Bouchaïb Radi
Abdelkhalak El Hami

CPGE scientifiques
1ère et 2e années

Aide-mémoire de maths

NOUVEAUX PROGRAMMES



ellipses

Références sciences

CPGE scientifiques
1ère et 2e années

Aide-mémoire de maths

Bouchaïb Radi
Abdelkhalak El Hami

ellipses

ISBN 9782340-075535
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2023
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet aide-mémoire correspond au nouveau programme de mathématiques (mai 2021) des classes préparatoires et il progresse au rythme de ce programme officiel. Il s'adresse également aux étudiants en licence universitaire.

L'ouvrage est organisé en cinq parties : Analyse, Algèbre générale, Algèbre linéaire, Algèbre bilinéaire et enfin la Probabilité. Il développe d'une manière progressive les différentes notions du programme des deux premières années préparatoires. Chaque partie est composée d'un certain nombre de chapitres.

Chaque chapitre rappelle les définitions, résultats et formules à connaître par l'étudiant. De nombreux exemples illustrent les points les plus compliqués. Il aborde successivement :

- l'analyse avec les suites, séries numériques, suites de fonctions et les équations différentielles ;
- les bases de l'algèbre, les nombres complexes, l'arithmétique et les polynômes ;
- les fondements de l'algèbre linéaire ;
- l'algèbre bilinéaire avec les différentes notions de base ;
- le calcul des probabilités.

Sa présentation synthétique et son index permettent de retrouver rapidement une formule, une définition ou les termes précis d'un résultat.

Cet aide est un outil de travail incontournable pour les élèves des classes préparatoires scientifiques ou des préparations intégrées des INSA, ENSAM, UT, etc. comme pour les étudiants de la licence universitaire scientifique. Il permet d'acquérir des bases solides en mathématiques et il peut devenir un indispensable compagnon d'étude.

Table des matières

Partie I Analyse **1**

1 Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral **3**
1.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes 3
1.2 Primitives et équations différentielles linéaires 14

2 Nombres réels et suites numériques **23**
2.1 Ensembles de nombres usuels 23
2.2 Propriété de la borne supérieure 24
2.3 Généralités sur les suites réelles 24
2.4 Limite d'une suite réelle 24
2.5 Suites monotones 26
2.6 Suites extraites 26
2.7 Traduction séquentielle de certaines propriétés 27
2.8 Suites complexes 27
2.9 Suites particulières 28

3 Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité **31**
3.1 Limites et continuité 31
3.2 Dérivabilité 37
3.3 Convexité 42

4 Analyse asymptotique **45**
4.1 Relations de comparaison : cas des fonctions 45
4.2 Développements limités 46
4.3 Relations de comparaison : cas des suites 49
4.4 Problèmes d'analyse asymptotique 50

5 Intégration **51**
5.1 Continuité uniforme 51
5.2 Fonctions continues par morceaux 51
5.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment 52
5.4 Sommes de Riemann 53
5.5 Lien entre intégrale et primitive 54
5.6 Formules de Taylor globales 58

6 Fonctions de deux variables réelles **59**
6.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues 59
6.2 Dérivées partielles 60
6.3 Dérivées partielles et composées 61

6.4 Extremums 62

7 Séries numériques et vectorielles **65**
7.1 Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie 65
7.2 Compléments sur les séries numériques 66

8 Suites et séries de fonctions, séries entières **67**
8.1 Suites et séries de fonctions 67
8.2 Séries entières 69

9 Fonctions vectorielles **73**
9.1 Dérivabilité en un point 73
9.2 Opérations sur les fonctions dérivables 73
9.3 Intégration sur un segment 75
9.4 Intégrale fonction de sa borne supérieure 76
9.5 Formules de Taylor 76

10 Intégration sur un intervalle quelconque **77**
10.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ 77
10.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ 78
10.3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque 78
10.4 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables 79
10.5 Intégration des relations de comparaison 79
10.6 Convergence dominée 80
10.7 Intégration terme à terme 80
10.8 Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre 81

11 Équations différentielles linéaires **83**
11.1 Généralités 83
11.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire 84
11.3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice 84
11.4 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants 85
11.5 Variation des constantes 85

