UNED cuadernos

Mecánica
Problemas explicados

Roberto Díaz Carril
Javier Fano Suárez

Roberto Díaz Carril
Javier Fano Suárez

MECÁNICA
PROBLEMAS EXPLICADOS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

MECÁNICA. PROBLEMAS EXPLICADOS

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamos públicos.

© *Universidad Nacional de Educación a Distancia*
Madrid, 2016

www.uned.es/publicaciones

© *Roberto Díaz Carril y Javier Fano Suárez*

ISBN electrónico: 978-84-362-7143-0

Edición digital: octubre de 2016

ÍNDICE

Prólogo
Geometría de masas
Cinemática
Estática
Dinámica
Percusiones
Mecánica analítica
Bibliografía

Aquí podrá encontrar información adicional
y actualizada de esta publicación

PRÓLOGO

Unas pocas palabras, antes de que los guarismos imperen, para hacer dos comentarios y expresar un deseo.

En primer término, decir que la presente colección de problemas, aunque guarde correspondencia con los propuestos en exámenes de la asignatura de Mecánica de segundo curso en la E. T. S. de Ingenieros Industriales de Gijón en los últimos cinco años, en su mayor parte es inédita.

En segundo lugar, manifestar que el espíritu que preside el libro es el de la insistencia en plantear los casos en que se pueden aplicar los distintos teoremas, con especial hincapié hacia el sistema de referencia en el que son válidos, y que ofrecemos distintos enfoques a la resolución de un mismo problema.

En fin, esperamos que quienes utilicen esta colección amplíen la base de sus conocimientos en esta rama de la Física y deseamos que la resolución de problemas no lo sea tanto.

ROBERTO D. CARRIL
M. JAVIER FANO S.
(Departamento de Física
de la Universidad de Oviedo)

GEOMETRÍA DE MASAS

1. *X* e *Y* **son los ejes principales de inercia en el centro de masas** *G* **de un sistema plano de 2 kg de masa. Se sabe que:**

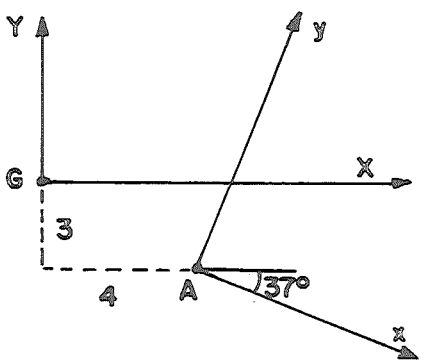
$$I_X = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_Y = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Se pide:

1.°) Tensor de inercia en *A*.

2.°) I_x, I_y.

3.°) Ecuación de la elipse de inercia de centro en *A*.



1.°) *Tensor de inercia en A*

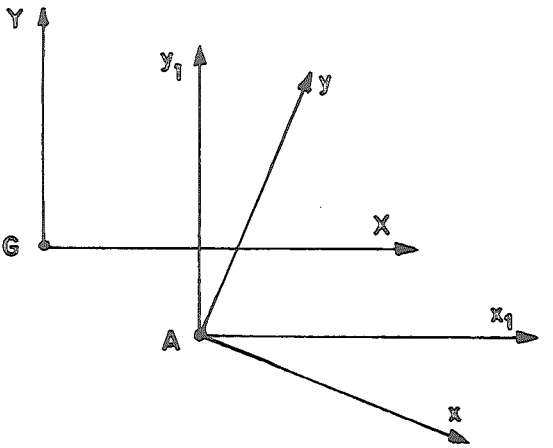
Calculamos primero los momentos y producto de inercia respecto a los ejes x_1, y_1, paralelos a los *X, Y,* en *A,* mediante el teorema de Steiner:

$$I_X = 10 \qquad I_Y = 20 \qquad P_{XY} = 0$$

$$I_{x_1} = I_X + md_1^2 = 10 + 2 \cdot 3^2 = 28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_1} = I_Y + md_2^2 = 20 + 2 \cdot 4^2 = 52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$P_{x_1y_1} = P_{XY} + md_1d_2 = 0 + 2 \cdot (-4) \cdot 3 = -24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



El tensor de inercia referido a estos ejes será:

$$\bar{\bar{I}}_A = \begin{Vmatrix} I_{x_1} & -P_{x_1y_1} \\ -P_{x_1y_1} & I_{y_1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 28 & 24 \\ 24 & 52 \end{Vmatrix}$$

2.°) I_x, I_y

El momento de inercia respecto a un eje que pasa por A y forma un ángulo θ con el eje x_1 en sentido antihorario es:

$$I_\delta = I_{x_1} \cos^2 \theta + I_{y_1} \operatorname{sen}^2 \theta - 2P_{x_1y_1} \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

Sustituyendo los valores se tiene para este caso:

$$I_x = I_{x_1} \cos^2 (-37°) + I_{y_1} \operatorname{sen}^2 (-37°) - 2P_{x_1y_1} \operatorname{sen} (-37°) \cos (-37°) = 13{,}6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_{x_1} \cos^2 53° + I_{y_1} \operatorname{sen}^2 53° - 2P_{x_1y_1} \operatorname{sen} 53° \cos 53° = 66{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Se podría haber hecho en forma matricial:

$$I_\delta = \bar{u}^t \cdot \bar{\bar{I}}_A \cdot \bar{u}$$

siendo $\bar{u}$ el unitario en la dirección del eje.

$$I_x = \begin{Vmatrix} \cos 37° & -\operatorname{sen} 37° \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 28 & 24 \\ 24 & 52 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos 37° \\ -\operatorname{sen} 37° \end{Vmatrix} = 13{,}6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = \begin{Vmatrix} \cos 53° & \operatorname{sen} 53° \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 28 & 24 \\ 24 & 52 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos 53° \\ \operatorname{sen} 53° \end{Vmatrix} = 66{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.°) *Elipse de inercia en A*

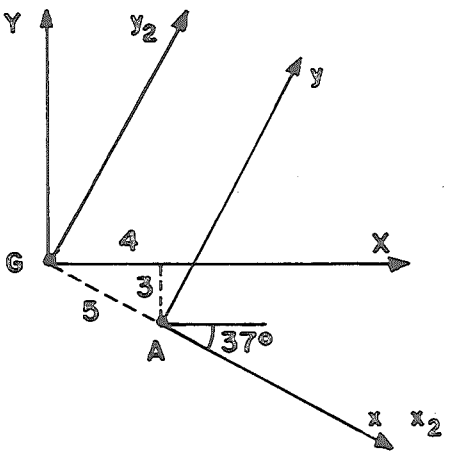
Referida a los ejes x_1, y_1, será:

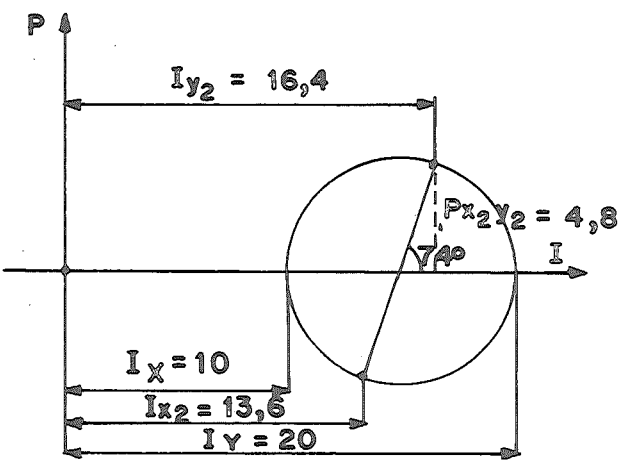
$$K^2 = 1 = I_{x_1}\xi^2 + I_{y_1}\eta^2 - 2P_{x_1y_1}\xi\eta = 28\xi^2 + 52\eta^2 + 48\xi\eta$$

donde hemos tomado $K = 1$

Otro método

Podemos calcular primero los momentos y el producto de inercia respecto a unos ejes x_2, y_2, paralelos a los x, y, con origen en G. Puede hacerse como en el caso anterior o mediante el círculo de *Mohr*. Aquí lo haremos siguiendo lo segundo.





Los momentos principales I_X, I_Y, se representan en el eje de abscisas y son los extremos del círculo. Haciendo la figura a escala, se hallan gráficamente los valores de I_{x_2}, I_{y_2}, $P_{x_2y_2}$. También se pueden obtener de las relaciones:

$$I_{x_2} = \frac{I_Y + I_X}{2} - \frac{I_Y - I_X}{2}\cos 2\theta = \frac{20+10}{2} - \frac{20-10}{2}\cos(2\cdot 37°) = 13{,}6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{y_2} = \frac{I_Y + I_X}{2} - \frac{I_Y - I_X}{2}\cos 2\theta = \frac{20+10}{2} + \frac{20-10}{2}\cos(2\cdot 37°) = 16{,}4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$P_{x_2y_2} = \frac{I_Y - I_X}{2}\operatorname{sen} 2\theta = \frac{20-10}{2}\operatorname{sen}(2\cdot 37°) = 4{,}8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Conocidos estos valores, aplicamos los teoremas de Steiner:

$$I_x = I_{x_2} + mD_1^2 = 13{,}6 + 2\cdot 0^2 = 13{,}6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_y = I_{y_2} + mD_2^2 = 16{,}4 + 2\cdot 5^2 = 66{,}4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$P_{xy} = P_{x_2y_2} + mD_1D_2 = 4{,}8 + 2\cdot 0\cdot 5 = 4{,}8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Con estos valores ya podemos contestar todos los apartados, aunque el tensor de inercia y la elipse de inercia los deberemos referir a los ejes x, y. Para referirlos a los x_1, y_1, como se hizo anteriormente, deberíamos calcular previamente I_{x_1}, I_{y_1}, $P_{x_1y_1}$, y esto resulta mucho más cómodo por el primer método.

Se haría:

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 37° + I_y \operatorname{sen}^2 37° - 2P_{xy} \operatorname{sen} 37° \cos 37° = 28 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{y_1} = I_x \cos^2 127° + I_y \operatorname{sen}^2 127° - 2P_{xy} \operatorname{sen} 127° \cos 127° = 52 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$P_{xy} = -(I_{y_1} - I_{x_1}) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + P_{x_1y_1}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \rightarrow P_{x_1y_1} = -24 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

2. El tensor de inercia de un sistema plano en unos ejes x, y, que contienen al c.d.g. es:

$$\begin{Vmatrix} m\rho_x^2 & 0 \\ 0 & m\rho_y^2 \end{Vmatrix} \qquad \begin{array}{l} m \equiv \textbf{masa total del sistema} \\ \rho_x, \rho_y \equiv \textbf{radios de giro} \end{array}$$

1.°) Demostrar que la elipse central de inercia puede representarse por la ecuación

$$\frac{\xi^2}{(1/\rho_x)^2} + \frac{\eta^2}{(1/\rho_y)^2} = 1 \qquad (\xi, \eta) \in \textbf{elipse de inercia}$$

2.°) Sean X, Y, unos ejes cualesquiera para los que se cumple:

$$I_X = m(\rho_x^2 + \lambda\rho_y^2) \qquad P_{XY} = m\mu(\rho_y^2 - \rho_x^2)$$

Si ambos ejes son perpendiculares y pasan por el c.d.g., demostrar que $\lambda \in (-^{\circ}, 1)$ y que $\mu \in (-1/2, 1/2)$.

