

Daniel Fredon | Alexis Brès | Bérangère Godde | Jean-Noël Beury

MATHÉMATIQUES PHYSIQUE-CHIMIE INFORMATIQUE

MPSI-MP2I-MP-MPI

FORMULAIRE

9^e édition

DUNOD

l'intel

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

© Dunod, 2025
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-088476-6

Table des matières

Avant-propos	ix
--------------	----

Mathématiques

1. Analyse	1
-------------------	----------

1.1 Les nombres réels	1
1.2 Limites et continuité	1
1.3 Dérivation	3
1.4 Suites numériques	5
1.5 Intégration	7
1.6 Développements limités	11
1.7 Espaces vectoriels normés	12
1.8 Séries numériques	15
1.9 Suites et séries de fonctions	16
1.10 Séries entières	18
1.11 Équations différentielles linéaires	20
1.12 Calcul différentiel et optimisation	24

2. Algèbre générale	27
----------------------------	-----------

2.1 Raisonnement et vocabulaire ensembliste	27
2.2 Ensembles	29
2.3 Applications	31
2.4 Relations	33
2.5 Calculs algébriques	34
2.6 Fonctions circulaires et trigonométrie	35
2.7 Nombres complexes	37
2.8 Structures algébriques usuelles	42
2.9 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	45
2.10 Polynômes	48
2.11 Fractions rationnelles	52

3. Algèbre linéaire et multilinéaire	54
3.1 Systèmes linéaires	54
3.2 Espaces vectoriels	56
3.3 Applications linéaires	59
3.4 Matrices	62
3.5 Déterminants	65
3.6 Espaces préhilbertiens réels	67
3.7 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	69
3.8 Endomorphismes d'un espace euclidien	72
4. Calcul des probabilités	73
4.1 Dénombrement	73
4.2 Probabilités	74
4.3 Variables aléatoires	77
Physique	
1. Étude du signal	84
1.1 Propagation du signal	84
1.2 Interférences et diffraction	87
2. Électronique	88
2.1 Circuits électriques	88
2.2 Circuits linéaires du premier ordre	92
2.3 Oscillateurs libres et forcés	93
2.4 Filtrage linéaire	95
2.5 Logique séquentielle et stabilité (MPI)	97
2.6 Électronique numérique	99
3. Optique	103
3.1 Optique géométrique	103
3.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses	106
3.3 Déphasage et chemin optique	108
3.4 Les sources lumineuses	110
3.5 Les détecteurs de lumière	111
3.6 Superpositions d'ondes lumineuses	113
3.7 Interférences à N ondes (MP)	114
3.8 Interféromètres	115

4. Mécanique	116
4.1 Cinématique d'un point	116
4.2 Dynamique du point	120
4.3 Étude énergétique du point	122
4.4 Dynamique de particules chargées	125
4.5 Moment cinétique du point	126
4.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative	127
4.7 Cinématique et dynamique du solide	130
4.8 Référentiels non galiléens – cinématique	133
4.9 Référentiels non galiléens – dynamique	135
4.10 Lois de Coulomb du frottement solide	137
5. Thermodynamique	138
5.1 Description d'un système à l'équilibre	138
5.2 Changement d'état d'un corps pur	139
5.3 Transformations d'un système thermodynamique	141
5.4 Premier et second principes	142
5.5 Machines thermiques	145
5.6 Systèmes ouverts (MP)	146
5.7 Diffusion thermique	148
6. Électromagnétisme	154
6.1 Action d'un champ magnétique	154
6.2 Induction, auto-induction et couplage	155
6.3 Conversion de puissance électromécanique	157
6.4 Conservation de la charge électrique	158
6.5 Distributions de charge et champ électrostatique	161
6.6 Propriétés du champ électrostatique	163
6.7 Champs électrostatiques de distributions particulières	166
6.8 Analogie pour le champ de gravitation	168
6.9 Dipôles électriques	169
6.10 Champs magnétostatiques	171
6.11 Dipôles magnétiques	174
6.12 Équations de Maxwell	176
7. Ondes électromagnétiques	179
7.1 Les équations de propagation des champs	179

vi **Table des matières**

7.2 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	179
7.3 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	181
7.4 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	184
7.5 Dipôle rayonnant	187

8. Mécanique quantique 188

8.1 Introduction	188
8.2 Fonction d'onde	189
8.3 Particule libre	190
8.4 États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux	192

9. Éléments de physique statistique 194

9.1 Le facteur de Boltzmann	194
9.2 Statistique sur le système	195
9.3 Équipartition de l'énergie	196

Chimie

1. Transformations de la matière : Aspects thermodynamiques 199

1.1 Système physico-chimique	199
1.2 Transformation chimique d'un système	202
1.3 Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	205
1.4 Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	207

2. Transformations de la matière : Aspects cinétiques 210

3. Constitution de la matière 214

3.1 Structure des entités chimiques	214
3.2 Relations entre structure et propriétés physiques macroscopiques	216

4. État solide	218
4.1 Modèle du cristal parfait	218
4.2 Types de cristaux	221
5. Transformations chimiques en solutions aqueuses	223
5.1 Réactions acide-base	223
5.2 Réactions de précipitation	226
5.3 Réactions d'oxydo-réduction	228
5.4 Corrosion humide ou électrochimique	238

