

**Dominique Foata
Jacques Franchi
Aimé Fuchs**

Calcul des probabilités

**Cours, exercices
et problèmes corrigés**

3^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © L. Bouvier - Fotolia.fr

© Dunod, 2012, 2022 pour la nouvelle présentation
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084980-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Préface	ix
Préface de la première édition	x
Liste des symboles utilisés	xiii
CHAPITRE PREMIER. Le langage des probabilités	1
Un exemple. Le triplet fondamental. Suites infinies d'évènements. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 2. Les évènements	7
Les algèbres. Les tribus. Les systèmes de Dynkin. Les classes monotones. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 3. Espaces probabilisés	15
Probabilités. Propriétés. Formule de Poincaré et inégalité de Boole. Autres propriétés. Identités binomiales. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 4. Probabilités discrètes. Dénombrements	25
Probabilités discrètes. Équirépartition sur les espaces finis. En- sembles finis. Formules classiques de dénombrement. Le principe de réflexion. Compléments et exercices (problème des rencontres, le chevalier de Méré, boules et urnes).	
CHAPITRE 5. Variables aléatoires	43
Application réciproque. Fonctions mesurables. Variables aléa- toires. Loi de probabilité d'une variable aléatoire. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. La fonction de masse et les discontinuités de la fonction de répartition. Tribu engendrée par une variable aléatoire. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 6. Probabilités conditionnelles. Indépendance	53
Probabilité conditionnelle. Systèmes complets d'évènements. Pro- babilités définies par des probabilités conditionnelles. Évènements indépendants. Indépendance de classes d'évènements. Variables aléatoires indépendantes. Compléments et exercices (tirages avec et sans remise).	
CHAPITRE 7. Variables aléatoires discrètes. Lois usuelles	67
Variables aléatoires discrètes. La loi binomiale. La loi hyper- géométrique. La loi géométrique. La loi de Poisson. Complé- ments et exercices (problème des boîtes d'allumettes de Banach, poissonisation, le paradoxe de l'inspection).	

CHAPITRE 8. Espérance mathématique. Valeurs typiques	79
Transformation de variables aléatoires. Indépendance. Convolution des lois de probabilité discrètes. Espérance mathématique. Moments. Covariance. Le coefficient de corrélation linéaire. L'inégalité de Tchebychev. Les inégalités relatives aux moments dans le cas fini. Médiane, écart moyen minimum. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 9. Fonctions génératrices	99
Définitions. Propriétés. Sommes de variables aléatoires. Le théorème de continuité. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 10. Mesures de Stieltjes-Lebesgue. Intégrale des variables aléatoires réelles	113
Mesures. Mesures de Stieltjes-Lebesgue sur la droite. Mesure de probabilité induite par une fonction de répartition. Mesures de Stieltjes-Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Variables aléatoires réelles. Intégrale d'une variable aléatoire réelle par rapport à une mesure. Exemples. Propriétés de l'intégrale. Théorèmes de convergence. Compléments et exercices (comment probabiliser l'ensemble des suites infinies du jeu de « pile » ou « face »).	
CHAPITRE 11. Espérance mathématique. Lois absolument continues	129
Espérance mathématique d'une variable aléatoire. Mesures de probabilité produit et théorème de Fubini. Intégrale de Lebesgue. Lois de probabilité absolument continues. Les trois types de fonctions de répartition. Convolution. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 12. Variables aléatoires à deux dimensions ; espérance conditionnelle. Lois normales	141
Définitions et premières propriétés. Loi de probabilité absolument continue, densité de probabilité. Loi de probabilité conditionnelle, espérance mathématique conditionnelle, régression. Règles de calcul concernant les espérances conditionnelles. La loi normale à deux dimensions. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 13. Fonction génératrice des moments ; fonction caractéristique	159
Introduction. Propriétés élémentaires. Moments. Fonction caractéristique. Seconde fonction caractéristique. Fonction génératrice d'un vecteur aléatoire. Propriété fondamentale. Compléments et exercices.	