3.°) X_1 contiene al punto $(0, -\sqrt{2})$ y al vector $3\bar{i} - 4\bar{j}$. Hallar I_{X_1}.

4.°) Siendo $\rho_x > \rho_y$, justifique que si s es una recta que forma un ángulo ϕ con el eje x, en sentido antihorario, sucede que:

a) I_s decrece si $\phi < \pi/2$.

b) I_s crece si $\phi > \pi/2$.

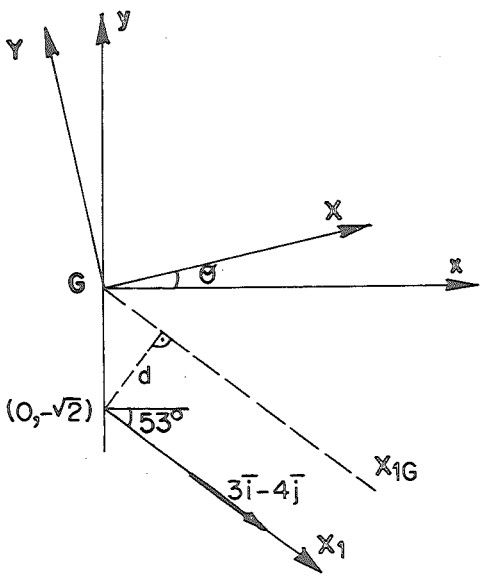
1.°) De la matriz de inercia que nos da el enunciado, se ve que $P_{xy} = 0$. Esto nos dice que los ejes x, y, son los principales de inercia.

Además:

$$I_x = m\rho_x^2 \qquad I_y = m\rho_y^2$$

La elipse central de inercia tiene centro en G, siendo su ecuación, referida a unos ejes coincidentes con las direcciones principales:

$$I_1\xi^2 + I_2\eta^2 = K^2$$



Como en este caso x e y son los ejes principales, se tiene:

$$I_1 = I_x \qquad I_2 = I_y$$

Por tanto:

$$I_x\xi^2 + I_y\eta^2 = K^2 \rightarrow \frac{\xi^2}{1/I_x} + \frac{\eta^2}{1/I_y} = K^2$$

Sustituyendo I_x e I_y y haciendo $K = \sqrt{m}$,

$$\frac{\xi^2}{1/m\rho_x^2} + \frac{\eta^2}{1/m\rho_y^2} = K^2 \rightarrow \frac{\xi^2}{(1/\rho_x)^2} + \frac{\eta^2}{(1/\rho_y)^2} = \frac{K^2}{m} = 1$$

que es lo que teníamos que demostrar.

2.°) Sean los ejes *X, Y,* indicados en la figura, que forman un ángulo θ con los *x, y,* en sentido antihorario. Se tiene:

$$I_X = I_x \cos^2\theta + I_y \operatorname{sen}^2\theta - P_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = m\rho_x^2 \cos^2\theta + m\rho_y^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Como nos dicen que $I_X = m(\rho_x^2 + \lambda\rho_y^2)$, identificamos

$$m(\rho_x^2 + \lambda\rho_y^2) = m(\rho_x^2 \cos^2\theta + \rho_y^2 \operatorname{sen}^2\theta) \rightarrow \lambda = \frac{\rho_x^2 \cos^2\theta + \rho_y^2 \operatorname{sen}^2\theta - \rho_x^2}{\rho_y^2} =$$

$$= \frac{\rho_y^2 \operatorname{sen}^2\theta - \rho_x^2(1-\cos^2\theta)}{\rho_y^2} = \frac{(\rho_y^2 - \rho_x^2)\operatorname{sen}^2\theta}{\rho_y^2} = \left(1 - \frac{\rho_x^2}{\rho_y^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta$$

Teniendo en cuenta que $0 \leqq \operatorname{sen}^2\theta \leqq 1$, la variación de λ será entre

$$\lambda = -^\circ \quad \text{para} \quad \rho_y = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \text{para} \quad \rho_x = 0$$

Por tanto: $\lambda \in (-^\circ, 1]$.

También se podía haber hecho a partir de I_Y.

$$I_Y = I_x \cos^2(\pi/2 + \theta) + I_y \operatorname{sen}^2(\pi/2 + \theta) = I_x \operatorname{sen}^2\theta + I_y \cos^2\theta$$

Sumando miembro a miembro a I_X, y teniendo en cuenta que

$$I_X + I_Y = I_x + I_y \rightarrow m(\rho_x^2 + \lambda\rho_y^2) + I_Y = m(\rho_x^2 + \rho_y^2) \rightarrow I_Y = (1-\lambda)m\rho_y^2$$

$$I_Y \geqq 0 \rightarrow 1 - \lambda \geqq 0 \rightarrow \lambda \leqq 1$$

Para demostrar que $\mu \in (-1/2, 1/2)$, partimos del producto de inercia P_{XY}.

$$P_{XY} = \frac{I_y - I_x}{2}\operatorname{sen}2\theta \rightarrow \frac{m\rho_y^2 - m\rho_x^2}{2}\operatorname{sen}2\theta = m\mu(\rho_y^2 - \rho_x^2) \rightarrow \mu = 1/2\operatorname{sen}2\theta$$

Y como $-1 \leqq \operatorname{sen} 2\theta \leqq 1 \rightarrow -1/2 \leqq \mu \leqq 1/2$.

3.°) Calculamos primero el momento respecto a un eje paralelo a X_1 que pase por G.

$$I_{X_{1G}} = I_x \cos^2(-53°) + I_y \operatorname{sen}^2(-53°) = \frac{m}{25}(9\rho_x^2 + 16\rho_y^2)$$

Aplicamos el teorema de Steiner, con $d = \sqrt{2}\cos 53° = \frac{3\sqrt{2}}{5}$:

$$I_{X_1} = I_{X_{1G}} + md^2 = \frac{m}{25}(9\rho_x^2 + 16\rho_y^2) + m\frac{18}{25} = \frac{m}{25}(9\rho_x^2 + 16\rho_y^2 + 18)$$

4.°) $I_s = I_x \cos^2\phi + I_y \operatorname{sen}^2\phi = m\rho_x^2 \cos^2\phi + m\rho_y^2 \operatorname{sen}^2\phi$

Derivando esta expresión con respecto a ϕ:

$$\frac{\partial I_s}{\partial \phi} = -2m\rho_x^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi + 2m\rho_y^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi = m\operatorname{sen}2\phi(\rho_y^2 - \rho_x^2)$$

$$\rho_x > \rho_y \rightarrow \begin{cases} 0 < \phi < \pi/2 \rightarrow \operatorname{sen}2\phi > 0 \rightarrow \dfrac{\partial I_s}{\partial \phi} < 0 \rightarrow I_s \text{ decrece al aumentar } \phi \\ \pi/2 < \phi < \pi \rightarrow \operatorname{sen}2\phi < 0 \rightarrow \dfrac{\partial I_s}{\partial \phi} > 0 \rightarrow I_s \text{ crece al aumentar } \phi \end{cases}$$

3. $\xi^2 + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\zeta^2}{3} = \frac{1}{ma^2}$ **es el elipsoide central de inercia de un cuerpo de masa** m **respecto a unos ejes** X, Y, Z. P **es un punto de coordenadas** $(a, -a/2, -a)$ **respecto a los ejes anteriores;** $\{x, y, z\}$, **es un triedro centrado en** P **y paralelo al** $\{X, Y, Z\}$. **Hallar:**

— **Valor de** a **para que el momento de inercia respecto a un eje que pasa por** P **y forma ángulos iguales con los** x, y, z, **coincida numéricamente con la masa.**

El elipsoide central de inercia referido a unos ejes coincidentes con las direcciones principales, y con $k = 1$, tiene por ecuación:

$$I_X\xi^2 + I_Y\eta^2 + I_Z\zeta^2 = 1$$

Operando en la ecuación que nos dan, se puede poner en la forma:

$$ma^2\xi^2 + \frac{1}{2}ma^2\eta^2 + \frac{1}{3}ma^2\zeta^2 = 1$$

de donde, identificando, resulta:

$$I_X = ma^2 \qquad I_Y = \frac{1}{2}ma^2 \qquad I_Z = \frac{1}{3}ma^2$$

Tomamos un sistema de coordenadas con origen en P y ejes paralelos a los X, Y, Z. Los llamamos x, y, z. Las coordenadas de G respecto a estos nuevos ejes serán: $G(-a, a/2, a)$.

El momento de inercia respecto a una recta δ que pase por P, y forme ángulos α, β y γ con los ejes x, y, z, es:

$$I_\delta = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2P_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ - 2P_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2P_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

Calcularemos los momentos y productos de inercia mediante los teoremas de Steiner.

$$I_x = I_X + md_x^2 = ma^2 + m(y_G^2 + z_G^2) = ma^2 + m(a^2/4 + a^2) = \frac{9}{4}ma^2$$

$$I_y = I_Y + md_y^2 = \frac{1}{2}ma^2 + m(x_G^2 + z_G^2) = \frac{1}{2}ma^2 + m(a^2 + a^2) = \frac{5}{2}ma^2$$

$$I_z = I_Z = md_z^2 = \frac{1}{3}ma^2 + m(x_G^2 + y_G^2) = \frac{1}{2}ma^2 + m(a^2 + a^2/4) = \frac{19}{12}ma^2$$

$$P_{xy} = P_{XY} + md_xd_y = 0 + m(-a)\cdot a/2 = -\frac{1}{2}ma^2$$

$$P_{xz} = P_{XZ} + md_xd_z = 0 + m(-a)\cdot a = -ma^2$$

$$P_{yz} = P_{YZ} + md_yd_z = 0 + m\cdot a/2\cdot a = \frac{1}{2}ma^2$$

ya que $P_{XY} = P_{XZ} = P_{YZ} = 0$, por ser X, Y, Z, las direcciones principales.

Como $\alpha = \beta = \gamma$, se tiene:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \rightarrow 3\cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3}$$

donde se han tomado sólo los valores positivos de las raíces. Sustituyendo:

$$I_\delta = \frac{9}{4}ma^2\frac{1}{3} + \frac{5}{2}ma^2\frac{1}{3} + \frac{19}{12}ma^2\frac{1}{3} + 2\frac{ma^2}{2}\frac{1}{3} + 2ma^2\frac{1}{3} - 2\frac{ma^2}{2}\frac{1}{3} = \frac{25}{9}ma^2$$

Como:

$$I_\delta = m \rightarrow \frac{25}{9}ma^2 = m \rightarrow a = 3/5$$

4. Sea una varilla homogénea de longitud a, y densidad λ kg/m. Se divide a la mitad obteniendo dos trozos. El izquierdo se vuelve a dividir a la mitad, con lo que la parte izquierda tendrá ahora una longitud $a/4$, y la derecha $3a/4$. Se repite la operación «n» veces, hasta que el momento de inercia del conjunto formado por ambos trozos respecto a un eje perpendicular a la varilla por el c.d.g. del trozo izquierdo sea mayor que $\lambda a^3/4$. Hallar:

1.°) Valor mínimo de n para el que ocurre.

2.°) Momentos de inercia máximo y mínimo del conjunto respecto a dicho eje y valores de n para los que se obtienen.