Informatique

1. Programmation en Python	240
1.1 Type. Liste. Fonction	240
1.2 Représentation graphique	246
1.3 Terminaison. Correction. Complexité	246
1.4 Algorithmes. Recherche dans une liste. Recherche par dichotomie	248
1.5 Lecture et écriture de fichiers	249
1.6 Matrices de pixels et images	250
1.7 Pile. File	254
1.8 Récursivité	255
1.9 Tris	256
1.10 Algorithme glouton	260
1.11 Graphes	261
1.12 Recherche d'un plus court chemin	266
1.13 Programmation dynamique	270
1.14 Intelligence artificielle	272

2. Bases de données	280
----------------------------	-----

Annexe A : Formulaire de trigonométrie	289
---	-----

1. Angles associés	289
2. Formules d'addition	289
3. Formules de duplication	289
4. Formules de linéarisation	290
5. Transformation de sommes en produits	290
6. Expressions en fonction de $t = \tan(a/2)$	290
7. Équations trigonométriques	290

Annexe B : Champs scalaires – champs vectoriels	291
1. Coordonnées cartésiennes	291
2. Propriétés	291
3. Coordonnées cylindriques	292
4. Coordonnées sphériques	293
Annexe C : Unités et constantes fondamentales	294
1. Unités du système international	294
2. Constantes fondamentales	295
3. Ordres de grandeur	296
Annexe D : Séries de Fourier des signaux classiques	297
1. Signal 1 : rampe	297
2. Signal 2 : triangle	297
3. Signal 3 : sinus redressé (double alternance)	297
4. Signal 4 : sinus redressé (monoalternance)	297
5. Signal 5 : porte	298
6. Signal 6 : impulsion	298
Annexe E : Classification périodique	299
Annexe F : Constantes chimiques	302
1. Constantes acido-basiques	302
2. Potentiels standard rédox	303
3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés	304
Index des mathématiques	305
Index de la physique	309
Index de la chimie	314
Index de l'informatique	316

Avant-propos

Ce formulaire s'adresse aux étudiants des classes préparatoires scientifiques de MPSI, MP2I puis de MP, MPI.

Pour chaque paragraphe, vous trouverez :

- la mention ❶ ou ❷ qui indique si c'est une notion de première ou de deuxième année ;
- parfois une indication MP2I, MPSI, MP ou MPI pour indiquer une notion spécifique au programme de telle ou telle filière.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, physique, chimie, informatique. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin de ce formulaire, un index vous permettra d'accéder rapidement à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire, en quelque sorte un anxiolytique sans les effets secondaires. Mais vous risquez toutefois une certaine accoutumance : quand vous aurez commencé à vous en servir, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépas, ne l'oubliez pas).

Bon travail et bon apprentissage !

Les auteurs

Mathématiques

1. Analyse

1.1 Les nombres réels

①

Parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

①

Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A .

$M = \sup A$ si :

$$\forall x \in A \quad x \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tous a, b de X tels que $a \leq b$, on a $[a, b] \subset X$.

1.2 Limites et continuité

①

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

①

Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

1

Relations de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur I , et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I , ou extrémité de I .

• Définitions

➤ On dit que f est *dominée* par g au voisinage de x_0 s'il existe $A > 0$ tel que $|f(x)| \leq A |g(x)|$ pour tout x d'un voisinage J de x_0 .

Notation : $f = O(g)$ ou $f \leq g$.

Si g ne s'annule pas sur J , cela signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée sur J .

➤ On dit que f est *négligeable* devant g , ou que g est prépondérant devant f , au voisinage de x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J de x_0 tel que l'on ait $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ pour tout x de J .

Notation : $f = o(g)$ ou $f \ll g$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

➤ On dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de x_0 , si on a $f - g = o(g)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Notation : $f \sim g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.

La relation $\underset{x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence. En particulier, si on sait que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, on en déduit que $f \underset{x_0}{\sim} h$.

• Exemples fondamentaux

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x} \quad \text{où} \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

Au voisinage de 0, on a :

$$|\ln x|^\alpha \ll x^\beta \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0.$$

• Propriétés des fonctions équivalentes

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

 Lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

• Équivalents classiques

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\underset{0}{\sim} x & ; & \quad \sin x \underset{0}{\sim} x & \quad ; & \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} ; \\ \ln(1+x) &\underset{0}{\sim} x & ; & \quad \tan x \underset{0}{\sim} x & \quad ; & \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \end{aligned}$$

1.3 Dérivation

① Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0 . On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

① Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \ (n \neq 0)$	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

① Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

f est strictement monotone sur I , dérivable en $f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

① Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

① Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

① Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leq f' \leq M$, alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leq K$, alors, pour tous x et x' de $]a, b[$,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

① Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a , alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a .

1 Fonction convexe

f est convexe sur I :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

$$x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

1 Fonction convexe dérivable

Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geq 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|.$$

1.4 Suites numériques

1 Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0$$

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

1 Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq x_n \leq v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l , alors la suite (x_n) est convergente vers l .

1 Suite extraite

La suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n) .

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

6 [1] Mathématiques

Théorème de Bolzano-Weierstrass : De toute suite bornée de réels ou complexes, on peut extraire une sous-suite convergente.

① Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

① Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

(u_n) est croissante ;

(v_n) est décroissante ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leq v_n$ pour tout n , alors elles convergent vers l_1 et l_2 . Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

① Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$.

Somme des n premiers termes :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

① Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n.$$

Terme général : $u_n = u_0 q^n$.

Somme des n premiers termes :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1$$
$$= n u_0 \quad \text{si } q = 1.$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.