CHAPITRE 14. Les principales lois de probabilité (absolument continues)	177
La loi uniforme sur $[0, 1]$. La loi uniforme sur $[a, b]$. La loi normale ou de Laplace-Gauss. La loi Log-normale. La loi exponentielle. La première loi de Laplace. La loi de Cauchy. La loi gamma. La loi bêta. Les lois arcsinus. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 15. Lois de probabilité de fonctions de variables aléatoires	195
Cas à une dimension. Cas à deux dimensions. Loi de probabilité d'une fonction de deux variables aléatoires. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 16. Convergences stochastiques	205
Convergence en loi ou convergence étroite. Convergence en probabilité. Convergence en moyenne d'ordre $r > 0$. Convergence presque sûre. Comparaison des divers types de convergence. Convergence en loi de variables aléatoires à valeurs entières et absolument continues. Convergence étroite et convergence presque sûre. La convergence en loi d'un point de vue fonctionnel. Le théorème de Paul Lévy. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 17. Loi des grands nombres	225
La loi faible des grands nombres. La loi forte des grands nombres. Les lemmes de Borel-Cantelli. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 18. Le rôle central de la loi normale ; le théorème «central limit»	237
Aperçu historique. Le théorème «central limit». Le théorème «central limit» et la formule de Stirling. Le théorème de Lindeberg. Le théorème de Liapounov. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 19. La loi du logarithme itéré	251
Notations et lemmes préliminaires. Loi forte des grands nombres et théorème de Hardy-Littlewood. La loi du logarithme itéré. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 20. Applications des probabilités : problèmes résolus	273
Le problème des rencontres revisité. Un problème de temps d'atteinte. Acheminement du courrier par voie hiérarchique. Fractions continues. Une application de la formule de Bernstein. Le modèle de la diffusion d'Ehrenfest. Vecteurs uniformément répartis sur la sphère-unité de $\mathbb{R}^n$. Un problème de probabilité géométrique. Simulation par la méthode du rejet. Mesure des nombres réels bien approchables. Lois stables.	

Solutions des exercices	289
Index	341

PRÉFACE

Cette troisième édition du livre est réalisée par une nouvelle équipe de rédaction, notre collègue Aimé Fuchs nous ayant quittés en 2006. De nouveaux exercices ont été ajoutés et imprimés sur les pages laissées blanches dans les précédentes éditions. La même pagination a ainsi pu être conservée pour tous les chapitres de 1 à 19. Seul le chapitre 20 s'est vu agrémenté de trois nouvelles ouvertures du calcul des probabilités, à savoir la simulation, l'approximation rationnelle des nombres réels et l'étude des lois stables.

Strasbourg, le 2 décembre 2010

Dominique FOATA

Jacques FRANCHI

Département de mathématique

Université de Strasbourg

7, rue René-Descartes,

F-67084 Strasbourg

courr. élect. : `jacques.franchi@math.unistra.fr`

PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION

Cette nouvelle édition du livre conserve le même esprit que l'édition précédente : les éléments du calcul des probabilités sont exposés dans le corps des chapitres et les exercices proposés reçoivent des solutions souvent détaillées. L'ouvrage comporte vingt chapitres (le précédent en comportait dix-neuf). Les dix-neuf premiers chapitres n'ont pas été fondamentalement modifiés. Seules des améliorations locales ont été apportées : par exemple, des démonstrations plus élégantes de résultats ont été incluses, les coquilles notées par les auteurs ou relevées par les lecteurs dans la première édition ont été corrigées. Plus important, plusieurs nouveaux exercices ont été ajoutés. Enfin, certains exercices de la première édition qui n'avaient pas de solutions détaillées en ont maintenant une.

Un chapitre 20 intitulé *Applications des probabilités : problèmes résolus* a été ajouté. La solution de ces problèmes fait appel aux différentes techniques et méthodes présentées dans le livre, souvent de façon simultanée. Ce ne sont plus des *exercices*, mais des *problèmes inhabituels*, totalement résolus, qui fournissent également une *ouverture* vers d'autres branches des mathématiques.

Nous avons également ajouté la référence à l'ouvrage récent de Daniel Revuz sur la théorie de l'intégration et apporté dans le corps du texte plusieurs appels à référence à ce livre.

Pour la rédaction de cette nouvelle édition, nous avons bénéficié des remarques et suggestions de la part de plusieurs collègues. Nous remercions tout particulièrement Jean-Pierre Dion, qui a fait une lecture approfondie du précédent livre et a ainsi relevé plusieurs imperfections qui ont été corrigées dans cette nouvelle édition. Anatole Joffe a continué de nous faire bénéficier de toute son érudition. Nos deux collègues Wilbur Jonsson et Volker Strehl, qui ont bien voulu se charger, respectivement, des traductions anglaise et allemande du présent ouvrage, nous ont fait part de remarques judicieuses, quant au contenu mathématique lui-même. Nous remercions enfin d'autres lecteurs attentifs et notamment Edith Kosmanek, Michel Valadier.

