaille pas dans $\mathcal{R}'$! Pour nous en convaincre, écrivons la puissance de cette force dans $\mathcal{R}'$: $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_{ic}) = -2m \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) \right) \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t) = 0$.

Théorèmes énergétiques dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de rotation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen autour de l'axe (Oz) fixe dans $\mathcal{R}$.

- Théorème de la puissance cinétique dans $\mathcal{R}'$.

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique $E_{c/\mathcal{R}'}$ d'un point matériel M dans $\mathcal{R}'$ est égale à la puissance des forces appliquées à M , force d'inertie d'entraînement incluse :

$$\frac{dE_{c/\mathcal{R}'}}{dt} = \sum_k \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_k) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_{ie})$$

- Théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}'$.

La variation de l'énergie cinétique $E_{c/\mathcal{R}'}$ d'un point matériel M dans $\mathcal{R}'$ qui se déplace entre les instants t_1 et t_2 de la position M_1 à la position M_2 est égale à la somme des travaux des forces appliquées à M , force d'inertie d'entraînement incluse :

$$\Delta(E_{c/\mathcal{R}'}) = E_{c/\mathcal{R}'}(t_2) - E_{c/\mathcal{R}'}(t_1) = \sum_k W_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_k)_{M_1 \rightarrow M_2} + W_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_{ie})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Entre deux instants infiniment proches :

$$dE_{c/\mathcal{R}'} = \sum_k \delta W_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_k) + \delta W_{/\mathcal{R}'}(\vec{F}_{ie})$$

Montrons que la force d'inertie d'entraînement est conservative : $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \overline{HM} = m\Omega^2 r \vec{u}_H$ en utilisant la base cylindrique $(\vec{u}_H, \vec{u}_\alpha, \vec{u}_z)$. Le travail élémentaire $\delta W_{ie/\mathcal{R}'}$ de cette force lors du déplacement $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_H + r d\alpha \vec{u}_\alpha + dz \vec{u}_z$ est $\delta W_{ie/\mathcal{R}'} = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{\ell} = m\Omega^2 r dr = -d\left(-\frac{m\Omega^2 r^2}{2}\right)$. La

force $\vec{F}_{ie}$ est bien conservative et dérive d'une énergie potentielle $E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2(HM)^2$ définie à une constante additive près.

Énergie potentielle d'inertie d'entraînement

Dans le cas d'un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement de rotation uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen autour de l'axe (Oz) fixe dans $\mathcal{R}$, la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(t)$ subie par un point M est conservative.

L'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}_{ie}(t)$ s'écrit : $E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2(HM)^2$ à une constante additive près, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) .

La position d'équilibre du pendule simple sur la plateforme peut être retrouvée par une approche énergétique. Le poids et la force d'inertie d'entraînement étant conservatives, l'énergie potentielle de M s'écrit : $E_p = -mgL \cos(\theta) - \frac{1}{2}m\Omega^2(R + L \sin(\theta))^2 + \text{cste}$. Une position d'équilibre θ_e correspond à un extremum de E_p :

$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_e) = 0 = mgL \sin(\theta_e) - m\Omega^2(R + L \sin(\theta_e)) \cos(\theta_e)$. Nous retrouvons la position d'équilibre obtenue par les deux premières méthodes.

Par ailleurs, nous pouvons montrer que $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_e) > 0$: la position d'équilibre est stable.

Méthode 1.2 : Appliquer les lois et théorèmes de la dynamique dans un référentiel non galiléen

Pour étudier le mouvement d'un point M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen :

- Identifier le type de mouvement du référentiel d'étude $\mathcal{R}'$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
- Exprimer les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis subies par M .
- Choisir la loi ou le théorème de la dynamique adapté et l'appliquer comme dans un référentiel galiléen sans oublier d'ajouter aux forces subies par M les forces d'inertie.

➔ Exercices (1.4) (1.5)

□ **Comment mettre en évidence l'influence de la force de Coriolis ?**

La force de Coriolis n'est pas intervenue dans l'expérience précédente car elle était orthogonale au plan d'oscillation du pendule ($\vec{F}_{ic} \perp \vec{\Omega}$ et $\vec{F}_{ic} \perp \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t)$). Par ailleurs, la force de Coriolis était nulle à l'équilibre du pendule dans $\mathcal{R}'$.

Nous avons donc légèrement modifié le dispositif de l'expérience précédente en fixant un cadre pour soutenir un pendule pesant constitué d'une boule en fer suspendue par un fil en lin : l'extrémité du pendule n'est plus contrainte de se déplacer dans un plan vertical par rapport à $\mathcal{R}'$.

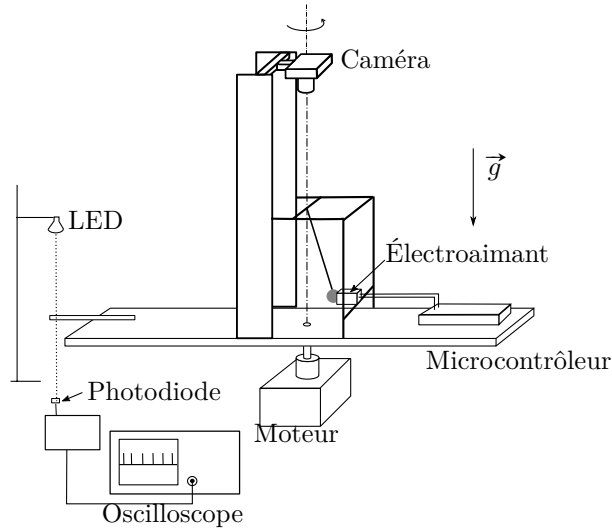


Figure 1.15. Mise en évidence de la force de Coriolis.