12 Calcul différentiel et optimisation **87**
12.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles 87
12.2 Différentielle 87
12.3 Opérations sur les applications différentiables 89
12.4 Applications de classe $\mathcal{C}^1$ 89
12.5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie 90
12.6 Optimisation : étude au premier ordre 90
12.7 Applications de classe $\mathcal{C}^k$ 91
12.8 Optimisation : étude au second ordre 92

Partie II Algèbre générale **93**

13 Raisonnement et vocabulaire ensemblistes **95**
13.1 Rudiments de logique 95
13.2 Ensembles 97

13.3 Applications et relations 98

14 Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie 101
14.1 Sommes et produits 101
14.2 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot 102
14.3 Inégalités 104
14.4 Trigonométrie 105

15 Nombres complexes 107
15.1 Nombres complexes 107
15.2 Conjugaison et module 108
15.3 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie 108
15.4 Forme trigonométrique 110
15.5 Équations algébriques 110
15.6 Racines n-ièmes 111
15.7 Exponentielle complexe 111
15.8 Interprétation géométrique des nombres complexes 111

16 Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs 113
16.1 Divisibilité et division euclidienne 113
16.2 PGCD et algorithme d'Euclide 113
16.3 Entiers premiers entre eux 114
16.4 Nombres premiers 115
16.5 Congruences 116

17 Structures algébriques usuelles 117
17.1 Loi de composition interne 117
17.2 Structure de groupe 118
17.3 Structures d'anneau et de corps 119

18 Polynômes et fractions rationnelles 121
18.1 Anneau des polynômes à une indéterminée 121
18.2 Divisibilité et division euclidienne 122
18.3 Fonctions polynomiales et racines 123
18.4 Dérivation 124
18.5 Arithmérique dans $\mathbb{K}[X]$ 125
18.6 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ 125
18.7 Formule d'interpolation de Lagrange 125
18.8 Fractions rationnelles 126
18.9 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ 126

Partie III Algèbre linéaire 129

19 Espaces vectoriels et applications linéaires 131
19.1 Espaces vectoriels 131
19.2 Espaces de dimension finie 134
19.3 Applications Linéaires 135
19.4 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel 139

20 Matrices **141**
20.1 Matrices et applications linéaires 141
20.2 Changements de bases, équivalence et similitude 143

21 Groupe symétrique et déterminants **145**
21.1 Groupe symétrique 145
21.2 Déterminants 146

22 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées **149**
22.1 Compléments d'algèbre linéaire 149
22.2 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée 150
22.3 Polynôme caractéristique 150
22.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables 151
22.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables 151
22.6 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes 151
22.7 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée 152
22.8 Lemme de décomposition des noyaux 152
22.9 Polynômes annulateurs et réduction 152
22.10Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques 152

Partie IV Algèbre bilinéaire **153**

23 Espaces préhilbertiens réels **155**
23.1 Produit scalaire 155
23.2 Norme associée à un produit scalaire 155
23.3 Orthogonalité 156
23.4 Bases orthonormées 157
23.5 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie 157

24 Topologie des espaces normés **159**
24.1 Normes et espaces vectoriels normés 159
24.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé 161
24.3 Comparaison des normes 161
24.4 Topologie d'un espace normé 162
24.5 Étude locale d'une application, continuité 163
24.6 Applications linéaires et multilinéaires continues 165
24.7 Parties compactes d'un espace normé 165
24.8 Applications continues sur une partie compacte 165
24.9 Connexité par arcs 166
24.10Espaces vectoriels normés de dimension finie 166

25 Endomorphismes d'un espace euclidien **167**
25.1 Adjoint d'un endomorphisme 167
25.2 Matrices orthogonales 167
25.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien 168
25.4 Isométries vectorielles en dimension 2 169
25.5 Réduction des isométries 169
25.6 Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien 170
25.7 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs 170

Partie V Probabilité **172**

26 Dénombrement **175**
26.1 Cardinal d'un ensemble fini 175
26.2 Listes et combinaisons 176

27 Probabilités **177**
27.1 Probabilités sur un univers fini 177
27.2 Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini 179

28 Variables aléatoires discrètes **183**
28.1 Espaces probabilisés 183
28.2 Probabilités conditionnelles et indépendance 183
28.3 Variables aléatoires discrètes 185
28.4 Variables aléatoires indépendantes 185
28.5 Lois usuelles 185
28.6 Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe 186
28.7 Variance d'une variable aléatoire, écart type et covariance 186
28.8 Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres 187
28.9 Fonctions génératrices 188

Tables statistiques **189**

Index **195**

Partie I

Analyse

Chapitre 1

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

1.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Généralités sur les fonctions

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sera dite fonction réelle d'une variable réelle. Pour toute fonction réelle d'une variable réelle, il existe un plus grand sous ensemble unique $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$, tel que f est une application de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ est appelé ensemble de définition de f. Par exemple, pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

L'ensemble de tous les couples $(x, f(x))$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ est appelé graphe de f et il est désigné par $\mathcal{C}_f$ (figure 1.1).