Strasbourg, le 20 mars 1998

Dominique FOATA
Aimé FUCHS

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION

Ce cours de probabilités s'adresse aux étudiants de licence de mathématiques (bac+3) des Universités. Ils y trouveront aussi des éléments du calcul des probabilités qui ne sont développés qu'en maîtrise (bac+4). On suppose de leur part une maîtrise des techniques de l'analyse mathématique telle qu'elle est enseignée dans les deux premières années des Universités ou dans les classes préparatoires aux Grandes Écoles et tout particulièrement des techniques sur les séries numériques et les séries de puissances.

Ce bagage mathématique étant supposé acquis, nous avons délibérément pris le parti de développer, au début de ce livre, en fait durant les neuf premiers chapitres, une théorie des probabilités *discrètes*, reposant sur la seule technologie des séries, tout en distillant quelques notions plus avancées. Il est plus aisé de la sorte de s'initier aux idées probabilistes et de les reprendre ensuite dans le contexte d'une théorie de la mesure.

Comme le dit Pierre Cartier, la théorie de la mesure constitue pour les probabilités une hygiène indispensable. Autrefois, c'est-à-dire dans les années soixante, on pouvait disposer du livre de poche de Bauer [1], qui, en quelques pages, donnait ces règles d'hygiène. L'ouvrage n'est plus en librairie, il est remplacé par le premier tome du traité [2] du même auteur, dans lequel on retrouve un texte moins concis que celui du livre de poche. On peut encore trouver un excellent exposé des bases mathématiques du calcul des probabilités dans le manuel de Neveu [9].

De façon générale, les étudiants de licence suivent, parallèlement à un cours de probabilités, un cours de théorie de l'intégration. L'expérience montre qu'il faut un certain temps pour que les notions développées dans un tel cours soient bien utilisées dans d'autres matières. Il nous a donc paru indispensable de donner (dans les chapitres 10 et 11) des éléments de la théorie de la mesure et de l'intégration, pour les appliquer ensuite au traitement de l'espérance mathématique et des autres notions probabilistes dans le cas général.

Les chapitres ultérieurs traitent des variables aléatoires à plusieurs dimensions; on y présente une théorie de l'espérance conditionnelle pour les variables aléatoires absolument continues, ainsi qu'un exposé sur les lois normales à plusieurs dimensions. On y trouve aussi un traitement de la fonction génératrice des moments, une étude approfondie des principales lois de probabilités avec une indication des domaines d'activité dans lesquels on les rencontre, enfin un exposé sur les convergences stochastiques, la loi des grands nombres, le théorème «central limit» et la loi du logarithme itéré.

Cet ouvrage comporte de nombreux exercices, traditionnels comme le fameux problème des boîtes d'allumettes de Banach ou plus originaux, comme la «poissonisation» (voir chap. 7). La plupart reçoivent une solution détaillée.

Les théorèmes, propositions, lemmes ont une numérotation dépendant du paragraphe dans lequel ils apparaissent. Dans le chapitre 6, § 1, par exemple, on trouvera successivement le Théorème 1.1, puis la Proposition 1.2. Les remarques écrites à la suite l'une de l'autre sont numérotées 1, 2, ... sans référence au paragraphe qui les contient. Les définitions ne sont pas numérotées. Les formules centrées ont une numérotation entre parenthèses ne dépendant que du paragraphe dans lequel elles se trouvent. Les renvois aux théorèmes, propositions, lemmes, sont faits sous la forme : *cf.* Théorème 1.1 du chap. 6, par exemple.

Il y a aujourd'hui beaucoup de traités de probabilités, en beaucoup de langues. Il ne nous est pas possible de les citer tous. Nous ne pouvons pas cependant ne pas rendre hommage au premier d'entre eux, à celui qui a tant fait pour populariser le sujet et qui est toujours le premier succès mondial de librairie pour les ouvrages de mathématique, le fameux livre de Feller [3]. On y traite seulement de probabilités discrètes, mais avec un talent qui est resté inégalé.

En langue française, citons les ouvrages de Métivier [7] et Rényi [10], qui présupposent un bagage mathématique semblable à celui qui est demandé ici. Citons également la version anglaise du second ouvrage, entièrement repensée, contenant une étude tout à fait passionnante sur les fondements des probabilités [11]. Signalons aussi l'ouvrage récent de Grimmett et Stirzaker [4], aussi du niveau de la licence de mathématique; enfin, en langue italienne, l'élégant manuel de notre collègue Letta [6].

Il nous paraît utile enfin de citer en référence quelques traités de théorie de la mesure et de l'intégration, comme, par exemple, le livre de Munroe [8] ou celui de Jean [5].

Plusieurs collègues bienveillants nous ont apporté leurs conseils et nous ont fait part de remarques et corrections dans la lecture des premières versions du présent texte. Qu'il nous soit permis de remercier tout particulièrement Philippe Artzner, Milos Dostal, Xavier Fernique, Bernard Heinkel, Elisabeth Khalili, Giorgio Letta, Gérard Rauch, Gian-Carlo Rota, Raymond Sérout.