Un électroaimant fixé sur le cadre est alimenté par une pile *via* un transistor commandé par un microcontrôleur. Il est ainsi alimenté pendant 10s au début de l'expérience, le temps de retenir la boule pendant que le plateau est mis en rotation. Alors qu'une vitesse de rotation constante est atteinte, la boule est libérée sans vitesse initiale dans le référentiel du plateau. Son mouvement est observé par une caméra solidaire du plateau, fixée à environ 65 cm de hauteur.

Les positions du centre de masse G de la boule sont pointées et représentées sur les figures 1.16 et 1.17 respectivement pour des périodes de rotation du plateau $T = 12,3$ s et $T = 17,1$ s.

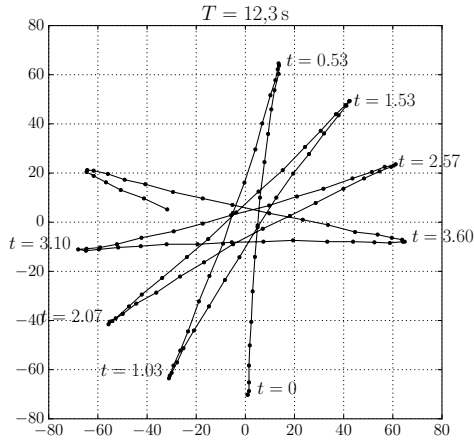


Figure 1.16. Mouvement du pendule pour $T = 12,3\text{ s}$.

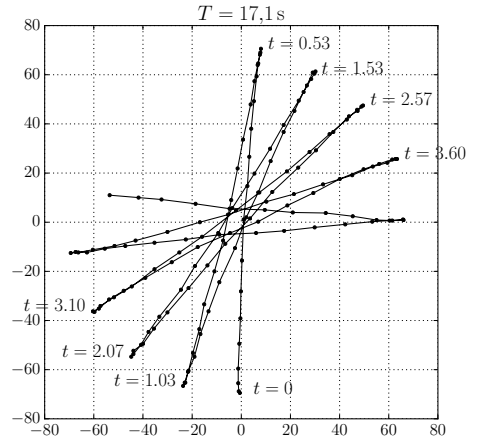


Figure 1.17. Mouvement du pendule pour $T = 17,1\text{ s}$.

Nous constatons que le plan d'oscillation du pendule dans $\mathcal{R}'$ tourne lui-même autour de l'axe (Oz) de rotation de la plateforme en sens inverse de celle-ci dans $\mathcal{R}$!

Le schéma de la figure 1.18 montre en vue de dessus le début de la trajectoire de G lorsqu'il est lâché de G_0 à l'instant $t = 0$. Le plan dans lequel oscillerait le point G si $\mathcal{R}'$ était galiléen est indiqué en pointillés. La force d'inertie d'entraînement étant axifuge, elle n'est pas responsable de la déviation observée au contraire de la force de Coriolis qui est perpendiculaire à la vitesse de G dans $\mathcal{R}'$.

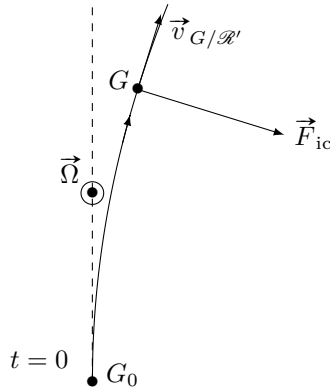


Figure 1.18. Force de Coriolis et rotation du plan d'oscillation du pendule.



Cette expérience rappelle la célèbre expérience du pendule de Foucault mettant en évidence la rotation de la Terre et par conséquent le caractère non galiléen du référentiel terrestre.

■ 3 Caractère galiléen d'un référentiel

Nous avons postulé avec bonheur le caractère galiléen du référentiel terrestre pour interpréter nos expériences. De façon générale, nous considérerons qu'un référentiel est galiléen si les résultats expérimentaux n'infirmes pas les résultats théoriques obtenus en appliquant les lois de la dynamique de Newton. Dans le cas contraire, nous devons tenir compte des forces d'inertie.

□ Le référentiel de Copernic est-il galiléen ?

Le repère associé au référentiel de Copernic $\mathcal{R}_c$ a pour origine le centre de masse du système solaire et possède trois axes pointant vers des étoiles « fixes ».

Il s'agit du meilleur référentiel galiléen possible pour un observateur situé dans le système solaire.



Le référentiel de Kepler $\mathcal{R}_k$ (ou héliocentrique) diffère du référentiel de Copernic puisque le repère qui lui est associé est centré sur le centre de masse du Soleil, proche du centre de masse du système solaire, ses axes pointant vers des étoiles « fixes ». En mouvement de translation par rapport au référentiel de Copernic, il est néanmoins lui aussi un excellent référentiel galiléen, adapté à l'étude du mouvement des planètes du système solaire.

□ Le référentiel géocentrique est-il galiléen ?

Le repère associé au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ est centré sur le centre de masse T de la Terre et doté de trois axes pointant vers des étoiles « fixes » : il est en mouvement de translation quasi-circulaire par rapport au référentiel de Kepler. Nous noterons R_g le rayon de l'orbite terrestre.

Nous avons utilisé ce référentiel en première année pour étudier le mouvement des satellites autour de la Terre. Était-il légitime de le supposer galiléen ?

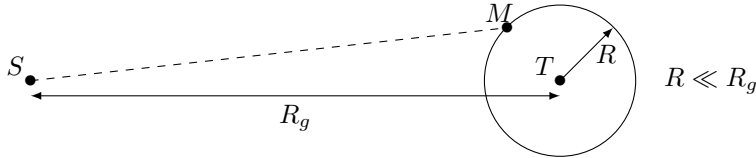


Figure 1.19. Satellite géostationnaire et caractère galiléen du référentiel géocentrique.