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \text{ tels que } x \in \mathcal{D}_f\}.$$

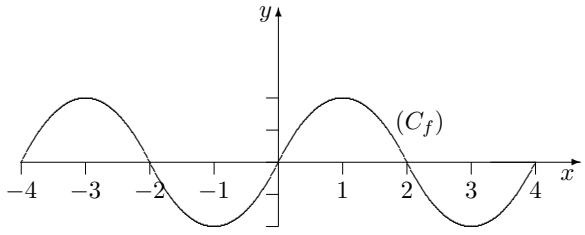


FIG. 1.1 – *Représentation graphique d'une fonction f*

Définition On dit que f est paire si

1. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $-x \in \mathcal{D}_f$
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = f(x)$.

Définition On dit que f est impaire si

1. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $-x \in \mathcal{D}_f$
2. pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = -f(x)$.

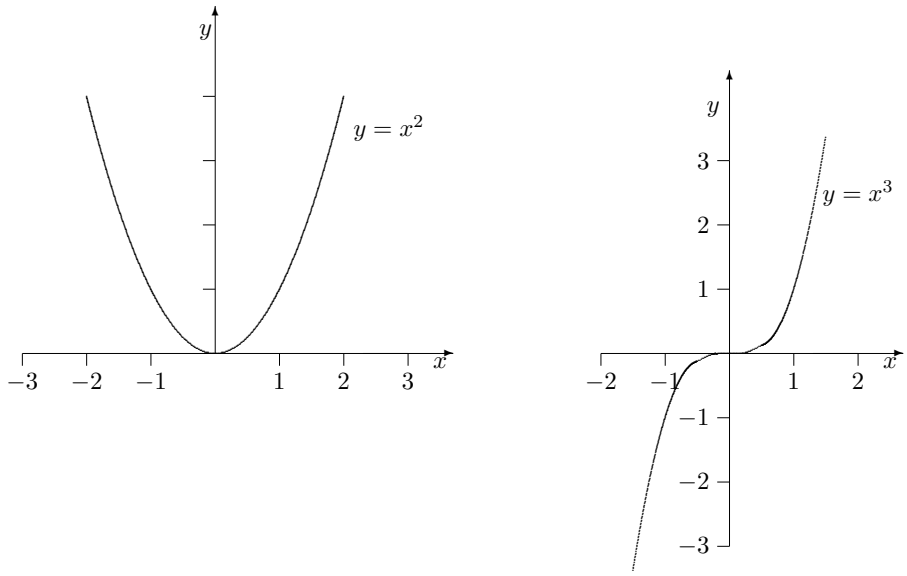


FIG. 1.2 – *Fonctions paire et impaire*

Application : La fonction réelle définie par $f(x) = x^2$ est paire, et la fonction réelle définie par $f(x) = x^3$ est impaire (figure 1.2).

Définition On dit que f est périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$, si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

1. $\forall x \in D_f$, $x + T \in D_f$,
2. $\forall x \in D_f$, $f(x + T) = f(x)$.

Application : Les fonctions réelles définies par $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ sont périodiques de période 2π.

Théorème (Opérations sur les fonctions) Soient f et g deux fonctions réelles.

- Addition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- Multiplication : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$;
- Composition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Définition (Monotonie) Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur une partie I de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est croissante sur I si pour tous x,$x' \in I$, on a
$$x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x').$$
2. On dit que f est strictement croissante sur I si pour tous x,$x' \in I$, on a
$$x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x').$$

3. On dit que f est décroissante sur I si pour tous x,$x' \in I$, on a
$$x \leq x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x').$$
4. On dit que f est strictement décroissante sur I si pour tous x,$x' \in I$, on a
$$x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x').$$
5. On dit que f est monotone sur I si elle est croissante sur I ou elle est décroissante sur I.

Application : La fonction $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$.