L'aide la plus efficace, la plus chaleureuse, la plus instructive aussi, nous a été apportée par Anatole Joffe, qui a bien voulu tester une première version de ce livre dans son enseignement des probabilités, lors de son séjour à Strasbourg au printemps 1995. C'est grâce à lui et à son talent que nous avons pu enfin boucler l'ouvrage qui était resté fragmentaire durant plusieurs années.

Mme Martine Lemonnier, directrice d'édition scientifique chez Masson a fait une relecture très précieuse du manuscrit, tout comme M. Sinnou David, le directeur scientifique de la Collection, pour la partie mathématique et nous ont suggéré plusieurs améliorations. Enfin, Mme Geneviève Bignet a réalisé une lecture du document final et nous a signalé plusieurs passages qui méritaient un meilleur traitement typographique. Nous les remercions tous trois très chaleureusement.

RÉFÉRENCES

- [1] Bauer (Heinz). — *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, Band I. — Berlin, Walter De Gruyter & Co., Sammlung Götschen Band 1216/1216a, 1964. Traduction anglaise : *Probability Theory and Elements of Measure Theory*. New York, Academic Press, 1971.
- [2] Bauer (Heinz). — *Maß und Integrationstheorie*, 2. Auflage. — Berlin, Walter De Gruyter & Co., 1990.
- [3] Feller (William). — *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, 3rd Edition. — New York, John Wiley & Sons, 1968.
- [4] Grimmett (G.R.) and Stirzaker (D.R.). — *Probability and Random Processes*, 2 vol., (with problems and solutions). — Oxford, Clarendon Press, 1992.
- [5] Jean (R.). — *Mesure et Intégration*. — Montréal, Presses de l'Université du Québec, 1975.
- [6] Letta (Giorgio). — *Probabilità elementare*. — Bologna, Zanichelli, 1993.
- [7] Métivier (Michel). — *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*. — Paris, Dunod, 1972.
- [8] Munroe (M.E.). — *Introduction to Measure and Integration*. — Reading, Mass., Addison-Wesley, seconde édition, 1970.
- [9] Neveu (Jacques). — *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. — Paris, Masson, 1964 ; réédition : 1970.
- [10] Rényi (Alfred). — *Calcul des probabilités avec un appendice sur la théorie de l'information*. — Paris, Dunod, 1966.
- [11] Rényi (Alfred). — *Foundations of Probability*. — San Francisco, Holden-Day, Inc., 1970.
- [12] Revuz (Daniel). — *Mesure et intégration*. — Paris, Hermann (Collection Méthodes), 1994.

Strasbourg, le 5 janvier 1996

Dominique FOATA
Aimé FUCHS

LISTE DES SYMBOLES UTILISÉS

- $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$: triplet fondamental, chap. 1 § 2
 $\mathfrak{P}(\Omega)$: l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω , chap. 1 § 2
 $\emptyset$: évènement impossible, chap. 1 § 2 Ω : évènement certain, chap. 1 § 2
 $A \subset B$: A implique B , chap. 1 § 2
 $A \cap B$ ou AB : conjonction de A et B , chap. 1 § 2
 $A \cup B$: union de A et B , chap. 1 § 2
 $A^c = \Omega \setminus A$: évènement contraire à A , chap. 1 § 2
 $A + B = A \cup B$ (si $A \cap B = \emptyset$) : chap. 1 § 2
 $A \setminus B$: différence de A et B , chap. 1 § 2
 $\bigcup_n A_n$: “au moins l'un des A_n se réalise”, chap. 1 § 2
 $\bigcap_n A_n$: “tous les A_n se réalisent”, chap. 1 § 2
 $\liminf_n A_n$: “tous les A_n se réalisent après un certain indice”, chap. 1 § 3
 $\limsup_n A_n$: “une infinité d'évènements A_n se réalisent”, chap. 1 § 3
 I_A : indicateur de A , chap. 1 § 3
 $\mathcal{P}$: l'ensemble de tous les intervalles semi-ouverts de la droite, chap. 2 § 1
 $\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$: la droite réelle, chap. 2 § 1
 $\mathfrak{T}(\mathcal{C})$: tribu engendrée par $\mathcal{C}$, chap. 2, § 2
 $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}^1$: tribu des boréliens de la droite, chap. 2, § 2
 $\mathcal{B}^n$: tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$, chap. 2, § 2
 $(\Omega, \mathfrak{A})$: espace probabilisable, chap. 2, § 2
 $\mathfrak{D}(\mathcal{C})$: système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$, chap. 2, § 3
 $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$: classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$, chap. 2, § 4
 $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$: espace probabilisé, chap. 3, § 1
 $(a)_n$: factorielle montante, chap. 3, § 5
 ${}_pF_q \left(\begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{smallmatrix}; x \right)$: la fonction hypergéométrique, chap. 3, § 5
 ε_{ω_0} : mesure de probabilité singulière en ω_0 , chap. 4, § 1
 $\text{card } A$ ou $|A|$: cardinal ou cardinalité de A , chap. 4, § 3
 $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$: ensemble des entiers naturels, chap. 4, § 3
 $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, chap. 4, § 3
 $[n]$: l'intervalle $\{1, 2, \dots, n\}$, chap. 4, § 3
 $\binom{p}{n}$: coefficient binomial, chap. 4, § 4
 $\binom{p}{n_1, n_2, \dots, n_k}$: coefficient multinomial, chap. 4, § 4
 X^{-1} : application réciproque, chap. 5, § 1
 $\{X \in B\}$: l'évènement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$, chap. 5, § 3
 $P(A_1, A_2)$: probabilité que A_1 et A_2 se produisent tous deux, chap. 5, § 3