Envisageons le cas d'un satellite géostationnaire assimilé à un point M de masse m en orbite circulaire de rayon $R = 4,2 \cdot 10^4$ km. Appliquons la loi de la quantité de mouvement au satellite dans le référentiel géocentrique :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = m\vec{\mathcal{G}}_t(M) + m\vec{\mathcal{G}}_a(M) - m\vec{a}_e$$

La force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ où $\vec{a}_e = \vec{a}_{T/\mathcal{R}_k}$ traduit le caractère non galiléen de $\mathcal{R}_g$. $\vec{\mathcal{G}}_t(M)$ est le champ de gravitation de la Terre en M et $\vec{\mathcal{G}}_a(M)$ celui des autres astres (le Soleil et la Lune en particulier) au même point M .

L'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ s'obtient simplement en appliquant le théorème de la quantité de mouvement à la Terre dans le référentiel de Kepler galiléen :

$$m_t\vec{a}_{T/\mathcal{R}_k} = m_t\vec{\mathcal{G}}_a(T)$$

Ainsi, le mouvement du satellite M obéit à l'équation

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = m\vec{\mathcal{G}}_t(M) + m\left(\vec{\mathcal{G}}_a(M) - \vec{\mathcal{G}}_a(T)\right)$$

Le terme différentiel $\vec{\mathcal{G}}_a(M) - \vec{\mathcal{G}}_a(T)$ est négligeable devant le champ de gravitation terrestre car le rayon de la trajectoire du satellite est très petit devant la distance entre la Terre et les astres influents. Nous pouvons alors écrire :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} \approx m\vec{\mathcal{G}}_t(M)$$

Il est effectivement possible de supposer le référentiel géocentrique galiléen à condition de négliger la force de gravitation exercée par les autres astres que la Terre.

Cependant, le caractère non galiléen du référentiel géocentrique est impliqué dans l'explication du phénomène des marées. Le terme différentiel $\vec{\mathcal{G}}_a(M) - \vec{\mathcal{G}}_a(T)$ est d'ailleurs appelé **terme de marées**.

□ Le référentiel terrestre est-il galiléen ?

Nous supposons ici que le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen et que la Terre est parfaitement sphérique et de masse uniformément répartie.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ n'est en toute rigueur pas galiléen puisqu'il est en mouvement de rotation par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}_t$ quasi uniforme. La période de rotation, ou jour sidéral, est $T_t = \frac{2\pi}{\Omega_t} \simeq 24$ h.

Envisageons dans un premier temps un objet au repos par rapport à $\mathcal{R}_t$. La figure 1.20 présente le principe du fil à plomb : un point M de masse m est relié à un point fixe O dans $\mathcal{R}_t$ par l'intermédiaire d'un fil.



Figure 1.20. Pendule à l'équilibre.

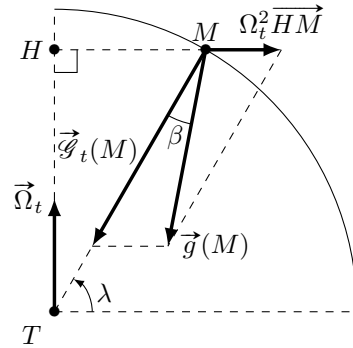


Figure 1.21. Pesanteur et latitude.

Définition : Verticale d'un lieu

Un fil lesté et immobile définit la verticale du lieu où il est situé.

Les forces s'exerçant sur M à l'équilibre dans $\mathcal{R}_t$ sont la tension $\vec{T}$ du fil, la force de gravitation terrestre $-G\frac{m_t m}{TM^3}\vec{TM} = m\vec{\mathcal{G}}_t(M)$ et la force d'inertie d'entraînement $m\Omega_t^2 \vec{HM}$, H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation de la Terre (voir figure 1.21). La force de Coriolis appliquée à M est nulle puisque M est au repos dans $\mathcal{R}_t$. Ainsi : $\vec{T} + m\vec{\mathcal{G}}_t(M) + m\Omega_t^2 \vec{HM} = \vec{0}$.

Nous appelons poids de M la force $\vec{P}(M)$ qui s'oppose à la tension $\vec{T}$ du fil à l'équilibre :
 $\vec{P}(M) = m\vec{\mathcal{G}}_t(M) + m\Omega_t^2 \overrightarrow{HM} = m\vec{g}(M)$, où $\vec{g}(M)$ est par définition le champ de pesanteur en M .

Poids d'un corps et champ de pesanteur

Le poids $\vec{P}(M)$ d'un point matériel M de masse m est la somme de la force de gravitation terrestre $m\vec{\mathcal{G}}_t(M)$ et de la force d'inertie d'entraînement $m\Omega_t^2 \overrightarrow{HM}$. Le champ de pesanteur $\vec{g}(M)$ est défini en M par $\vec{P}(M) = m\vec{g}(M)$.



Même en supposant la Terre parfaitement sphérique et homogène, la verticale d'un lieu ne passe pas en toute rigueur par le centre T de la Terre à cause de la force d'inertie d'entraînement, sauf aux pôles et à l'équateur.

L'effet de la force d'inertie d'entraînement est maximal à l'équateur : comparons alors les termes de gravitation et d'inertie pour un point situé au voisinage de la surface terrestre. $R_t = 6,4 \cdot 10^3$ km étant le rayon de la Terre, $\frac{R_t^2 \Omega_t^2}{GM_t/R_t^2} \simeq 3 \cdot 10^{-3}$: le terme d'inertie représente au maximum 0,3 % du terme de gravitation. En supposant la Terre parfaitement sphérique, la norme de g varie ainsi de $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ aux pôles à $9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à l'équateur.