Définition (Fonction majorée, minorée, bornée) Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur une partie I de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est majorée sur I si l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est majoré.
2. On dit que f est minorée sur I si l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est minoré.
3. On dit que f est bornée sur I si l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est borné.

Applications

1. Les fonctions réelles f et g définies respectivement par $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$, sont majorées sur $\mathbb{R}$ par 1, minorées sur $\mathbb{R}$ par -1 et bornées sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction réelle définie par $f(x) = \exp(x)$, est non majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$ et non bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition Soient f une fonction réelle définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. On dit que f présente un maximum en a si $f(x) \leq f(a)$, pour tout $x \in I - \{a\}$,
2. On dit que f présente un maximum strict en a si $f(x) < f(a)$, pour tout $x \in I$,
3. On dit que f présente un minimum en a si $f(x) \geq f(a)$, pour tout $x \in I - \{a\}$,
4. On dit que f présente un minimum strict en a si $f(x) > f(a)$, pour tout $x \in I$.

Dans la figure (1.3), la fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$ par sa représentation graphique, présente un maximum en x_1 et un minimum en x_2.

Une fonction f est bornée si et seulement si $\mid f \mid$ est majorée.

Dérivation

Définition Soient f une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I. On dit que f est dérivable au point a si la limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$
existe et est finie. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée dérivée de f en a et est notée $f'(a)$.

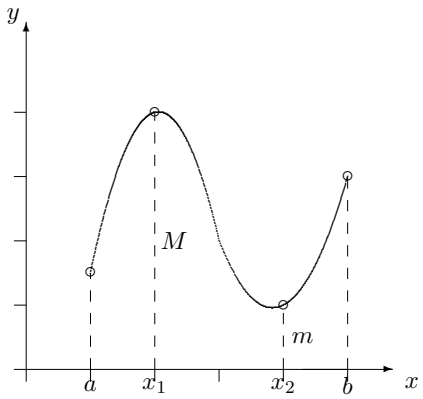


FIG. 1.3 – *Un minimum en x_2 et un maximum en x_1*

Définition Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$. L'application

$$f'\colon x \to f'(x),$$

est appelée fonction dérivée de f.

Définition (Equation de la tangente) Soient a un nombre réel, f une fonction réelle d'une variable réelle, dérivable au point a et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f par rapport à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point a. s'écrit :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Applications

1. Pour $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$, on a $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$.
2. Pour $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, on a $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$.
3. Pour $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$, on a $f'(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = -\sin(x)$.
4. Pour $f\colon x \to \ln x$ et $g\colon x \to \exp(x)$, on a $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = \exp(x)$.

Propriétés des fonctions dérivables

Soient a un nombre réel, f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle ouvert I contenant a et dérivables en a et soit λ un nombre réel. Alors

1. $f+g, fg$ et λf sont dérivables en a et l'on a

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a),\\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a),\\ (\lambda f)'(a) &= \lambda f'(a).\end{aligned}$$

2. Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et l'on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Soient I et J deux intervalles réels, f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur J. On suppose que $f(I)subsetJ$. Alors, $g\circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'.$$

Pour une fonction réelle f d'une variable réelle dérivable définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a

1. Pour que f soit croissante (resp. strictement croissante) sur I, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0\,(\text{resp. } f'(x) > 0).$$

2. Pour que f soit décroissante (resp. strictement décroissante) sur I, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0 \quad (\text{resp. } f'(x) < 0).$$

Corollaire 1.1 *Soit f une fonction réelle d'une variable réelle dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est constante sur I.*
2. *$\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.*

Définition (Tableau de variation) Etudier le sens de variation d'une variation d'une fonction numérique f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ c'est partager, lorsque c'est possible, D en un nombre fini d'intervalles tels que sur chacun d'eux f soit : ou bien constante, ou bien strictement croissante, ou bien strictement décroissante.
On indique ce sens de variation dans un tableau appelé tableau de variation.

Graphe d'une réciproque

Soit f une bijection continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Le graphe de la fonction réciproque f^{-1} est obtenu par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

Dérivée d'une réciproque

Soient f une bijection continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si la fonction f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable en $b = f(a)$ et l'on a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}$$

Définition (Dérivées successives) Soit f une fonction réelle dérivable sur I. Si la fonction dérivée

$$f' : x \to f'(x),$$

de I dans $\mathbb{R}$, est dérivable sur I, la fonction dérivée de f' sera appelée dérivée seconde de f en a et est notée $f''(a)$. Par récurrence, on définit la dérivée $f^{(p+1)}(a)$ d'ordre $p+1$ de f en a, c'est la dérivée (si elle existe) de l'application $f^{(p)} : x \to f^{(p)}(x)$.