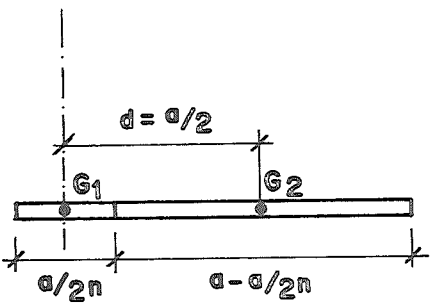
1.°) Las longitudes de ambos trozos para los sucesivos valores de n son:

Parte izquierda

$$a/2,\ a/4,\ a/8,\ \ldots,\ a/2^n$$

Parte derecha

$$a - a/2,\ a - a/4,\ a - a/8,\ \ldots,\ a - a/2^n$$



La distancia entre los c.d.g. de ambas partes tras la división n-ésima es:

$$d = \frac{1}{2}\frac{a}{2^n} + \frac{1}{2}a\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{a}{2}$$

que es, como vemos, independiente de n.

Para calcular el momento de inercia del conjunto, lo hacemos de cada parte y luego sumamos. Recordemos que el momento de inercia de una varilla homogénea respecto a un eje perpendicular a ella por su centro de masas es $1/12\ mL^2$, siendo m la masa y L la longitud.

Llamamos I_1 al momento de inercia del trozo izquierdo e I_2 al del trozo derecho. Se tiene:

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 L_1^2 = \frac{1}{12}\left(\lambda \frac{a}{2^n}\right)\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{12}\lambda \frac{a^3}{2^{3n}}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m_2 L_2^2 + m_2 d^2 = \frac{1}{12}\lambda a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)a^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2 + \lambda a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{a^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{12}\lambda a^3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2 + 3\right]$$

habiendo aplicado el teorema de Steiner para el cálculo de I_2.

Sumando resulta:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{12}\lambda a^3\left(4 - \frac{6}{2^n} + \frac{3}{2^{2n}}\right) = \frac{1}{12}\lambda a^3 (4 - 6\cdot 2^{-n} + 3\cdot 2^{-2n})$$

Se podría haber hallado de forma más cómoda, calculando directamente el momento de inercia de una varilla de longitud a, respecto al eje que nos indican, mediante la aplicación del teorema de Steiner:

$$I = \frac{1}{12}(\lambda a)a^2 + \lambda a\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{a}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{12}\lambda a^3 (4 - 6\cdot 2^{-n} + 3\cdot 2^{-2n})$$

Haciendo el cambio $p = 2^{-n}$ e imponiendo la condición del enunciado, se tiene:

$$I \geqq \frac{1}{4}\lambda a^3 \rightarrow \lambda \frac{a^3}{12}(4 - 6\cdot 2^{-n} + 3\cdot 2^{-2n}) \geqq \frac{\lambda a^3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\cdot 2^{-2n} - 6\cdot 2^{-n} + 1 \geqq 0 \rightarrow 3p^2 - 6p + 1 \geqq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow p = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{6} \rightarrow \begin{cases} p \geqq 1{,}8164 \rightarrow n \leqq -0{,}8611 \\ p \leqq 0{,}1835 \rightarrow n \geqq 2{,}446 \end{cases}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$p = 2^{-n} \rightarrow n = -\frac{\ln p}{\ln 2}$$

El primer «n» no nos sirve por ser negativo. Como además n debe ser un número natural, el primer valor de n válido es:

$$n = 3$$

2.°) Derivamos el momento de inercia I respecto a n, igualando dicha derivada a cero. Será:

$$I=\frac{\lambda a^3}{12}(4-6\cdot 2^{-n}+3\cdot 2^{-2n})\rightarrow \frac{dI}{dn}=\frac{\lambda a^3}{12}\left(\frac{6\cdot 2^n\cdot \ln 2}{2^{2n}}-\frac{3\cdot 2\cdot 2^{2n}\cdot \ln 2}{2^{4n}}\right)$$

$$\frac{dI}{dn}=0\rightarrow 2^{-n}(1-2^{-n})=0\rightarrow \begin{cases} 2^{-n}=0\rightarrow n=\infty \\ 1-2^{-n}=0\rightarrow 2^{-n}=1\rightarrow n=0 \end{cases}$$

Si hallamos la derivada segunda y sustituimos el valor obtenido, resulta:

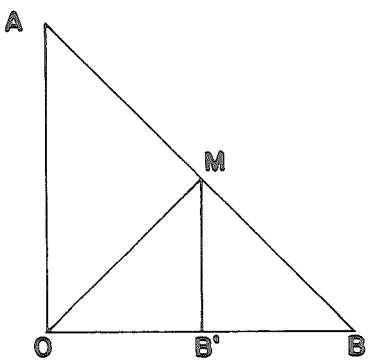
$$\frac{d^2I}{dn^2}=\frac{\lambda a^3}{2}\ln 2\left(\frac{-2^n\cdot \ln 2}{2^{2n}}+\frac{2\cdot 2^{2n}\cdot \ln 2}{2^{4n}}\right)=\frac{\lambda a^3}{2}(\ln 2)^2(2\cdot 2^{-2n}-2^{-n})$$

— Para $n=0\rightarrow \dfrac{d^2I}{dn^2}=\dfrac{\lambda a^3}{2}(\ln 2)^2>0\rightarrow I$ es mínimo $\rightarrow I_{\text{mín}}=\dfrac{1}{12}\lambda a^3$

Podemos fijarnos que la sucesión formada por los valores de I correspondientes a los sucesivos valores de n, es monótona creciente, con lo que el mayor momento de inercia corresponderá a $n = °$. Además, dicho momento de inercia máximo será el de una varilla respecto a un eje normal a ella en un extremo.

$$I_{\text{máx}}=\frac{1}{3}\lambda a^3$$

5. La figura representa un triángulo rectángulo *OAB*, en el que *OA* = *OB* = *a*. Desde *O* se traza la perpendicular *OM* a *AB*, y desde *M*, la perpendicular *MB'* a *OB*, con lo que se obtiene el triángulo *BMB'*. Se repite la operación «*n*» veces. Hallar:



1.°) Tensor de inercia en *O* del triángulo que se obtiene después de la operación *n*-ésima.

2.°) Momento de inercia de dicho triángulo respecto a la recta *OM*.

3.°) Valor mínimo de *n* que hace que el radio de giro respecto al eje «*y*» sea 10 veces mayor que el radio de giro según «*x*».

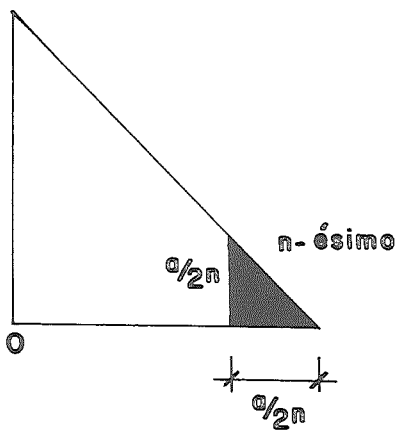
4.°) Para dicho valor de *n*, obtener los momentos y direcciones principales en *O*.

1.°) *Tensor de inercia en O*

Las longitudes de la base y altura de los triángulos correspondientes a los sucesivos valores de *n* son:

Base: $a/2, a/4, a/8, \ldots, a/2^n$.

Altura: $a/2, a/4, a/8, \ldots, a/2^n$.



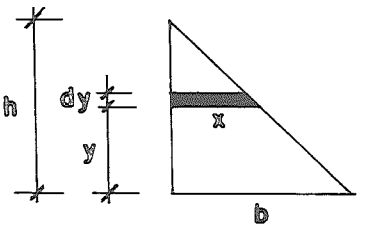
El área del triángulo *n*-ésimo será entonces:

$$S = \frac{1}{2}\frac{a}{2^n}\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{2^{2n}}$$

Por tratarse todos ellos de triángulos rectángulos isósceles, los momentos de inercia respecto a la base y a la altura son iguales. Calculemos el momento de inercia de un triángulo de este tipo respecto a la base:

$$I_{\text{base}} = \int y^2 dS = \int y^2 x dy = \int_0^h y^2 (h-y)\frac{b}{h} dy = \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{1}{12} bh^3$$

Se ha supuesto que el triángulo es homogéneo, y se calculó el momento de inercia geométrico.



Aplicando esto al triángulo n-ésimo resulta:

$$I_x = \frac{1}{12}(a/2^n)(a/2^n)^3 = \frac{1}{12}a^4/2^{4n}$$

Y si llamamos I'_y al momento de inercia respecto a la altura de dicho triángulo, el resultado es el mismo:

$$I'_y = \frac{1}{12}a^4/2^{4n}$$

Aplicamos el teorema de Steiner dos veces para calcular el momento respecto al eje y.

$$I'_y = I_{yG} + S\left(\frac{1}{3}\frac{a}{2^n}\right)^2$$

$$I_y = I_{yG} + S\left(a - \frac{2}{3}\frac{a}{2^n}\right)^2$$

De donde, si eliminamos I_{yG} (momento de inercia respecto a un eje paralelo al eje y, que pasa por el c.d.g. del triángulo considerado), resulta:

$$I_y = I'_y - S\left(\frac{1}{3}\frac{a}{2^n}\right)^2 + S\left(a - \frac{2}{3}\frac{a}{2^n}\right)^2 = I'_y + S\frac{a^2}{2^{2n}}\left[\left(2^n - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\frac{a^4}{2^{4n}}(3 - 8\cdot 2^n + 6\cdot 2^{2n})$$

Este momento de inercia puede obtenerse directamente de acuerdo a la definición, comprobándose que el resultado es el mismo:

$$I_y = \int x^2 dS = \int x^2 y dx = \int_{a-a/2^n}^{a} x^2(a-x)dx = \left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{a-a/2^n}^{a} =$$

$$= \frac{1}{12}\frac{a^4}{2^{4n}}(3 - 8\cdot 2^n + 6\cdot 2^{2n})$$

Calculemos ahora el producto de inercia:

$$P_{xy} = \iint xydS = \int_{a-a/2^n}^{a} xdx \int_0^{a-x} ydy = \int_{a-a/2^n}^{a} x\left[\frac{1}{a}(a-x)^2\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{a-a/2^n}^{a} = \frac{1}{12}\frac{a^4}{2^{4n}}\left(-\frac{3}{2} + 2\cdot 2^n\right)$$

Ya conocemos, pues, el tensor de inercia. Bastaría sustituir los valores hallados en:

$$\bar{\bar{I}}_O = \begin{Vmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{Vmatrix}$$

2.°) *Momento de inercia respecto a la recta OM*

Utilizamos la expresión de I_δ, que podemos escribir en forma matricial:

$$I_\delta = \bar{u}^t \cdot \bar{\bar{I}}_O \cdot \bar{u}$$

siendo $\bar{u}$ el vector unitario en la dirección de la recta *OM*.

Como el ángulo que forma la recta *OM* con el eje *x* es de 45°, el vector $\bar{u}$ es:

$$\bar{u} = (1/\sqrt{2})\bar{i} + (1/\sqrt{2})\bar{j}$$

Sustituyendo se tiene:

$$I_\delta = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}I_x + \frac{1}{2}I_y - P_{xy} =$$

$$= \frac{1}{24}\frac{a^4}{2^{4n}}(7 - 14\cdot 2^n + 6\cdot 2^{3n})$$

3.°) Teniendo en cuenta la expresión de radio de giro:

$$m\rho^2 = I \rightarrow \rho = \sqrt{I/m}$$

para que el radio de giro respecto al eje «*y*» sea 10 veces mayor que el radio de giro respecto al eje «*x*», el momento de inercia I_y deberá ser 100 veces mayor que I_x.