L'aplatissement de la Terre et la répartition inhomogène de sa masse sont d'autres causes importantes de la variation du champ de pesanteur avec la latitude.

Estimons maintenant l'angle β entre la verticale en M situé à la latitude λ et la direction TM (voir figure 1.21). Nous pouvons écrire :

$$\frac{\Omega_t^2 \overrightarrow{HM}}{\sin(\beta)} = \frac{g(M)}{\sin(\lambda)}. \text{ Comme } g(M) \simeq \mathcal{G}_t(M), \sin(\beta) = \frac{\Omega_t^2 R_t \cos(\lambda) \sin(\lambda)}{g(M)} \simeq \frac{\Omega_t^2 R_t^3 \cos(\lambda) \sin(\lambda)}{GM_t}.$$

À Rennes, située à la latitude $\lambda = 48^\circ$: $\beta \simeq 2 \cdot 10^{-3}$ rad. Cet angle est extrêmement faible : la verticale du lieu passe quasiment par le centre de la Terre.



La force d'inertie d'entraînement liée au mouvement de rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique est prise en compte dans la définition du poids d'un objet. Le caractère non galiléen du référentiel terrestre repose donc sur l'importance de la force de Coriolis.

Dans la première expérience du pendule monté sur un chariot accéléré, évaluons la norme maximale de l'accélération de Coriolis au point M en supposant que la vitesse de M atteigne une valeur de l'ordre de $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

$\|\vec{a}_{ic}(M)\| = \|2\vec{\Omega}_t \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}_t}\| \simeq 2\Omega_t v_{M/\mathcal{R}_t} \simeq 4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \ll g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Il apparaît que la force de Coriolis est ici trop faible pour jouer un rôle significatif dans l'interprétation théorique de l'expérience : le référentiel terrestre peut dans ce cas être considéré comme galiléen.

La force de Coriolis, c'est-à-dire le caractère non galiléen du référentiel terrestre, joue en revanche un rôle important dans l'étude de phénomènes impliquant de grandes échelles de temps ou d'espace tels que les courants marins ou les déplacements des masses d'air atmosphérique.

Interro de cours

Dans l'expérience E1, un point matériel M de masse m est en mouvement de chute libre dans un train (référentiel $\mathcal{R}'$ repéré par $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$) en translation uniformément accéléré d'accélération $\vec{a} = a\vec{u}_x$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol, supposé galiléen et repéré par $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Dans l'expérience E2, le même point M glisse sans frottement dans le guide circulaire de rayon R solide d'un plateau (référentiel $\mathcal{R}'$ repéré par $(O, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$) tournant autour de l'axe fixe (Oy) vertical à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_y$ par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

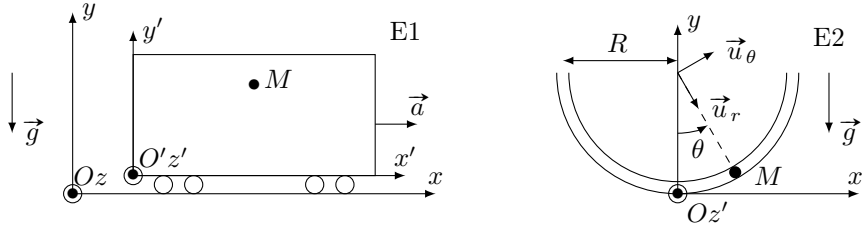


Figure 1.22. Présentation schématique des expériences E1 et E2.

Les questions **1.** et **2.** concernent l'expérience E1 alors que les questions **3.** et **4.** sont relatives à l'expérience E2.

Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

- 1.** Dans l'expérience E1, si le train possède une vitesse nulle à l'instant initial $t = 0$:
 - (a) $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e$ avec $\vec{v}_e = \vec{a}t$.
 - (b) $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ car $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$.
 - (c) $\mathcal{R}'$ est galiléen car en mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen.
- 2.** Les frottements sont négligés et $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur. Si M est lâché à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale depuis une hauteur h par rapport au plancher du train :
 - (a) Le mouvement de M est rectiligne dans $\mathcal{R}'$, le temps de chute vaut $\sqrt{(2h/g)}$.
 - (b) M subit dans $\mathcal{R}'$ une force d'inertie d'entraînement $m\vec{a}$.
 - (c) Le temps de chute est $\sqrt{(2h/g)}$ et la trajectoire parabolique dans $\mathcal{R}'$.
- 3.** La position du point M étant repérée par l'angle θ dans l'expérience E2 :
 - (a) Le vecteur rotation angulaire de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_y$.
 - (b) $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} - R\sin(\theta)\Omega\vec{u}_{z'}$.
 - (c) $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e$ avec $\vec{a}_e = -\Omega^2 R\sin(\theta)\vec{u}_{x'}$.
- 4.** Nous nous intéressons alors aux éventuelles positions d'équilibre de M dans $\mathcal{R}'$.
 - (a) La force de Coriolis appliquée à M est nulle lorsque M est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.
 - (b) M possède une énergie potentielle $E_p = -mgR\cos(\theta) - m\frac{\Omega^2}{2}R^2\sin^2(\theta) + \text{cste}$.
 - (c) $\theta_{e1} = 0$ est toujours une position d'équilibre stable.
 - (d) Si $g > R\Omega^2$, $\theta_{e2} = \arccos(g/R\Omega^2)$ est une position d'équilibre stable et $\theta_{e1} = 0$ est instable.