- P_X ou $\mathcal{L}(X)$: loi de probabilité de X , chap. 5, § 4
 $F(x) = P\{X \leq x\}$: fonction de répartition de X , chap. 5, § 5
 $\pi(x)$: fonction de masse de X , chap. 5, § 6
 S_X : support de la variable aléatoire X , chap. 5, § 6
 $\mathfrak{T}(X)$: tribu engendrée par la variable aléatoire X , chap. 5, § 6
 $P\{\cdot | A\}$: mesure de probabilité conditionnelle A étant donné, chap. 6, § 1
 $B(n, p)$: loi binomiale, chap. 7, § 2
 $H(n, N, M)$: loi hypergéométrique, chap. 7, § 3
 $G(p)$: loi géométrique, chap. 7, § 4
 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$: droite achevée, chap. 7, § 4
 π_λ ou $\mathcal{P}(\lambda)$: loi de Poisson, chap. 7, § 5
 $P * Q$: produit de convolution de P par Q , chap. 8, § 3
 $\mathbb{E}[X]$: espérance mathématique de la variable discrète X , chap. 8, § 4
 ${}_am_r$: moment d'ordre r centré en a chap. 8, § 5
 $\text{Var } X$: variance de X , chap. 8, § 5
 $\sigma(X)$: écart-type de X , chap. 8, § 5
 e_r : écart absolu d'ordre r , chap. 8, § 5
 $\text{Cov}(X, Y)$: covariance de X et Y , chap. 8, § 6
 $r(X, Y)$: coefficient de corrélation linéaire de (X, Y) , chap. 8, § 7
 $\mathcal{M}$: ensemble de mesures de probabilité de support $\mathbb{N}$, chap. 9, § 1
 $\mathcal{M}'$: classe des variables aléatoires dont la loi appartient à $\mathcal{M}$, chap. 9, § 1
 $\mathcal{M}(s)$: ensemble des séries de puissance en bijection avec $\mathcal{M}$, chap. 9, § 1
 $G_P(s)$: fonction génératrice de la mesure de probabilité P , chap. 9, § 1
 $G_X(s)$: fonction génératrice de la variable aléatoire X , chap. 9, § 1
 $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$: espace mesuré, chap. 10, § 1
 $F\{\cdot\}$: mesure de Lebesgue-Stieltjes induite par F , chap. 10, § 2
 λ^1 ou λ : mesure de Lebesgue sur la droite réelle, chap. 10, § 2
 λ^n : mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, chap. 10, § 4
 $\overline{\mathcal{B}}$: tribu borélienne achevée, chap. 10, § 5
 $\int X d\mu$: intégrale de X par rapport à la mesure μ , chap. 10, § 6
 $\mathbb{E}[X]$: espérance mathématique de la variable aléatoire X , chap. 11, § 1
 $\int X d\lambda$ ou $\int X(x) dx$: intégrale de Lebesgue de X , chap. 11, § 3
 $\int X dF$: intégrale de Stieltjes-Lebesgue de X , chap. 11, § 4
 $f_{X,Y}(x, y)$: densité conjointe de (X, Y) , chap. 12, § 2
 $f_{Y|X}(\cdot | x)$: densité de Y conditionnelle à $\{X = x\}$, chap. 12, § 3
 $\mathbb{E}[Y | X = x]$: espérance de Y conditionnelle à $\{X = x\}$, chap. 12, § 3
 $\mathbb{E}[Y | X]$: espérance mathématique de Y en X , chap. 12, § 3
 tA : transposée de la matrice A , chap. 12, § 5
 $\mathcal{N}_2(0, \Gamma)$: loi normale centrée à deux dimensions, chap. 12, § 5
 $\mathcal{N}_2(\mu, \Gamma)$: loi normale à deux dimensions, chap. 12, § 5
 $g_X(u)$: fonction génératrice des moments de X , chap. 13, § 1
 $\varphi_X(t)$: fonction caractéristique de X , chap. 13, § 4
 $\psi_X(t)$: seconde fonction caractéristique de X , chap. 13, § 5
 κ_n : le $n^{\text{ième}}$ cumulatif de X , chap. 13, § 5