Por lo tanto, se tiene:

$$\rho_y = 10\rho_x \rightarrow I_y = 100 I_x \rightarrow \frac{1}{12}\frac{a^4}{2^{4n}}(3 - 8\cdot 2^n + 6\cdot 2^{2n}) =$$

$$= 100\frac{1}{12}\frac{a^4}{2^{4n}} \rightarrow 6\cdot 2^{2n} - 8\cdot 2^n - 97 = 0$$

Hacemos el cambio $2^n = p$, con lo que queda una ecuación de 2.° grado en p, que se resuelve:

$$6p^2 - 8p - 97 = 0 \rightarrow p = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 2328}}{12} \rightarrow \begin{cases} p = 4,7423 \\ p = -3,4090 \end{cases}$$

El valor negativo no nos sirve porque hace negativo el valor de n, y éste debe ser un número positivo. Del otro valor de p obtenemos el correspondiente de n:

$$n = \frac{\ln p}{\ln 2} = 2,2455$$

Como n debe ser un número natural, el primer valor de n que satisface la condición pedida es

$$n = 3$$

4.°) *Momentos y direcciones principales en O para n = 3*

Sustituimos el valor de n mencionado en I_x, I_y y P_{xy}:

$$I_x = \frac{1}{49.152}a^4 \qquad I_y = \frac{323}{49.152}a^4 \qquad P_{xy} = \frac{29}{98.304}a^4$$

Por ser un sistema plano, las direcciones principales se obtienen de:

$$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{29}{322} = 0,09 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5,146° \rightarrow \alpha_1 = 2,573° \\ 2\alpha_2 = 185,146° \rightarrow \alpha_2 = 92,573° \end{cases}$$

Se sustituyen estos dos valores del ángulo en la expresión:

$$I_\delta = I_x \cos^2\alpha + I_y \,\text{sen}^2\,\alpha - P_{xy}\,\text{sen}\,(2\alpha)$$

Resulta:

$$I_1 = I_x \cos^2\alpha_1 + I_y \,\text{sen}^2\,\alpha_1 - P_{xy}\,\text{sen}(2\alpha_1) =$$

$$= \frac{0,348}{49.152}a^4 = 7,087\cdot 10^{-6}a^4$$

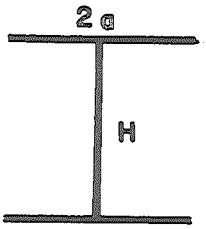
$$I_2 = I_x \cos^2 \alpha_2 + I_y \operatorname{sen}^2 \alpha_2 - P_{xy} \operatorname{sen}(2\alpha_2) =$$

$$= \frac{323,65}{49.152} a^4 = 6,584 \cdot 10^{-3} a^4$$

Por lo tanto, el momento mínimo es I_1, con lo que el eje mayor de la elipse de inercia con centro en O forma un ángulo α_1 con el eje x. El momento máximo es I_2, siendo α_2 el ángulo que forma el eje menor de dicha elipse con el eje x.

6. La figura representa la sección de un perfil laminado. A efectos de su resistencia al pandeo, interesa que tenga por elipse de inercia un círculo. Hallar el valor de H en función de a.

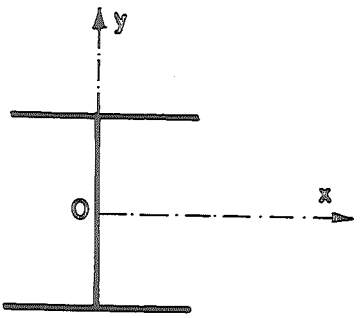
Se supone que el cuerpo es homogéneo.



Tomamos unos ejes x e y como se indica en la figura.

Para que la elipse de inercia en O sea un círculo, los momentos principales (máximo y mínimo) deberán ser iguales, con lo que también valdrá lo mismo el momento de inercia respecto a cualquier recta del plano XY que pase por O.

Debemos hallar los momentos principales en O, para lo cual obtendremos primero los momentos I_x, I_y y el producto P_{xy}.



Para ello se hallarán los correspondientes a cada una de las tres partes de que se compone el perfil y se sumarán.

— $I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3}$

$$\left.\begin{aligned} &- I_{x_1} = 2a\frac{H^2}{4} = \frac{1}{2}aH^2 \\ &- I_{x_2} = 2a\frac{H^2}{4} = \frac{1}{2}aH^2 \\ &- I_{x_3} = \frac{1}{12}H \cdot H^2 = \frac{1}{12}H^3 \end{aligned}\right\} \rightarrow I_x = aH^2 + \frac{1}{12}H^3 = H^2\left(a + \frac{H}{12}\right)$$

— $I_y = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3}$

$$\left.\begin{aligned} &- I_{y_1} = \frac{1}{12}(2a)(2a)^2 = \frac{2}{3}a^3 \\ &- I_{y_2} = \frac{1}{12}(2a)(2a)^2 = \frac{2}{3}a^3 \\ &- I_{y_3} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow I_y = \frac{4}{3}a^3$$

— $P_{xy} = 0$, por ser la figura simétrica respecto a ambos ejes.

Las direcciones principales, por tratarse de un sistema plano, las hallamos a partir de la expresión:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = \pi \rightarrow \alpha_2 = \pi/2 \text{ rad} \end{cases}$$

cuyo resultado podíamos haber previsto, dada la simetría del sistema.

Los momentos principales serán entonces:

$$I_1 = I(\alpha = 0) = I_x = H^2\left(a + \frac{H}{12}\right)$$

$$I_2 = I(\alpha = \pi/2) = I_y = \frac{4}{3}a^3$$

Puesto que deben ser iguales se tendrá:

$$I_1 = I_2 \rightarrow H^2\left(a + \frac{H}{12}\right) = \frac{4}{3}a^3 \rightarrow H^3 + 12aH^2 - 16a^3 = 0$$

que es una ecuación de tercer grado en la variable H, y que debe ser resuelta por métodos de aproximación.

Utilizamos el método de las tangentes de Newton, que consiste en ensayar una solución, escogida más o menos al azar, e ir obteniendo soluciones cada vez más aproximadas mediante la iteración

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

En este caso la variable es H, y por lo tanto:

$$f(H) \equiv H^3 + 12aH^2 - 16a^3 \qquad f'(H) \equiv 3H^2 + 24aH$$

Tras algunas iteraciones se obtiene el resultado (suficientemente aproximado)

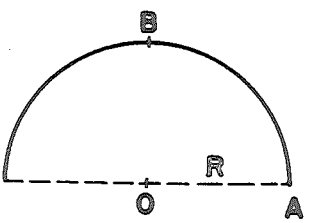
$$H = 1{,}049a$$

7. Un alambre semicircular tiene radio R y densidad lineal proporcional a la longitud de alambre medida desde el extremo A, siendo K/R la constante de proporcionalidad. Hallar:

1.°) Tensor de inercia en O.

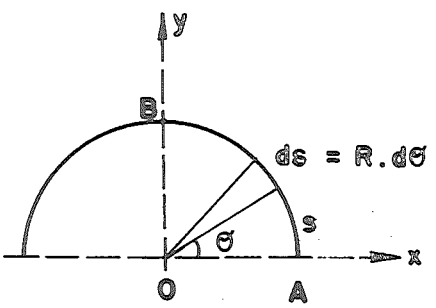
2.°) Direcciones principales y momentos principales en el punto O.

3.°) Momento de inercia respecto a B.



1.°) *Tensor de inercia en O*

Se toma un sistema de referencia como se indica. Sea un elemento diferencial del alambre, que tendrá una masa también diferencial. La posición de dicho elemento de masa viene fijada por el ángulo θ.



La densidad lineal correspondiente al mencionado elemento será:

$$\lambda = \frac{K}{R} s = \frac{K}{R}(R\theta) = K\theta$$

La masa considerada es entonces:

$$dm = \lambda\, ds = K\theta\,(R\, d\theta) = KR\ \theta\, d\theta$$

— $I_x = \int y^2 dm = \int y^2 KR\,\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen}^2\theta\, KR\,\theta\, d\theta =$

$$= KR^3 \int_0^{\pi} \theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = KR^3 \left[\theta\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right)\right]_0^{\pi} -$$

$$- KR^3 \int_0^{\pi} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right) d\theta = \frac{KR^3\pi^2}{2} - KR^3 \left[\frac{\theta^2}{4} + \frac{\cos(2\theta)}{8}\right]_0^{\pi} = \frac{KR^3\pi^2}{4}$$

Se ha resuelto por partes, habiendo llamado $u = \theta$, $dv = \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$.

— $I_y = \int x^2 dm = \int x^2 KR\,\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} R^2 \cos^2\theta\, KR\,\theta\, d\theta =$

$$= KR^3 \int_0^{\pi} \theta \cos^2\theta\, d\theta = \frac{KR^3\pi^2}{4}$$

La resolución es análoga a la empleada para I_x.

En ambos casos se utilizaron las ecuaciones paramétricas de la circunferencia:

$$x = R\cos\theta \qquad\qquad y = R\operatorname{sen}\theta$$

— $P_{xy} = \int xy\ dm = \int_0^{\pi} R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta\ KR\ \theta\ d\theta =$

$$= KR^3 \int_0^{\pi} \theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{KR^3}{2} \int_0^{\pi} \theta \operatorname{sen}(2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{KR^3}{2}\left[-\theta\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{KR^3}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cos(2\theta) =$$

$$= -\frac{KR^3\pi}{4} + \frac{KR^3}{8}[\operatorname{sen}(2\theta)]_0^{\pi} = -\frac{KR^3\pi}{4}$$

La integración ha sido hecha por partes.

Ya tenemos, por lo tanto, el tensor de inercia en *O*:

$$\bar{\bar{I}}_O = \begin{Vmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} KR^3\pi^2/4 & KR^3\pi/4 \\ KR^3\pi/4 & KR^3\pi^2/4 \end{Vmatrix}$$

2.°) *Direcciones y momentos principales en O*

Por tratarse de una distribución plana, partimos de la expresión del momento de inercia respecto a una recta del mismo plano, imponiendo la condición de que sea mínimo o máximo. Es decir:

$$I_\delta = I_x \cos^2\alpha + I_y \operatorname{sen}^2\alpha - P_{xy}\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$\frac{dI_\delta}{d\alpha} = 0 \rightarrow \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$$

Aplicándolo a este caso resulta:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{-KR^2\pi/2}{0} = \infty \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = \pi/2 \rightarrow \alpha_1 = \pi/4 \text{ rad} \\ 2\alpha_2 = 3\pi/2 \rightarrow \alpha_2 = 3\pi/4 \text{ rad} \end{cases}$$

Para ver cuál corresponde al momento mínimo y cuál al máximo, se sustituye en I_δ:

$$I_1 = I_\delta(\alpha_1) = \frac{KR^3\pi}{4}(\pi+1) = 3{,}252\,KR^3 \quad \textit{Máximo}$$

$$I_2 = I_\delta(\alpha_2) = \frac{KR^3\pi}{4}(\pi-1) = 1{,}682\,KR^3 \quad \textit{Mínimo}$$

El mínimo momento de inercia tiene lugar respecto a la bisectriz del 2.° y 4.° cuadrantes, que será el eje mayor de la elipse de inercia en *O*.

El máximo momento ocurre según la bisectriz del 1.er y 3.er cuadrantes, que coincide en dirección con el eje menor de la elipse de inercia.