Exercices

Exercice 1.1 La rivière sauvage

➡ Méthode (1.1)

Gail, championne de raft, est contrainte par deux malfrats de remonter le cours de la rivière sauvage Bridal Creek. Elle se trouve dans un premier temps dans une zone où la vitesse de la rivière par rapport à la rive est constante, égale à $\vec{v}_e = v_e \vec{u}_x$ avec $v_e = 80 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Gail voudrait maintenir par rapport à la rive une vitesse de croisière $\vec{v}_a = -v_a \vec{u}_x$ avec $v_a = 2,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Quelle doit être sa vitesse $\vec{v}_r$ par rapport à la rivière pour atteindre ce but ?

Elle arrive alors à l'instant $t = 0$ dans une zone de rétrécissement, où le flot subit une accélération constante par rapport à la rive, $\vec{a}_e = a_e \vec{u}_x$ avec $a_e = 5,0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$.

2. Dans l'hypothèse où Gail commencerait par maintenir la même vitesse que précédemment par rapport à la rivière, déterminer ce que seraient :
 - a. Sa vitesse $\vec{v}_{a,1}(t)$ par rapport à la rive ; arrive-t-elle encore à progresser aussi vite que souhaité ?
 - b. Son accélération $\vec{a}_{r,1}(t)$ par rapport à la rivière.
 - c. Son accélération $\vec{a}_{a,1}(t)$ par rapport à la rive.
3. Elle décide immédiatement (à $t = 0$) de mettre les bouchées doubles, afin de continuer à maintenir la même vitesse de croisière par rapport à la rive qu'au début de son voyage. Déterminer alors :
 - a. Sa vitesse $\vec{v}_{r,2}(t)$ par rapport à la rivière. Sachant que la vitesse maximale pouvant atteindre Gail par rapport à la rivière est de $5,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, combien de temps pourra-t-elle maintenir cette cadence ?
 - b. Son accélération $\vec{a}_{a,2}(t)$ par rapport à la rive.
 - c. Son accélération $\vec{a}_{r,2}(t)$ par rapport à la rivière.

Exercice 1.2 Thierry se lâche!

➡ Méthode (1.1)

Se prenant pour son héros Thierry la Fronde, le petit Thierry, immobile sur un plateau de manège de centre O tournant à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical (Oz), brandit au-dessus de sa tête une fronde de rayon $r = 20 \text{ cm}$ à l'extrémité de laquelle se trouve un caillou assimilé à un point matériel M . On assimile Thierry à une tige Tz de hauteur $L = 155 \text{ cm}$. La fronde est en rotation à la vitesse angulaire ω' autour de Tz . Thierry est situé à la distance $R = 2,0 \text{ m}$ du centre du manège. On utilisera des bases polaires adaptées au problème.

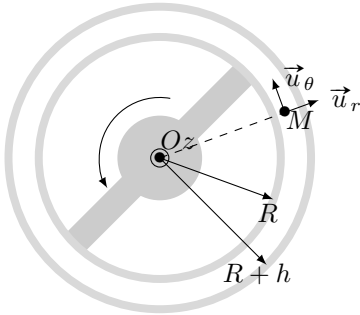
1. On considère le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au plateau tournant et le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol. Faire un schéma clair de la situation et caractériser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.
2. Déterminer l'expression de la position, puis de la vitesse et de l'accélération de M dans $\mathcal{R}'$.
3. Exprimer dans les bases choisies la vitesse d'entraînement en M , puis les accélérations d'entraînement et de Coriolis en M en considérant le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

4. En déduire les expressions de la vitesse et de l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Exercice 1.3 Elysium

➔ Méthode (1.1)

En 2517, la station spatiale Elysium est inaugurée et mise en marche par le président de l'humanité E. McRon.



De forme torique de section rectangulaire, Elysium tourne autour d'un axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω afin de créer une gravité artificielle de l'ordre de g .

La partie habitée de la station se situe entre les cylindres de rayons R et $R + h$ avec $h = 10 \text{ m} \ll R$.

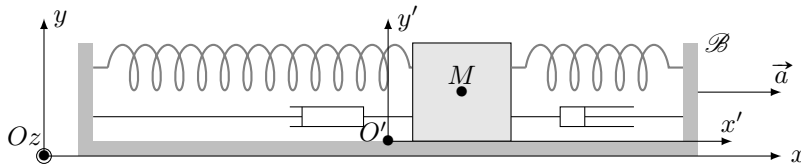
L'accélération de la pesanteur sur Terre est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Rappeler les expressions des accélérations d'entraînement et de Coriolis en un point M de la station situé à la distance r de l'axe (Oz). Préciser le champ de gravité artificiel $\vec{g}_A(r)$ généré par la rotation de la station. Les habitants marchent-ils sur le cylindre intérieur ou extérieur ?
2. La force de Coriolis doit être minimisée pour éviter des désagréments aux résidents. Estimer la vitesse angulaire maximale ω_m à ne pas dépasser pour que l'accélération de Coriolis subie par un habitant marchant à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\theta$ avec $v_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ n'excède pas $g/25$.
3. La station tourne autour de (Oz) à raison de 2,0 tours par minute. Quel rayon R permet d'obtenir une gravité de $1,0g$ en $R + h$? Calculer la variation relative de gravité entre $r = R$ et $r = R + h$. Conclure.

Exercice 1.4 Un accéléromètre qui ne manque pas de ressorts

➔ Méthode (1.2)

La figure ci-dessous schématise un accéléromètre destiné à mesurer une accélération suivant l'axe horizontal (Ox). Il est constitué d'une masse m assimilée à un point M et de deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 reliés à un boîtier $\mathcal{B}$ de longueur $2\ell_0$. Celui-ci subit une accélération $\vec{a} = a \vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen et repéré par ($O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$). Le référentiel $\mathcal{R}'$ du boîtier est repéré par ($O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}$) et M y a pour abscisse $x' = \vec{O'M} \cdot \vec{u}_{x'}$.