$g(u, v)$: fonction génératrice des moments de (X, Y) , chap. 13, § 6

$\mathcal{N}(0, 1)$: loi normale centrée, réduite, chap. 14, § 3

$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$: loi normale, chap. 14, § 3

$\mathcal{E}(\lambda)$: loi exponentielle, chap. 14, § 5

$C(0, 1)$: loi de Cauchy, chap. 14, § 7

$\Gamma(p, \lambda)$: loi gamma, chap. 14, § 8

$B(r, s)$: loi bêta, chap. 14, § 9

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$: X_n converge en loi vers X , chap. 16, § 1

$X_n \xrightarrow{p} X$: X_n converge en probabilité vers X , chap. 16, § 2

$X_n \xrightarrow{p.s.} X$: X_n converge presque sûrement vers X , chap. 16, § 4

CHAPITRE PREMIER

LE LANGAGE DES PROBABILITÉS

L'objet des trois premiers chapitres est de donner la description complète et les propriétés du triplet fondamental $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, maintenant adopté par tous les probabilistes pour une première adéquation mathématique de la notion de hasard. D'abord, il faut décrire les événements¹ attachés au phénomène considéré où intervient le hasard. C'est l'objet de ce présent chapitre. Ces événements apparaîtront comme des sous-ensembles du premier élément Ω du triplet. Pour permettre une manipulation aisée des événements, nous introduirons, au chapitre suivant, essentiellement une famille remarquable $\mathfrak{A}$ d'événements, qui obéit à des règles algébriques précises. Dans le troisième chapitre enfin, nous ferons l'étude du troisième élément P (la *mesure de probabilité*) et pourrons alors donner une pondération aux événements appartenant à la classe $\mathfrak{A}$.

1. Un exemple. — Imaginons une compagnie pétrolière, disposant d'un certain nombre de navires et désirant faire une étude rigoureuse de l'arrivée de ses pétroliers à leur port d'attache. Les aléas de la mer font que l'arrivée de ces pétroliers ne peut être prévue à l'heure près. Pour permettre l'analyse de ces arrivées, la compagnie doit considérer *a priori* une classe d'événements liés à ces arrivées, comme «pas d'arrivée le vendredi entre 8 heures et 10 heures», ou bien «les bateaux 1 et 2 arrivent le 8 janvier», ou bien «le pétrolier n° 2 tombe en panne en mer». Elle considère également une famille d'événements plus ponctuels ou élémentaires — on les appelle plus volontiers *épreuves* — comme «le pétrolier n° 2 arrive le vendredi 8 janvier à 9 heures». Appelons ω cette épreuve. Il est clair que l'événement A «pas d'arrivée le

¹ Voilà un mot qu'on rencontrera souvent dans cet ouvrage. On notera attentivement l'accentuation du mot. Comme nous l'a signalé le professeur Charles Muller de la Faculté des Lettres de Strasbourg, «la graphie avec accent aigu sur l'«e» de la deuxième syllabe n'a de justification ni phonétique, ni étymologique. Elle vient du fait qu'au dix-septième siècle, on n'utilisait l'accent grave que sur «a» (à) et sur «u» (comme dans «où», qui est, par ailleurs, le seul mot de la langue française comportant cette lettre accentuée!).» M. Muller ajoute : «Quand pour la troisième édition (1740) on décida de mettre un accent grave sur des mots comme «père», «funèbre», «allègre», etc., l'imprimeur de l'Académie, Coignard, n'avait pas fondu assez d'«e» avec accent grave. Dans de nombreuses pages, il ne mit que des «e» avec accent aigu. Lors de la quatrième édition (1762), quelques mots furent oubliés, dont *événement*, où subsista l'accent aigu, lequel devint au dix-neuvième siècle un objet de vénération puriste (également *allègrement*, *allègement*, etc.). Désormais la forme *événement* est la norme, l'autre restant correcte jusqu'à disparition de ses derniers adorateurs.»

vendredi entre 8 heures et 10 heures » ne se réalise pas dans l'épreuve ω , mais que l'évènement B « au moins l'un des bateaux 1 et 2 arrive le 8 janvier » se réalise en ω .