3.°) *Momento de inercia respecto al punto B*

Una forma de obtener I_B es sumando los momentos de inercia respecto a dos rectas perpendiculares entre sí, y que se corten en *B*, como por ejemplo, el eje «*y*» y una paralela al eje «*x*» por *B*. Es decir:

$$I_B = I_{x_B} + I_y$$

Como I_y ya es conocido, calcularemos I_{x_B} mediante la aplicación, por dos veces, del teorema de Steiner.

Para ello es preciso que obtengamos previamente las coordenadas del centro de masas del alambre. Éstas son:

$$X = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int x\, dm}{M} \qquad Y = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\int y\, dm}{M}$$

En realidad sólo necesitaremos la coordenada Y. A pesar de ello, hallaremos las dos.

— $M = \int dm = \int_0^\pi KR\ \theta\ d\theta = KR \int_0^\pi \theta\ d\theta = KR\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{KR\ \pi^2}{2}$

— $\int x\, dm = \int_0^\pi R\cos\theta\ KR\ \theta\ d\theta = KR^2 \int_0^\pi \theta\cos\theta\ d\theta =$

$= KR^2[\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta]_0^\pi = -2KR^2$

— $\int y\, dm = \int_0^\pi R\,\mathrm{sen}\,\theta\ KR\ \theta\ d\theta = KR^2 \int_0^\pi \theta\,\mathrm{sen}\,\theta\ d\theta =$

$= KR^2[-\theta\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta]_0^\pi = \pi KR^2$

Las dos últimas integrales se han resuelto por partes.

Sustituyendo se llega a:

$$X = \frac{-2KR^2}{KR\pi^2/2} = -\frac{4R}{\pi^2} \qquad Y = \frac{\pi KR^2}{KR\pi^2/2} = \frac{2R}{\pi}$$

Aplicando el teorema de Steiner dos veces se tiene:

$$\left.\begin{aligned} I_{x_B} &= I_{x_G} + Md_1^2 \\ I_x &= I_{x_G} + Md_2^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow I_{x_B} = I_x + M(d_1^2 - d_2^2) = I_x + M[(R-Y)^2 - Y^2]$$

pues

$$d_1 = R - Y = R - \frac{2R}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi} R \qquad \text{y} \qquad d_2 = Y = \frac{2R}{\pi}$$

Al sustituir resulta:

$$I_{X_B} = \frac{KR^3\pi^2}{4} + \frac{KR\pi^2}{2} R^2 \left[\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)^2 - \frac{4}{\pi^2}\right] = \frac{3}{4} KR^3\pi^2 - 2KR^3\pi$$

Con esto ya podemos obtener I_B:

$$I_B = I_{x_B} + I_y = \frac{3}{4}KR^3\pi^2 - 2KR^3\pi + \frac{1}{4}KR^3\pi^2 =$$

$$= KR^3\pi^2 - 2KR^3\pi = KR^3\pi(\pi - 2)$$

Se podría haber obtenido I_B de forma directa, como se hará a continuación:

$$I_B = \int d^2 dm$$

donde d representa la distancia entre el elemento de masa considerado y B. Su valor se obtiene fácilmente de la figura:

$$d^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2R^2(1 - \operatorname{sen}\theta)$$

$$I_B = \int d^2\, KR\ \theta\ d\theta = \int_0^{\pi} 2R^2(1 - \operatorname{sen}\theta)\, KR\ \theta\ d\theta =$$

$$= 2KR^3 \int_0^{\pi} (\theta - \theta\ \operatorname{sen}\theta) d\theta =$$

$$= 2KR^3 \left[\frac{\theta^2}{2} + \theta\ \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi} = 2KR^3\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\right) = KR^3\pi(\pi - 2)$$

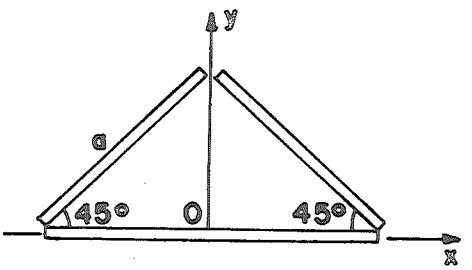
que coincide con el resultado hallado anteriormente.

8. Cada varilla de la figura es uniforme, de masa «m». Obtener:

1.°) I_x, P_{xy}.

2.°) Ejes principales de inercia en O.

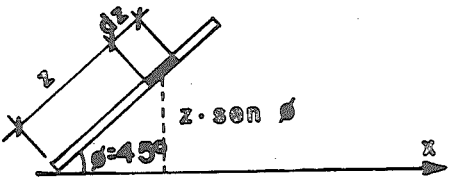
3.°) Elipse de inercia de centro en O.



1.°) I_x, P_{xy}

El momento I_x y el producto P_{xy} serán la suma de los correspondientes a cada varilla.

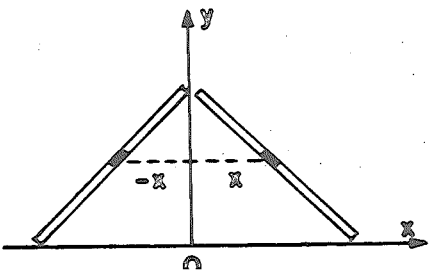
$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$



Los momentos correspondientes a las varillas inclinadas son iguales. Su valor es:

$$I_{x1} = I_{x2} = \int_0^a \lambda\, dz \cdot z^2 \operatorname{sen}^2 \phi = \left[\lambda \frac{z^3}{3} \operatorname{sen}^2 \phi \right]_0^a =$$

$$= \frac{\lambda a}{3} a^2 \operatorname{sen}^2 \phi = \frac{ma^2}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{6} ma^2$$



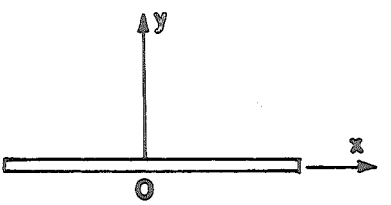
El momento de la varilla horizontal I_{x3} es nulo. Por tanto:

$$I_x = 2 \frac{ma^2}{6} = \frac{1}{3} ma^2$$

$$P_{xy} = P_{xy1} + P_{xy2} + P_{xy3}$$

El producto de inercia correspondiente a las dos varillas inclinadas es nulo, por simetría respecto al eje y (para cada valor de y hay un «x» y un «$-x$»):

$$P_{xy1} + P_{xy2} = \int \lambda\, dz \cdot xy = 0$$



El producto de inercia correspondiente a la varilla horizontal es nulo, por estar en el eje x.

Por tanto:

$$P_{xy} = 0$$

2.°) *Ejes principales*

El ángulo formado con los ejes x, y, viene dado por:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ 2\alpha = \pi \rightarrow \alpha = \pi/2 \end{cases}$$

Para saber cuál de estos valores corresponde al momento de inercia mínimo, y cuál al máximo, podemos hallar la derivada segunda de I_δ, y estudiar su signo, pero es más cómodo sustituir ambos valores directamente en la expresión de I_δ. El que dé mayor valor corresponderá al máximo, y el otro, al mínimo.

$$I_\delta = I_x \cos^2 \alpha + I_y \text{ sen}^2 \alpha - P_{xy} \text{ sen } 2\alpha$$

Debemos calcular I_y:

$$I_y = \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{12}m(\sqrt{2}a)^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

Para $\alpha = 0 \rightarrow I_\delta = I_x = \frac{1}{3}ma^2$ *Mínimo*

Para $\alpha = \pi/2 \rightarrow I_\delta = I_y = \frac{1}{2}ma^2$ *Máximo*

3.°) *Elipse de inercia en O*

La elipse de inercia, referida a los ejes x, y, será:

$$1 = I_x\xi^2 + I_y\eta^2 - 2P_{xy}\xi\eta$$

siendo (ξ, η) un punto de la elipse.

Sustituyendo:

$$1 = \frac{1}{3}ma^2\xi^2 + \frac{1}{2}ma^2\eta^2 \rightarrow 1 = \frac{\xi^2}{\frac{3}{ma^2}} + \frac{\eta^2}{\frac{2}{ma^2}}$$

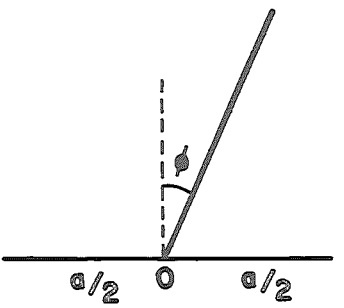
9. La figura representa dos varillas homogéneas, de igual longitud «a» y con «ϕ» constante.

1.°) Obtener la posición de los ejes principales de inercia en *O*.

2.°) Hallar los momentos principales de inercia en *O*.

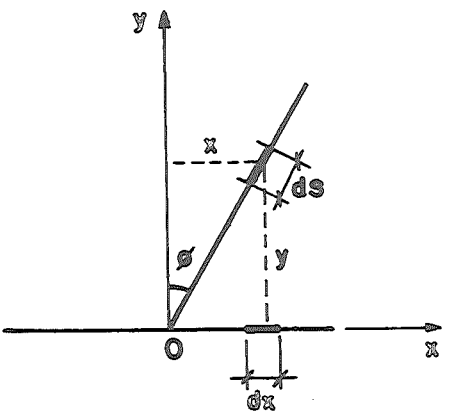
3.°) Dibujar con detalle la elipse de inercia.

4.°) Se sabe que la energía de rotación en torno a un eje es proporcional al momento de inercia respecto a dicho eje. Si la figura se hace girar alrededor de un eje perpendicular a su plano, ¿dónde habrá de colocarse el eje para que dicha energía sea mínima?



1.°) *Ejes principales de inercia en O*

Puesto que las varillas son homogéneas, trabajaremos con momentos geométricos.



— I_x

Varilla horizontal:

$I_{x1} = 0$ (porque está contenida en el eje x)

Varilla inclinada:

$$I_{x2} = \int y^2\, ds = \int_0^a s^2 \cos^2\phi\, ds = \frac{1}{3}a^3 \cos^2\phi$$

Por tanto:

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = \frac{1}{3}a^3 \cos^2\phi$$

— I_y

Varilla horizontal:

$$I_{y1} = \int_{-a/2}^{a/2} x^2\, dx = \frac{1}{12}a^3$$

Varilla inclinada:

$$I_{y2} = \int x^2\, ds = \int_0^a s^2 \operatorname{sen}^2\phi\, ds = \frac{1}{3}a^3 \operatorname{sen}^2\phi$$

De donde:

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = \frac{1}{3}a^3(1/4 + \operatorname{sen}^2\phi)$$

— P_{xy}

$$\left.\begin{aligned} P_{xy1} &= 0 \\ P_{xy2} &= \int xy\, ds = \int_0^a s\, \operatorname{sen}\phi\; s\, \cos\phi\, ds = \frac{1}{3}a^3 \operatorname{sen}\phi\, \cos\phi \end{aligned}\right\}$$

$$P_{xy} = \frac{1}{3}a^3 \operatorname{sen}\phi\, \cos\phi$$

Por ser una figura plana, el ángulo α que forman los ejes principales con los x, y, viene dado por la expresión:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{\frac{2a^3}{3}\operatorname{sen}\phi\, \cos\phi}{\frac{1}{3}a^3\left(\frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\phi - \cos^2\phi\right)} = \frac{\operatorname{sen} 2\phi}{1/4 - \cos 2\phi}$$

Se obtienen así dos valores del ángulo α_1 y α_2, que nos dan las direcciones correspondientes a los momentos de inercia máximo y mínimo. Son funciones de ϕ.