Outre les forces de rappel des ressorts, M subit la réaction du boîtier, une force de frottement fluide $-2hx' \vec{u}_{x'}$ (h étant le coefficient de frottement fluide) mais pas de frottements solides.

1. Préciser le type de mouvement du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ puis les éventuelles accélérations d'entraînement $\vec{a}_e$ et de Coriolis $\vec{a}_c$ dans $\mathcal{R}'$.
2. En appliquant la loi de la quantité de mouvement à M dans $\mathcal{R}'$, montrer que x' obéit à l'équation différentielle :

$$\ddot{x}' + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}' + \omega_0^2 x' = -a$$

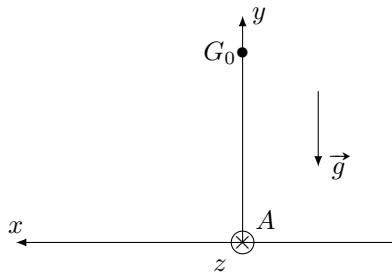
où ω_0 et Q sont des constantes qui seront explicitées en fonction des données.

3. L'accélération du boîtier est dorénavant sinusoïdale : $\vec{a}(t) = a_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$. Nous cherchons l'élongation x' en régime sinusoïdal établi en utilisant la notation complexe. L'amplitude complexe $\underline{X}'_m$ de l'élongation des ressorts est ainsi définie par $x'(t) = \text{Re}(\underline{X}'_m \exp(i\omega t))$.
 - a. Déterminer le lien entre $\underline{X}'_m$ et a_0 .
 - b. Montrer qu'il existe un domaine de fréquences dans lequel l'élongation $x'(t)$ est directement proportionnelle à l'accélération $a(t)$ du boîtier, avec $x'(t) = -\frac{m}{2k}a(t)$. Conclure.

Exercice 1.5 Mission impossible

➔ Méthode (1.2)

En mission (impossible) sur la station spatiale Elysium, Ethan se trouve une nouvelle fois dans une situation très délicate. Suspended au plafond juste au-dessus du dangereux trafiquant de hand spinner Erik Sinistro, des gouttes de sueur commencent à perler sur son front.



Le champ de gravité artificiel $\vec{g}$ dans la station est supposé uniforme. Ce champ est assuré par la rotation de la station autour d'un axe fixe par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ avec $\omega = 0,21 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la station est repéré par le repère $(A, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ dont l'origine A est prise sur le sommet du crâne de Sinistro.

Les frottements sont négligés et l'accélération de la pesanteur artificielle est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

À l'instant $t = 0$, une goutte de sueur tombe sans vitesse initiale du front d'Ethan. La goutte sera assimilée à un point matériel G de masse m repéré par ses coordonnées (x, y, z) . Sa position initiale est G_0 à l'ordonnée $y_0 = 9,0 \text{ m}$.

1. Le référentiel $\mathcal{R}$ n'étant pas galiléen, la goutte subit la force $m\vec{g}$ et la force de Coriolis $\vec{F}_{ic}$. Rappeler l'expression de $\vec{F}_{ic}$.
2. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à G dans le référentiel $\mathcal{R}$ et montrer que le mouvement de la goutte s'effectue dans le plan (Axy) .
3. Projeter la loi de la quantité de mouvement suivant (Ax) et (Ay) et simplifier le système obtenu en supposant que $|2\omega\dot{x}| \ll g$.
4. Déterminer alors l'abscisse x_f de la goutte lorsqu'elle arrive dans le plan $y = 0$ et conclure quant aux craintes d'Ethan d'être découvert. Discuter de la légitimité de l'hypothèse effectuée dans la question précédente.

Exercice 1.6 Servi sur un plateau

Parmi les nombreuses activités proposées à la Cité des Sciences de La Villette se trouve un manège destiné à mettre en évidence les forces d'inertie.

Ce manège est un plateau circulaire de rayon $a = 3$ m tournant autour de son axe vertical (Oz) fixe à la vitesse angulaire $\omega = 4$ tours $\cdot$ min $^{-1}$. L'animateur se place au centre O du plateau. Les visiteurs situés sur la périphérie du manège lui lancent des balles en mousse en le visant soigneusement. Pourtant, aucune de ces balles ne l'atteint.

On néglige tout frottement.

1. Que penser du référentiel $\mathcal{R}$ lié au plateau tournant ?
2. On envisage le lancer d'une balle assimilée à un point M de masse m . Faire un bilan des forces exercées sur la balle et expliquer qualitativement pourquoi la balle n'atteindra pas l'animateur visé.
3. La vitesse initiale de la balle est radiale de norme $v_0 = 20$ m $\cdot$ s $^{-1}$. Estimer de quelle distance la balle ratera sa cible.

Exercice 1.7 Bouclez vos ceintures!

Arnold S., champion d'haltérophilie, est persuadé qu'à la force de ses bras, il est capable de se retenir lors d'un crash automobile à vitesse réduite et décide ainsi de ne pas mettre sa ceinture lors de ses déplacements en ville. Prouvons à Arnold qu'il a tort.

Nous allons pour cela émettre les hypothèses suivantes :

- le choc est un choc frontal avec un mur et on considère l'origine des temps à l'instant de contact entre l'avant du capot et le mur ;
- juste avant le choc, le véhicule se déplace horizontalement selon l'axe (Ox), sa vitesse par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen étant $v_0 = 50$ km $\cdot$ h $^{-1}$;
- durant le choc, l'accélération du siège d'Arnold, $\vec{a} = a\vec{u}_x$, est de norme constante ;
- à la fin du choc, l'avant du véhicule s'est écrasé de $d = 90$ cm et le véhicule est immobile.