Pour étudier ce phénomène des arrivées, on est donc amené à introduire un *ensemble fondamental* Ω et à l'identifier à l'ensemble des couples (n, t) , où n désigne le numéro d'un pétrolier de la compagnie et t l'instant d'arrivée au port du pétrolier. L'épreuve ω considérée précédemment est alors l'élément $(2, (8, 9))$, où $(8, 9)$ désigne le 8 janvier, 9 heures. L'évènement B est identifié à l'ensemble de tous les éléments (n, t) , tels que $n = 1$ ou 2 et $(8, 0) \leq t \leq (8, 24)$. Dans cet exemple, on voit donc que l'appartenance « $\omega \in B$ » équivaut au fait que « B s'est réalisé dans l'épreuve ω ». Le langage d'*appartenance* provient de la théorie des ensembles, celui de la *réalisation d'évènements* du langage des probabilités. L'équivalence qui vient d'être décrite permet de passer constamment d'un langage à l'autre, comme il est précisé dans les paragraphes suivants.

2. Le triplet fondamental. — Ci-dessus, on a pu expliciter complètement l'ensemble fondamental Ω . Dans la plupart des cas cependant, on se borne à supposer l'existence d'un tel ensemble. Celui-ci fait partie d'un triplet $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ayant les propriétés suivantes :

- a) Ω est un ensemble non vide appelé *ensemble fondamental*; ses éléments ω sont appelés *épreuves*. L'ensemble Ω contient l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire.
- b) $\mathfrak{A}$ est une classe de sous-ensembles de Ω appelés *évènements*; un évènement est un fait attaché à l'expérience aléatoire et susceptible ou non de se produire. Si ω est une épreuve et A un évènement, on dit que *l'évènement A se réalise dans l'épreuve ω si et seulement si ω appartient à A* .

Dans les cas élémentaires, la classe $\mathfrak{A}$ des évènements est la plupart du temps égale à $\mathfrak{P}(\Omega)$, l'*ensemble de toutes les parties de Ω* (une notation qui est constamment utilisée par la suite), de sorte que tout sous-ensemble de Ω peut être considéré comme évènement. En particulier, tout singleton, c'est-à-dire tout sous-ensemble de la forme $\{\omega\}$, où ω est un élément de Ω , est un évènement appelé *évènement élémentaire*. A un stade plus élaboré de la théorie, il convient de ne pas supposer que la classe $\mathfrak{A}$ soit confondue avec $\mathfrak{P}(\Omega)$, de sorte qu'un singleton peut ne pas être un évènement; la notion d'évènement élémentaire est plutôt à proscrire. Toutefois, on cherche à faire en sorte que la classe $\mathfrak{A}$ obéisse à des règles algébriques commodes, comme celles d'une *tribu*.

- c) P est une *pondération* sur la classe $\mathfrak{A}$ des évènements. Dans le modèle que nous adoptons, P est une *mesure de probabilité* sur $\mathfrak{A}$. Le nombre $P(A)$ est appelé la *probabilité de A* .

Le modèle que nous venons de proposer permet de traduire dans le langage du calcul des probabilités la plupart des notions de la théorie des ensembles. En particulier, les opérations *logiques* sur les *évènements* vont maintenant être

des opérations *ensemblistes* sur les *parties* d'un ensemble. On utilise parfois simultanément le langage de la théorie des ensembles et celui des probabilités. Les notions suivantes sont d'un usage courant :

- 1) La partie vide $\emptyset$ est un évènement appelé *évènement impossible*; il ne se réalise dans aucune épreuve;
- 2) La partie pleine Ω est un évènement appelé *évènement certain*; il se réalise dans toute épreuve;
- 3) Soient A et B deux évènements. On dit que l'évènement A *entraîne* l'évènement B , si B se réalise (exactement) dans toute épreuve où A se réalise; autrement dit, si l'on a $A \subset B$.
- 4) Deux évènements A et B sont *équivalents*, si A entraîne B et B entraîne A ; autrement dit, si l'on a $A = B$.
- 5) La *conjonction* de deux évènements A et B est l'évènement qui se réalise exactement dans toute épreuve où A et B se réalisent tous deux. C'est donc leur *intersection* $A \cap B$.
- 6) La *réunion* de deux évènements A et B est l'évènement qui se réalise exactement dans toute épreuve où l'un au moins des évènements A , B se réalise. C'est donc $A \cup B$.
- 7) L'évènement *contraire* d'un évènement A est l'évènement qui se réalise exactement dans toute épreuve où A ne se réalise pas. C'est donc le *complémentaire* de A , que l'on note A^c ($= \Omega \setminus A$).
- 8) Deux évènements A et B sont *incompatibles* (ou *disjoints*) si leur conjonction est l'évènement impossible, autrement dit, si $A \cap B = \emptyset$.