Llamaremos α_1 a la correspondiente al momento mínimo y α_2 al máximo.

2.°) *Momentos principales de inercia en O*

Se pueden hallar sustituyendo los valores α_1 y α_2 en la expresión de I_δ.

Otra forma es diagonalizar la matriz de inercia, que será el procedimiento que sigamos aquí.

$$\begin{vmatrix} I_x - I & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y - I \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3}a^3 \cos^2\phi - I & -\frac{1}{3}a^3 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \\ -\frac{1}{3}a^3 \operatorname{sen}\phi \cos\phi & \frac{1}{3}a^3\left(\frac{1}{4} + \operatorname{sen}^2\phi\right) - I \end{vmatrix} = 0$$

Simplificando y desarrollando el determinante, resulta:

$$\frac{1}{4}\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi -$$

$$-\frac{3}{a^3} I \cos^2\phi - \frac{3}{4}\frac{I}{a^3} - \frac{3}{a^3} I \operatorname{sen}^2\phi + \frac{9}{a^6} I^2 - \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi = 0$$

que se convierte en la ecuación de 2.° grado en I:

$$36\, I^2 - 15\, a^3\, I + a^6 \cos^2\phi = 0$$

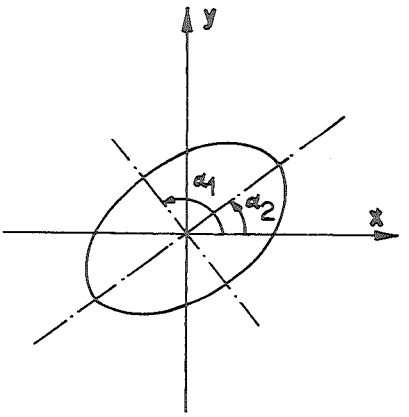
cuyas soluciones son los momentos principales:

$$I_1 = I_{\text{mín}} = a^3 \frac{5 - (25 - 16\cos^2\phi)^{1/2}}{24}$$

$$I_2 = I_{\text{máx}} = a^3 \frac{5 + (25 - 16\cos^2\phi)^{1/2}}{24}$$

3.°) *Elipse de inercia en O*

Es la de la figura adjunta. El semieje mayor será proporcional a la inversa de la raíz cuadrada del momento mínimo, y su dirección formará un ángulo α_1 con el eje x. El semieje menor formará α_2 con el eje x, y será inversamente proporcional a la raíz cuadrada del momento máximo.



4.°) Deberá ser mínimo el momento de inercia. Como se trata de un eje perpendicular al plano de la figura, el menor momento de inercia corresponde al que pasa por *G*.

Cálculo del centro de masas G:

Varilla horizontal: $X_{G1} = 0,\ Y_{G1} = 0.$

Varilla inclinada: $X_{G2} = \frac{a}{2}\operatorname{sen}\phi,\ Y_{G2} = \frac{a}{2}\cos\phi,$

que se deducen por simetría.

Las coordenadas de *G* serán:

$$X_G = \frac{a\cdot 0 + a\cdot a/2\ \operatorname{sen}\phi}{2a} = \frac{a}{4}\operatorname{sen}\phi$$

$$Y_G = \frac{a\cdot 0 + a\cdot a/2\ \cos\phi}{2a} = \frac{a}{4}\cos\phi$$

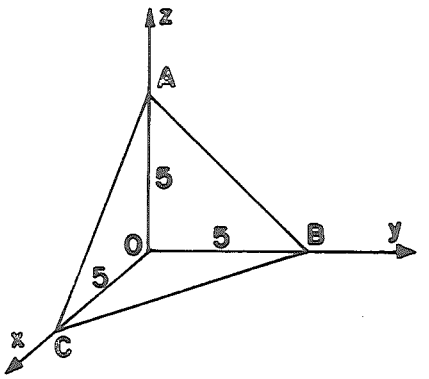
La energía de rotación será mínima alrededor de un eje perpendicular al plano, que contiene al centro de masas, cuyas coordenadas se han obtenido.

10. La figura representa una pirámide homogénea *OABC* de dimensiones que se indican.

1.°) Hallar el momento de inercia respecto al vértice *A*.

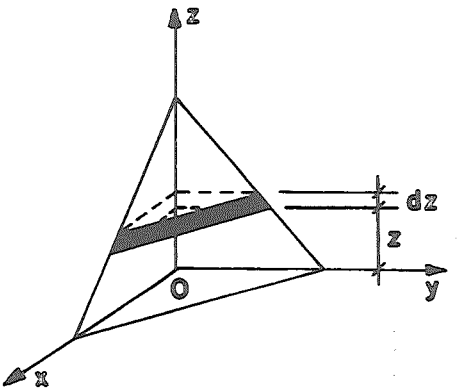
2.°) Obtener el elipsoide central de inercia.

3.°) Cada punto de la cara *ABC* es atraído por el plano *xOy* con una fuerza directamente proporcional a la distancia a dicho plano. ¿Cuál es el eje central de estos vectores-fuerza?



1.°) *Momento de inercia respecto a A*

Calcularemos primero los momentos de inercia respecto a los planos coordenados, para después, mediante los teoremas de Steiner, hallarlos respecto a unos paralelos que contengan al punto *A*. Para la aplicación del teorema de Steiner necesitamos conocer *G*.



— *Cálculo de G*

Por simetría:

$$X_G = Y_G = Z_G$$

$$Z_G = \frac{\int z\, dV}{V}$$

siendo V el volumen de la pirámide:

$$V = \frac{1}{6} 5^3 = \frac{125}{6}$$

Tomamos el elemento dV como se indica en la figura:

$$dV = \frac{1}{2} xy\ dz$$

Además, en la misma figura, se puede ver que:

$$\frac{5}{x} = \frac{5}{y} = \frac{5}{5-z} \rightarrow x = y = 5 - z \rightarrow dV = \frac{1}{2}(5-z)^2\ dz$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int z\ dV = \int_0^5 z \frac{1}{2}(5-z)^2\ dz = \frac{1}{2}\int_0^5 (25z - 10z^2 + z^3) dz = \frac{5^4}{24}$$

Las coordenadas de G serán:

$$X_G = Y_G = Z_G = \frac{5^4/24}{5^3/6} = \frac{5}{4}$$

— *Momentos de inercia respecto a los planos coordenados*

Por simetría

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}$$

$$I_{xy} = \int z^2\ dv = \frac{1}{2}\int_0^5 z^2(5-z)^2\ dz = \frac{5^5}{60} = \frac{625}{12}$$

— *Momentos respecto a unos planos paralelos a los coordenados por G*

Por el teorema de Steiner:

$$I_{x_G y_G} = I_{xy} - VZ_G^2 = \frac{625}{12} - \frac{125}{6}\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{625}{32} = I_{x_G z_G} = I_{y_G z_G}$$

— *Momentos respecto a unos planos paralelos por A*

$$I_{x_A y_A} = I_{x_G y_G} + V(5 - Z_G)^2 = \frac{625}{32} + \frac{125}{6}\left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{625}{2}$$

$$I_{x_A z_A} = I_{xz} \qquad I_{y_A z_A} = I_{yz}$$

— *Momento de inercia respecto a A*

$$I_A = I_{x_A y_A} + I_{x_A z_A} + I_{y_A z_A} = \frac{625}{2} + \frac{625}{12} + \frac{625}{12} = \frac{1.250}{3} = 416{,}66$$

2.°) *Elipsoide central de inercia*

Es el elipsoide de inercia correspondiente al centro de masas.

Si lo referimos a unos ejes paralelos a los coordenados, su ecuación será:

$$I_{x_G}\xi^2 + I_{y_G}\eta^2 + I_{z_G}\zeta^2 - 2P_{x_Gy_G}\xi\eta - 2P_{x_Gz_G}\xi\zeta - 2P_{y_Gz_G}\eta\zeta = k^2 = 1 \qquad [1]$$

— *Momentos de inercia* I_{x_G}, I_{y_G}, I_{z_G}

Son todos iguales por simetría:

$$I_{x_G} = I_{y_G} = I_{z_G} = I_{x_Gy_G} + I_{x_Gz_G} = \frac{625}{32} + \frac{625}{32} = \frac{625}{16}$$

— *Productos de inercia respecto a los planos coordenados*

$$P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = \int xy\ dV = \int xy\ dx\ dy\ dz =$$

$$= \int_0^5 x\ dx \int_0^{5-x} y\ dy \int_0^{5-x-y} dz = \frac{625}{4}$$

— *Productos respecto a unos planos paralelos por G*

Aplicamos el teorema de Steiner:

$$P_{x_Gy_G} = P_{x_Gz_G} = P_{y_Gz_G} = P_{xy} - VX_GY_G = \frac{625}{4} - \frac{125}{6}\frac{5}{4}\frac{5}{4} = -\frac{625}{96}$$

— *Elipsoide central de inercia*

Sustituimos los valores obtenidos en la expresión [1]:

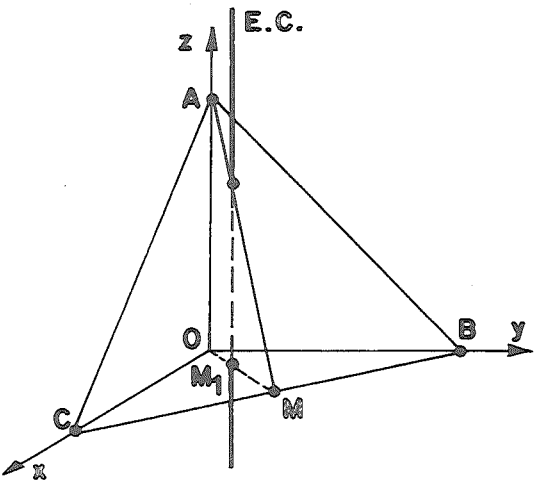
$$\frac{625}{16}\xi^2 + \frac{625}{16}\eta^2 + \frac{625}{16}\zeta^2 + 2\frac{625}{96}(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) = 1$$

$$3\xi^2 + 3\eta^2 + 3\zeta^2 + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta = \frac{48}{625} = 0{,}0768 \quad \text{con } k = 1$$

3.°) *Eje central*

Si cortamos la cara *ABC* por planos paralelos al *xy* resultan rectas tales que la resultante de los vectores correspondientes a los puntos de una de ellas sería vertical y aplicada en el punto medio de la recta. Tomando el perfil de

fuerzas sobre la recta *AM*, se ve que el eje central cortará a *OM* en el punto M_1, cuya distancia a *O* será 1/3 de la longitud *OM* (el centro de masas de un triángulo está a una distancia de la base igual a 1/3 de la altura correspondiente).



Las coordenadas de M_1 serán, por tanto:

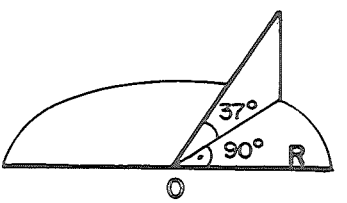
$$X_{M_1} = \frac{1}{3}2{,}5 = 0{,}83 \qquad Y_{M_1} = \frac{1}{3}2{,}5 = 0{,}83$$

11. Un sólido está constituido por dos chapas de igual masa *M* y de las dimensiones indicadas en la figura. Hallar:

1.°) Tensor de inercia en *O*.