On précise que la masse d'Arnold est $m = 110$ kg.

1. Quel est le signe de a ? Déterminer la durée Δt du choc et montrer que $a = -\frac{v_0^2}{2d}$. Calculer numériquement a et Δt .
2. Dédire des résultats précédents la force d'inertie d'entraînement subie par Arnold. Sachant que le champion du monde d'haltérophilie dans la catégorie des plus de 105 kg soulève 215 kg à l'arraché, sera-t-il possible à Arnold de se retenir à la force des bras ?
3. D'après vous, sur quels paramètres physiques agit le port de la ceinture de sécurité ?
4. Commenter aussi l'affirmation de la sécurité routière : « un choc à 50 km $\cdot$ h $^{-1}$ non attaché correspond à une chute de 3 étages ».

On donne la valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m $\cdot$ s $^{-2}$.

Exercice 1.8 Centrifugés!

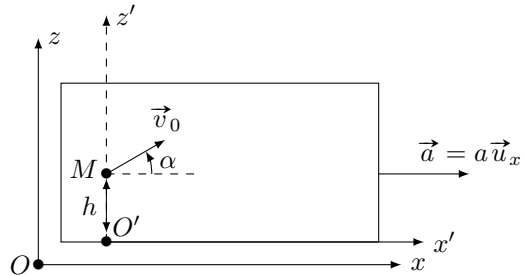
Afin de tester la résistance des cosmonautes à de fortes accélérations, on les introduit à l'intérieur d'une capsule située à l'extrémité A d'un bras horizontal OA de longueur $L = 10$ m, puis on met le bras en rotation à vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical (Oz).

À quelle vitesse angulaire tourne le bras lorsque l'accélération d'entraînement ressentie par le cosmonaute est égale à $9g$ sachant que l'accélération de la pesanteur est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

Exercice 1.9 Jet de Pierre

En voyage dans un TGV Paris-Rennes, Pierre s'ennuie et décide (contre l'avis de ses parents!) de lancer une bille M de masse $m = 50$ g dans la rame. Il l'envoie de la hauteur $h = 80$ cm vers le haut et vers l'avant du TGV avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$, de norme $v_0 = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et faisant l'angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. Le TGV est alors en phase d'accélération, d'accélération $a = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, et se déplace en ligne droite selon l'axe (Ox).

Les frottements sont négligés et l'accélération de la pesanteur est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

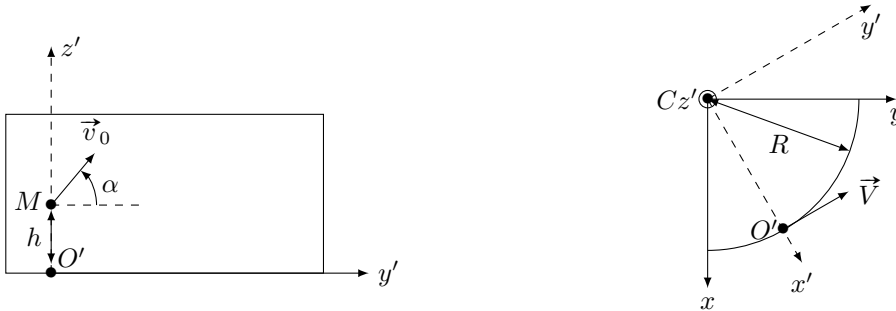


1. On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au TGV repéré par $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$, avec O' l'origine située sur le sol, à l'aplomb de la position initiale de la bille, $(O'x')$ axe horizontal dirigé vers l'avant du train et $(O'z')$ axe vertical ascendant. Caractériser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ le référentiel lié au sol repéré par $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
2. $\mathcal{R}$ est supposé galiléen. Discuter du caractère galiléen ou non de $\mathcal{R}'$.
3. Faire le bilan des actions que subit la bille dans $\mathcal{R}'$.
4. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à M dans $\mathcal{R}'$. En déduire les équations horaires du mouvement de la bille dans ce référentiel.
5. À quelle distance de Pierre la bille touchera-t-elle le sol?
6. Cette distance serait-elle la même si le TGV était à sa vitesse de croisière?

Exercice 1.10 Retour de fan

Revenant d'un match du Stade Rennais à Paris à bord d'un TGV, Erwan, grand supporter de ce club, décide d'imiter ses héros et lance son ballon de masse $m = 420 \text{ g}$ dans la rame. Le ballon, assimilé à un point M , est envoyé d'une hauteur $h = 50 \text{ cm}$ vers le haut et vers l'avant du TGV avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$ par rapport au wagon, de norme $v_0 = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et faisant l'angle $\alpha = 50^\circ$ avec l'horizontale. Le TGV est alors à sa vitesse de croisière de norme $V = 290 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, mais se déplace le long d'une courbe qu'on peut assimiler à une portion de cercle $R = 9,0 \text{ km}$ et de centre C .

On donne la valeur de l'accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



On note O' le point situé sur le sol du wagon, à l'aplomb de la position initiale du ballon. On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au TGV repéré par $(C, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ avec (Cx') axe horizontal dirigé de C vers O' et (Cz') axe vertical ascendant (voir la figure ci-dessus).

1. Caractériser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, le référentiel lié au sol repéré par $(C, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
2. $\mathcal{R}$ est supposé galiléen. Discuter du caractère galiléen ou non de $\mathcal{R}'$.
3. Faire le bilan des actions que subit le ballon dans $\mathcal{R}'$.
4. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à M dans $\mathcal{R}'$. En déduire l'évolution temporelle du vecteur $\vec{O'M}$ exprimé dans la base $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$. On pourra utiliser la notation complexe $\vec{u} = x' + iy'$ pour découpler le système d'équations différentielles.
5. À quel endroit le ballon touchera-t-il le sol du wagon ?