Fonctions usuelles

Définition (Logarithme népérien,) On appelle logarithme népérien, la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Propriétés du logarithme népérien

- La fonction ln vérifie les propriétés suivantes :

$$\ln(1) = 0, \ \ln(ab) = \ln a + \ln b, \ \ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b), \ \ln(a^r) = r\ln(a),$$

  pour tous $a,b \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$.
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ y'(x) = \frac{1}{x}.$$

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante, non majorée ($\ln 2^n = n \ln 2$) et non minorée, donc,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

- Les limites classiques liées à la fonction logarithme sont :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0.$$

- La fonction logarithme népérien est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$; en particulier il existe un nombre réel unique e (qui est irrationnel), tel que $\ln e = 1$, avec une incertitude égale à 5.10^{-6}, $e = 2{,}71828$.

Définition (Exponentielle) La bijection réciproque de la fonction logarithme, est notée $x \longmapsto \exp x$. En fait, on a, $\exp x = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés de la fonction exponentielle

- La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ et satisfait aux propriétés suivantes :

$$\exp(\ln a) = a \quad (a > 0), \ln(\exp x) = x\,(x \in \mathbb{R}), \exp(0) = 1,$$
$$\exp(a+b) = \exp a \exp b, \ (\exp a)^b = \exp(ab), \quad (a,b \in \mathbb{R}).$$

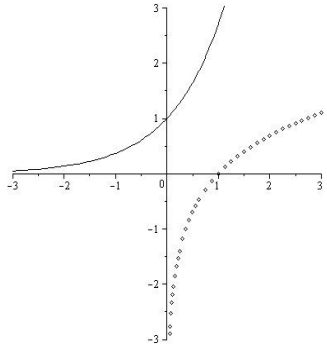


FIG. 1.4 – *Fonctions logarithme et exponentielle*

- Les limites classiques liées à la fonction exponentielle sont :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty \ , \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} x \exp x = 0.$$

- La fonction exponentielle est une bijection croissante, continue, dérivable et on a d'après la règle du calcul de la dérivée d'une fonction réciproque :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y' = \frac{1}{f'(\exp x)} = \exp x,$$

où $f(x) = \ln x$.

Définition (Fonction puissance) Soit α un réel. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \quad x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Dérivée de la fonction puissance

Soient α un réel et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$. La fonction f est dérivable et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Régles de calcul sur les puissances

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

Croissances comparées des différentes fonctions

Soient
$\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 \bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$$
$$\bullet \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Définition (Fonctions sinus, cosinus, tangente) • La fonction sinus notée sin est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et est impaire.

- La fonction cosinus notée cos est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et est paire.
- La fonction tangente notée tan définie sur $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, périodique de période π, et est impaire.

Propriétés de la fonction sin

- La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est : $\sin'(x) = \cos(x)$.
- La restriction de cette fonction à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ définit une bijection continue de cet intervalle sur $[-1,1]$; sa dérivée ne s'annule qu'aux points $\pm\pi/2$, d'images respectives ± 1.
- On a $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Propriétés de la fonction cos

- La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est : $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- La restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0,\pi]$ définit une bijection continue de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Sur cet intervalle, la fonction dérivée ne s'annule qu'aux points 0 et π, d'images respectives 1 est -1.
- On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Propriétés de la fonction tangente

- la fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$, sa dérivée est $\tan' x = 1 + \tan^2 x$.
- La restriction de cette fonction à $]-\pi/2, \pi/2[$ définit une bijection continue de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

Définition (Fonctions circulaires réciproques) • La fonction réciproque de la fonction sin, notée $\operatorname{Arcsin} x$, est une bijection continue de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$(y = \operatorname{Arcsin}(x),\ -1 \le x \le 1) \Leftrightarrow (x = \sin(y)\ ,\ -\pi/2 \le y \le \pi/2)\,.$$

- La fonction réciproque de la fonction cos, notée Arccos, est une bijection continue de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$:

$$(y = \operatorname{Arccos}(x),\ -1 \le x \le 1) \Leftrightarrow (x = \cos(y), 0 \le y \le \pi)\,.$$