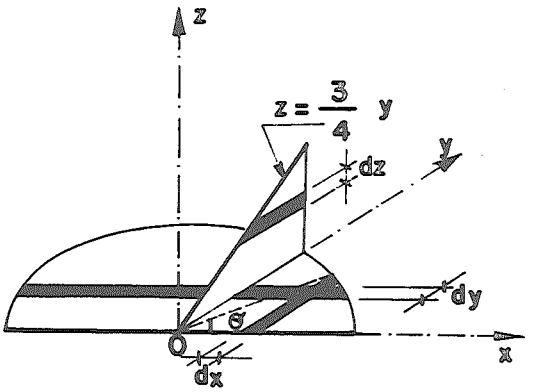
2.°) Momento de inercia respecto a la hipotenusa de la chapa triangular.

3.°) Momentos principales de inercia en *O*.



1.°) *Tensor de inercia en O*

Tomamos unos ejes como los indicados en la figura. Debemos calcular los momentos de inercia respecto a estos ejes y los productos de inercia respecto a los planos correspondientes.



Se tendrá en cuenta que tanto los unos como los otros se obtienen sumando los correspondientes a cada chapa.

Aunque pueden hallarse directamente, de acuerdo a la definición, resulta más cómodo calcular previamente los momentos de inercia respecto a los planos coordenados y utilizar las relaciones adecuadas.

a) *Chapa semicircular*

— *Respecto al plano XY*

$$I_{xy_1} = \int_1 z^2 \, dm = 0$$

por estar contenida en el plano *XY,* y por tanto $z = 0$.

— *Respecto al plano XZ*

$$I_{xz_1} = \int_1 y^2 \, dm = \sigma_1 \int_1 y^2 \, dS = \sigma_1 \int_1 y^2 \cdot 2x \, dy =$$

$$= 2\sigma_1 \int_0^{\pi/2} R \cos\theta \, R^2 \operatorname{sen}^2\theta (R \cos\theta \, d\theta)$$

donde se ha tenido en cuenta las ecuaciones paramétricas de la circunferencia:

$$x = R \cos\theta$$

$$y = R \operatorname{sen}\theta \rightarrow dy = R \cos\theta \, d\theta$$

y habiendo llamado σ_1 a la densidad superficial de masa de la chapa. Su valor es:

$$\sigma_1 = \frac{M}{\pi R^2 / 2} = \frac{2M}{\pi R^2}$$

Operando resulta:

$$I_{xz_1} = \frac{\sigma_1 R^4}{2} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(2\theta)\, d\theta = \frac{\sigma_1 \pi R^4}{8} = \frac{1}{4} MR^2$$

— *Respecto al plano YZ*

$$I_{yz_1} = \int_1 x^2\, dm = \sigma_1 \int_1 x^2\, dS = 2\sigma_1 \int_1 x^2\, y\, dx =$$

$$= 2\sigma_1 \int_{\pi/2}^{0} R^2 \cos^2\theta\, R\, \text{sen}\theta(-R\, \text{sen}\theta\, d\theta)$$

donde se procedió como en el caso anterior.

Operando y sustituyendo σ_1 se obtiene:

$$I_{yz_1} = \frac{\sigma_1 R^4}{2} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(2\theta)\, d\theta = \frac{\sigma_1 \pi R^4}{8} = \frac{1}{4} MR^2$$

El cálculo de I_{xz_1} e I_{yz_1} se podría haber simplificado teniendo en cuenta que:

$$I_{xz_1} = I_{x_1} \qquad I_{yz_1} = I_{y_1} \qquad I_{x_1} = I_{y_1}$$

como puede apreciarse de la figura. Además:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_{O_1} = I_{z_1}$$

$$I_{O_1} = \int_1 r^2\, dm = \sigma_1 \int_0^R r^2 (\pi r\, dr) = \pi\sigma_1 \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2 \rightarrow I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{1}{4} MR^2$$

— *Productos de inercia*

$P_{XZ/YZ_1} = P_{xy_1} = 0$ por simetría respecto al plano *YZ*.
$P_{XY/YZ_1} = P_{xz_1} = 0$ por estar en el plano *XY*.
$P_{XY/XZ_1} = P_{yz_1} = 0$ por estar en el plano *XY*.

Cuando hay dos planos de simetría (en este caso el *XY* y el *YZ*), son nulos los tres productos de inercia.

b) *Chapa triangular*

— *Respecto al plano XY*

$$I_{xy_2} = \int_2 z^2\, dm = \sigma_2 \int_2 z^2\, dS = \sigma_2 \int_2 z^2 (R - y) dz =$$

$$= \sigma_2 \int_0^{3R/4} z^2 (R - 4z/3) dz = \sigma_2 \frac{9R^4}{256} = \frac{3}{32} MR^2$$

donde hemos llamado σ_2 a la densidad superficial de la chapa triangular, cuyo valor es:

$$\sigma_2 = \frac{M}{3R^2/8} = \frac{8M}{3R^2}$$

Además, la ecuación de la hipotenusa del triángulo es:

$$z = \frac{3}{4}y$$

— *Respecto al plano XZ*

$$I_{xz_2} = \int_2 y^2\, dm = \sigma_2 \int_2 y^2\, dS = \sigma_2 \int_2 y^2 z\, dy =$$

$$= \sigma_2 \int_0^R y^2 \frac{3}{4} y\, dy = \frac{3}{16}\sigma_2 R^4 = \frac{1}{2}MR^2$$

— *Respecto al plano YZ*

$I_{yz_2} = \int_2 x^2\, dm = 0$, por estar la chapa contenida en el plano $YZ(x=0)$.

— *Productos de inercia*

$P_{XZ/YZ_2} = P_{xy_2} = 0$ por estar en el plano *YZ*.

$P_{XY/YZ_2} = P_{xz_2} = 0$ por estar en el plano *YZ*.

$$P_{XY/XZ_2} = P_{yz_2} = \iint_2 yz\, dm = \sigma_2 \iint_2 yz\, dS = \sigma_2 \iint_2 yz\, dy\, dz =$$

$$= \sigma_2 \int_0^R y\, dy \int_0^{3y/4} z\, dz = \sigma_2 \int_0^R y[z^2/2]_0^{3y/4} dy = \frac{9}{128}\sigma_2 R^4 = \frac{3}{16}MR^2$$

Con todo esto, ya podemos conocer lo que nos piden:

$$I_{xy} = I_{xy_1} + I_{xy_2} = I_{xy_2} = \frac{3}{32}MR^2$$

$$I_{xz} = I_{xz_1} + I_{xz_2} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{3}{4}MR^2$$

$$I_{yz} = I_{yz_1} + I_{yz_2} = I_{yz_1} = \frac{1}{4}MR^2$$

Por la relación entre los momentos de inercia áxicos y planarios se tiene:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = \frac{3}{32}MR^2 + \frac{3}{4}MR^2 = \frac{27}{32}MR^2$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz} = \frac{3}{32}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{11}{32}MR^2$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = \frac{3}{4}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 = MR^2$$

Y en cuanto a los productos de inercia:

$$P_{xy} = P_{xy_1} + P_{xy_2} = 0 \qquad P_{xz} = P_{xz_1} + P_{xz_2} = 0$$

$$P_{yz} = P_{yz_1} + P_{yz_2} = \frac{3}{16}MR^2$$

El tensor de inercia en O es, por lo tanto:

$$\bar{\bar{I}}_O = \begin{Vmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{27}{32}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{32}MR^2 & \frac{-3}{16}MR^2 \\ 0 & \frac{-3}{16}MR^2 & MR^2 \end{Vmatrix}$$

2.°) *Momento de inercia respecto a la hipotenusa de la chapa triangular*

Aplicaremos la expresión:

$$I_\delta = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2P_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2P_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2P_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

siendo α, β, γ los ángulos directores de la recta δ. O bien, en forma matricial

$$I_\delta = \bar{u}^t \cdot \bar{\bar{I}}_O \cdot \bar{u}$$

siendo $\bar{u}$ el vector unitario en la dirección de la recta.

En nuestro caso:

$$\alpha = \pi/2 \rightarrow \cos\alpha = 0 \qquad \beta = 37° \rightarrow \cos\beta \cong 4/5 \qquad \gamma = 53° \rightarrow \cos\gamma \cong 3/5$$

Sustituyendo se obtiene:

$$I_\delta = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{11}{32}MR^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot MR^2 - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{16}MR^2 = \frac{2}{5}MR^2$$

3.°) *Momentos principales de inercia*

Por tratarse de una distribución espacial de masa, lo hacemos diagonalizando la matriz de inercia:

$$\begin{vmatrix} \frac{27}{32}MR^2 - I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{32}MR^2 - I & \frac{-3}{16}MR^2 \\ 0 & \frac{-3}{16}MR^2 & MR^2 - I \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{27}{32}MR^2 - I\right)\left(\frac{11}{32}MR^2 - I\right)(MR^2 - I) - \left(\frac{27}{32}MR^2 - I\right)\left(\frac{-3}{16}MR^2\right)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (27\,MR^2 - 32\,I)[(11\,MR^2 - 32\,I)(32\,MR^2 - 32\,I) - (6\,MR^2)^2] = 0 \rightarrow$$

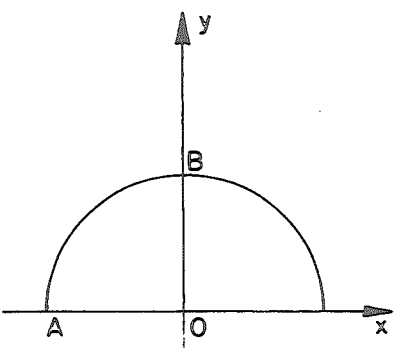
$$\rightarrow \begin{cases} 27\,MR^2 - 32\,I = 0 \rightarrow I_1 = \frac{27}{32}MR^2 = I_x = 0{,}843\,MR^2 \\ 256\,I^2 - 344\,MR^2\,I + 79\,M^2R^4 = 0 \rightarrow \begin{cases} I_2 = 1{,}049\,MR^2 \\ I_3 = 0{,}293\,MR^2 \end{cases} \end{cases}$$

Los momentos principales de inercia son I_1, I_2 e I_3.

El momento de inercia máximo, correspondiente al semieje menor del elipsoide de inercia en O, es I_3.

El momento de inercia mínimo, correspondiente al semieje mayor del elipsoide de inercia en O, es I_2.

12. Sea el semicírculo homogéneo de la figura, de radio R y masa M. Concéntricos con él se van tomando semicírculos de radios $R/2$, $R/3$, ..., R/n. Considérese la masa comprendida entre el semicírculo inicial y el n-ésimo. Se pide:



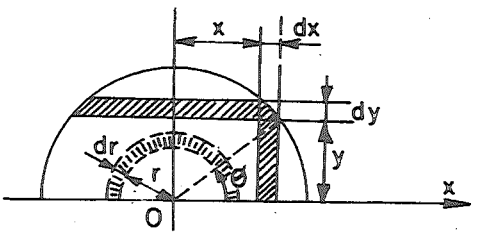
1.°) Valor mínimo de n para que las relaciones entre los momentos de inercia respecto a los ejes x e y de dicha masa, y los correspondientes a la masa inicial, sean mayores o iguales que 99/100.

2.°) Momentos de inercia del semicírculo de radio R respecto a los ejes de la elipse central de inercia.

3.°) Momento de inercia de la masa comprendida entre el semicírculo de radio R y el de radio $R/2$ respecto a la recta AB.