Exercice 1.11 Tir cadré ?

Un terrain de football est placé à la latitude $\lambda = 45^\circ$ et est orienté dans la direction est-ouest. Yves, physicien et footballeur amateur, s'entraîne à tirer des penalties au point de penalty situé à la distance $d = 11 \text{ m}$ de la ligne de but. Il tire droit devant lui vers l'ouest avec une vitesse initiale de norme $v_0 = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ faisant un angle $\alpha = 10^\circ$ avec l'horizontale.

La cage de but est longue de $L = 7,32 \text{ m}$ et haute de $h = 2,44 \text{ m}$. On donne la valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

En faisant les approximations qui s'imposent et en prenant en compte le caractère non galiléen du référentiel terrestre, répondre à la question suivante : Yves devra-t-il considérer la force d'inertie de Coriolis pour cadrer son tir ?

Corrections

Interro de cours

1. Le train étant en translation uniformément accélérée, l'accélération d'entraînement s'écrit $\vec{a}_e = \vec{a}$ et la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \vec{a}t$ puisque le train possède une vitesse nulle à $t = 0$. La loi de composition des vitesses donne la proposition (a). En revanche les propositions (b) et (c) sont fausses puisque l'accélération d'entraînement du train est non nulle (pas de mouvement de translation rectiligne uniforme entre les deux référentiels). Réponse (a).
2. Dans le référentiel du train non galiléen, le point M est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}$. D'où $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{g} - \vec{a}$. Par intégrations successives on obtient $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \frac{1}{2}(\vec{g} - \vec{a})t^2$ puisque $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(t=0) = \vec{0}$. Les équations horaires dans $\mathcal{R}'$ s'écrivent $x'(t) = x_0 - \frac{1}{2}at^2$ et $y'(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$. Le mouvement de M est donc rectiligne dans $\mathcal{R}'$ suivant la direction portée par $\vec{g} - \vec{a}$ et le temps de chute est $t_c = \sqrt{2h/g}$ ($y'(t_c) = 0$). Réponse (a).
3. Le vecteur rotation angulaire de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_y$ et n'a pas de lien avec θ qui détermine la position du point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$. $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et d'après la loi de composition des vitesses : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e$ avec $\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \vec{\Omega} \wedge \vec{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oy) . Soit $\vec{v}_e = -R\Omega \sin(\theta)\vec{u}_{z'}$. La composition des accélérations proposée n'est pas juste puisqu'il manque l'accélération de Coriolis (l'accélération d'entraînement était correcte). Réponse (b).
4. Le point M est soumis dans le référentiel $\mathcal{R}'$ au poids $\vec{P}$, à la réaction du support $\vec{R}_N = -R_N\vec{u}_r$ et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 R \sin(\theta)\vec{u}_{x'}$. La force de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ est nulle à l'équilibre puisque la vitesse dans $\mathcal{R}'$ est nulle. Le poids et la force d'inertie d'entraînement dérivent d'une énergie potentielle telle que $E_p = -\int (\vec{P} + \vec{F}_{ie}) \cdot d\vec{\ell} + \text{cste}$ avec $d\vec{\ell} = R d\theta \vec{u}_\theta$ soit :

$$E_p = -mgR \cos(\theta) - m \frac{\Omega^2}{2} R^2 \sin^2(\theta) + \text{cste}.$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mR \sin(\theta) (g - \Omega^2 R \cos(\theta)) \text{ et } \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mgR \cos(\theta) - m\Omega^2 R^2 (2 \cos^2(\theta) - 1).$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \text{ donne trois positions d'équilibre : } \theta_{e1} = 0 \text{ et } \theta_{e2} = \pm \arccos\left(\frac{g}{R\Omega^2}\right).$$
 Le signe de la dérivée seconde nous renseigne sur la stabilité. $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{e1}) > 0$ si $g > R\Omega^2$, $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{e1}) < 0$ sinon et $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{e2}) > 0$ si $g < R\Omega^2$. Réponses (a) et (b).

1.1 La rivière sauvage

1. Gail évolue dans le référentiel de la rivière $\mathcal{R}'$ qui est en translation par rapport au référentiel de la rive $\mathcal{R}$. La loi de composition des vitesses donne $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ soit $\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e = (-v_a - v_e)\vec{u}_x$. On en déduit $\|\vec{v}_r\| = 1,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. Gail maintient sa vitesse précédente $\vec{v}_r$.
 - a. La loi de composition des vitesses donne $\vec{v}_{a,1}(t) = \vec{v}_r + \vec{v}_e(t)$ avec $\vec{v}_e(t) = \vec{a}_e t + \vec{v}_e$, soit $\vec{v}_{a,1}(t) = (-v_a - v_e + a_e t + v_e)\vec{u}_x = (a_e t - v_a)\vec{u}_x$. La vitesse de Gail dans le référentiel $\mathcal{R}$ diminue au cours du temps et elle n'arrive plus à remonter la rivière à la vitesse souhaitée.
 - b. Son accélération $\vec{a}_{r,1}(t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est nulle puisqu'elle maintient une vitesse constante par rapport à la rivière.
 - c. Son accélération $\vec{a}_{a,1}(t)$ par rapport à la rive s'obtient avec la loi de composition des accélérations ($\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$) : $\vec{a}_{a,1}(t) = \vec{a}_{r,1}(t) + \vec{a}_e(t) = a_e \vec{u}_x$.