Notations. — Lorsque les évènements A et B sont incompatibles, on notera $A + B$, plutôt que $A \cup B$, leur *réunion*. De même, on écrit $\sum_i A_i$ la réunion d'évènements A_i , deux à deux incompatibles. On utilise aussi la notation AB pour $A \cap B$.

La *différence* entre deux évènements A et B , dans cet ordre, notée $A \setminus B$, est l'évènement $A \cap B^c$. Lorsque $A \supset B$, on parle plus volontiers de la *différence propre* $A \setminus B$. Une suite d'évènements A_n est notée (A_n) ($n \geq 1$) ou simplement (A_n) . S'il s'agit d'une suite *finie*, on écrit, par exemple, (A_i) ($i = 1, 2, \dots, n$).

3. Suites infinies d'évènements

3.1. *Limites de suites d'évènements.* — Soit (A_n) une suite d'évènements. Dans la théorie des ensembles, la réunion $\bigcup_n A_n$ (on écrit encore $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$) de la suite (A_n) est l'ensemble des éléments $\omega \in \Omega$ ayant la propriété «il existe un entier n tel que $\omega \in A_n$ ». Dans le langage des probabilités, compte tenu de la transcription ci-dessus, l'évènement $\bigcup_n A_n$ est l'évènement «l'un au moins des A_n se réalise». De même, $\bigcap_n A_n$ est l'évènement «tous les A_n se réalisent».

Si la suite (A_n) est *croissante*, c'est-à-dire si l'on a $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n , la réunion $\bigcup_n A_n$ de la suite (A_n) est aussi appelée la *limite* de la suite. On écrit alors $\bigcup_n A_n = \lim_n A_n$, ou encore $A_n \uparrow \lim_n A_n$.

De même, si la suite (A_n) est *décroissante*, à savoir si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n , l'intersection $\bigcap_n A_n$ de la suite est encore appelée la *limite* de la suite. On écrit $\bigcap_n A_n = \lim_n A_n$ et $A_n \downarrow \lim_n A_n$.

Lorsqu'une suite (A_n) est ou bien croissante, ou bien décroissante, on dit qu'elle est *monotone*.

3.2. Limites inférieure et supérieure. — Une suite (A_n) d'évènements étant donnée, on peut toujours définir la limite inférieure et la limite supérieure de cette suite. La *limite inférieure* de la suite (A_n) est définie comme l'ensemble, noté $\liminf_n A_n$, de tous les éléments ω de Ω qui *appartiennent à tous les A_n sauf à un nombre fini d'entre eux*.

De même, la *limite supérieure* de la suite (A_n) est l'ensemble, noté $\limsup_n A_n$, de tous les éléments ω de Ω qui *appartiennent à A_n pour une infinité d'indices n* .

Exprimons les limites inférieure et supérieure en fonction des symboles union et intersection.

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit (A_n) une suite de parties d'un ensemble Ω . Alors*

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m; \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m;$$

$$\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n.$$

Démonstration. — Dire que ω appartient à tous les A_n sauf à un nombre fini, c'est dire qu'à partir d'un rang n , il appartient à l'intersection $B_n = \bigcap_{m \geq n} A_m$. Par conséquent, il existe un entier n tel que $\omega \in B_n$, ce qui prouve la première identité.

Le fait pour l'élément ω d'appartenir à une infinité de parties A_n veut dire qu'aussi loin qu'on peut aller dans la suite des entiers, disons à l'indice n , cet élément appartient toujours à la réunion $C_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$. Par conséquent, ω appartient à l'intersection de la suite (C_n) , ce qui établit la seconde identité.

L'inclusion est banale, car si ω appartient à $\liminf_n A_n$, il appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang, donc à une infinité d'évènements A_n . $\square$

Posons $A_* = \liminf_n A_n$ et $A^* = \limsup_n A_n$. On vérifie immédiatement les relations :

$$(3.2.1) \quad (A_*)^c = \limsup_n A_n^c \quad \text{et} \quad (A^*)^c = \liminf_n A_n^c.$$

Définition. — Si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$, on dit que la suite (A_n) a une *limite* et on écrit :

$$(3.2.2) \quad \lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n.$$

On dit encore que la suite (A_n) *tend vers $A = \lim_n A_n$ ou converge vers A* .