1.°) *Valor mínimo de n*

Calculemos primero los momentos de inercia de un semicírculo homogéneo respecto a los ejes x e y.



Tenemos en cuenta que las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\}$$

siendo θ el ángulo de la figura.

— I_x

Tomamos un elemento de área que es la franja horizontal de la figura, de espesor dy. Se tiene:

$$I_x = \int y^2\,dm = \rho\int y^2\,dA = \rho\int y^2\,2x\,dy = 2\rho\int xy^2\,dy =$$

$$= 2\rho\int_0^{\pi/2} R\cos\theta\,R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,(R\cos\theta\,d\theta) = 2\rho R^4\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \rho\frac{R^4}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\,2\theta\,d\theta = \frac{\rho R^4}{2}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,4\theta}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\pi\rho R^4 = \frac{1}{4}MR^2$$

para lo que hemos hecho un cambio a la variable θ, y se ha tenido en cuenta que la masa del semicírculo es:

$$M = \rho \frac{\pi R^2}{2} \rightarrow \rho = \frac{2M}{\pi R^2}$$

— I_y

Tomamos como elemento de área la franja vertical de la figura, de espesor dx. Se tiene:

$$I_y = \int x^2\, dm = \rho \int x^2\, dA = \rho \int x^2\, y\, dx =$$

$$= \rho \int_{\pi}^{0} R^2 \cos^2\theta\, R \operatorname{sen}\theta (-R \operatorname{sen}\theta\, d\theta) =$$

$$= -\rho R^4 \int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\rho R^4}{4} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{\rho R^4}{4} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{8} \pi \rho R^4 = \frac{1}{4} MR^2$$

Uno de los dos momentos se podía haber obtenido a partir del otro y del momento de inercia respecto al centro O, ya que:

$$I_0 = I_x + I_y \qquad \text{(distribución plana)}$$

$$I_0 = \int r^2\, dm = \rho \int_0^R r^2 (\pi r\, dr) = \left[\rho \pi \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{4} \pi \rho R^4 = \frac{1}{2} MR^2$$

Conocidos estos momentos de inercia, los aplicamos a los sucesivos semicírculos:

1.er semicírculo:	$n = 1$	Masa: $M_1 = M$
2.° semicírculo:	$n = 2$	Masa: $M_2 = \frac{M}{4}$
3.er semicírculo:	$n = 3$	Masa: $M_3 = \frac{M}{9}$
.....		
n–ésimo semicírculo:	n	Masa: $M_n = \frac{M}{n^2}$

$$I_{x_1} = \frac{1}{4} M_1 R_1^2 = \frac{1}{4} MR^2 \qquad I_{y_1} = \frac{1}{4} M_1 R_1^2 = \frac{1}{4} MR^2$$

$$I_{x_2} = \frac{1}{4} M_2 R_2^2 = \frac{1}{4} \frac{M}{4} \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{64} MR^2 = I_{y_2}$$

$$I_{x_3} = \frac{1}{4} M_3 R_3^2 = \frac{1}{4} \frac{M}{9} \left(\frac{R}{3} \right)^2 = \frac{1}{324} MR^2 = I_{y_3}$$

.....

$$I_{x_n} = \frac{1}{4} M_n R_n^2 = \frac{1}{4} \frac{M}{n^2} \left(\frac{R}{n} \right)^2 = \frac{1}{4 \cdot n^4} MR^2 = I_{y_n}$$

Si llamamos I_x e I_y a los momentos de inercia de la masa comprendida entre el semicírculo inicial y el n-ésimo, se tiene:

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_n} = \frac{1}{4} MR^2 - \frac{1}{4n^4} MR^2 = \frac{1}{4} MR^2 \left(1 - \frac{1}{n^4} \right)$$

$$I_y = I_{y_1} - I_{y_n} = \frac{1}{4} MR^2 - \frac{1}{4n^4} MR^2 = \frac{1}{4} MR^2 \left(1 - \frac{1}{n^4} \right)$$

Como son iguales, tanto I_x e I_y como I_{x_1} e I_{y_1}, basta que la condición pedida se satisfaga para una de las dos relaciones:

$$\frac{I_x}{I_{x_1}} \geq \frac{99}{100} \rightarrow 1 - \frac{1}{n^4} \geq \frac{99}{100} \rightarrow \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{100} \rightarrow$$

$$\rightarrow n^4 \geq 100 \rightarrow n \geq \sqrt[4]{100} = 3{,}16 \rightarrow n = 4$$

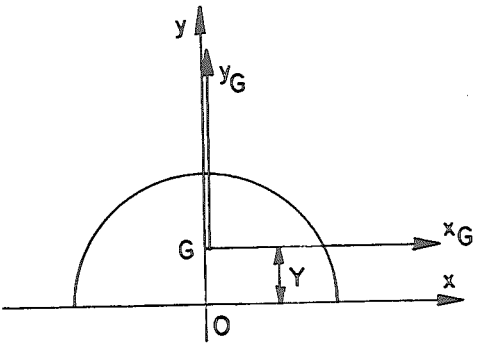
2.°) *Momentos de inercia del semicírculo inicial respecto a los ejes de la elipse central de inercia*

Se puede observar fácilmente que el producto de inercia P_{xy} de cualquier semicírculo de los considerados hasta ahora es nulo, por simetría.

Es decir:

$$P_{xy_n} = 0$$

Además, los ejes de la elipse central de inercia son las direcciones principales de inercia en el centro de masas. Puesto que el eje «y» es un eje de simetría de la distribución, el centro de masas G se encontrará en dicho eje «y».



De todos los sistemas de ejes ortogonales con origen en un punto del eje «*y*» (como *G*), el producto de inercia siempre será nulo respecto a los que sean paralelos a los *x*, *y*, dada la simetría respecto al eje «*y*». Esto nos indica que las direcciones principales en *G* son paralelas a los ejes *x* e *y*, pues el producto de inercia es nulo respecto a las direcciones principales. Es decir, los ejes de la elipse central de inercia son los x_G, y_G, de la figura.

Para calcular el momento de inercia respecto a la recta x_G (momento principal de inercia) debemos hallar antes la posición de *G*.

Mediante el teorema de Guldin:

$$V_{\text{rev}} = 2\pi \cdot Y \cdot A \rightarrow Y = \frac{V_{\text{rev}}}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

Mediante el teorema de Steiner, se tiene:

$$I_x = I_{x_G} + MY^2 \rightarrow I_{x_G} = I_x - MY^2 =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 - M\left(\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\right)^2 = MR^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) = 0{,}069\, MR^2$$

$$I_y = I_{y_G} + MX^2 \rightarrow I_{y_G} = I_y = \frac{1}{4}MR^2 = 0{,}25\, MR^2$$

El eje x_G corresponde al momento de inercia mínimo en *G*, y el y_G al momento de inercia máximo en *G*.

3.°) *Momento de inercia respecto a la recta AB*

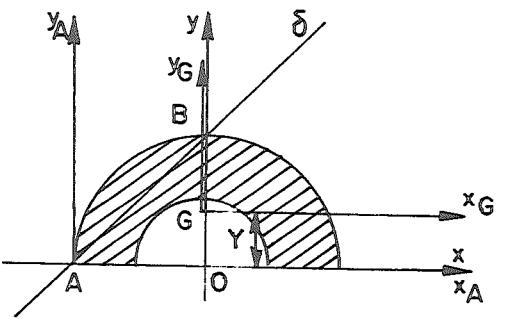
El momento de inercia de la masa comprendida entre el semicírculo de radio *R* y el de radio *R*/2, respecto a la recta *AB*, puede hallarse a partir de la relación:

$$I_\delta = I_{x_A} \cos^2 \alpha + I_{y_A} \operatorname{sen}^2 \alpha - P_{xy_A} \operatorname{sen} 2\alpha$$

siendo α el ángulo formado por la recta AB y el eje x_A; en este caso $\alpha = 45°$.

Debemos calcular I_{x_A}, I_{y_A}, P_{xy_A}, mediante la aplicación del teorema de Steiner.

— $I_{x_A} = I_x = \frac{1}{4}MR^2\left(1-\frac{1}{2^4}\right) = \frac{15}{64}MR^2$



Se ha obtenido de la expresión de I_x del primer apartado, haciendo $n = 2$.

— $I_{y_A} = I_{y_G} + M'R^2 = I_y + \frac{3M}{4}R^2 = \frac{1}{4}MR^2\left(1-\frac{1}{2^4}\right) + \frac{3}{4}MR^2 =$

$$= \frac{15}{64}MR^2 + \frac{3}{4}MR^2 = \frac{63}{64}MR^2$$

puesto que G se encuentra en el eje «y», por simetría, y la masa M' es

$$M' = M - \frac{1}{4}M = \frac{3}{4}M$$

— $P_{xy_A} = P_{xy_G} + M'RY = \frac{3M}{4}RY$

donde hemos llamado Y a la coordenada correspondiente del centro de masas G, siendo además $P_{xy_G} = 0$, por ser estos ejes, paralelos a los x, y, por G, ejes principales de inercia en G.

Debemos calcular Y. Aplicaremos el teorema de Guldin:

$$V_{\text{rev}} = 2\pi YA \rightarrow Y = \frac{V_{\text{rev}}}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3}{2\pi\left[\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]} = \frac{14}{9}\frac{R}{\pi}$$

Sustituyendo resulta:

$$P_{xy_A} = \frac{3M}{4} R \frac{14}{9} \frac{R}{\pi} = \frac{7}{6} \frac{MR^2}{\pi}$$

con lo que ya podemos obtener I_δ:

$$I_\delta = \frac{15}{64} MR^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{63}{64} MR^2 \frac{1}{2} - \frac{7}{6} \frac{MR^2}{\pi} \cdot 1 =$$

$$= \frac{MR^2}{192\pi} (117\pi - 224) = 0{,}238\, MR^2$$

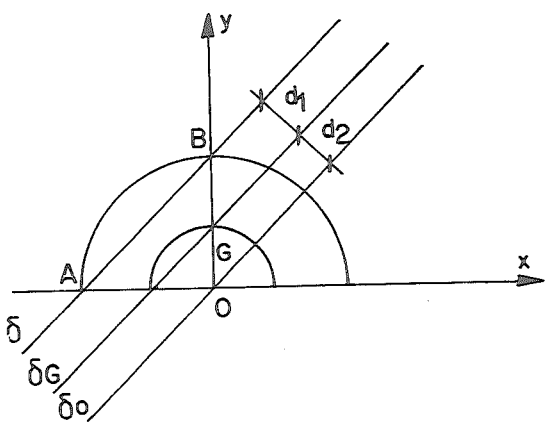
También se puede obtener el momento de inercia buscado, hallando primero el momento respecto a una paralela a la recta δ, pasando por O, y aplicando el teorema de Steiner (véase figura):

$$\left.\begin{aligned} I_\delta &= I_{\delta_G} + M' d_1^2 \\ I_{\delta_O} &= I_{\delta_G} + M' d_2^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow I_\delta = I_{\delta_O} + M'(d_1^2 - d_2^2)$$

De la figura se puede sacar que:

$$d_2 = Y \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} Y = \frac{7\sqrt{2}}{9} \frac{R}{\pi}$$

$$d_1 = (R - Y) \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} (R - Y) = \frac{\sqrt{2}\, R}{18\pi} (9\pi - 14)$$



Además, I_{δ_O} será:

$$I_{\delta_o} = I_x \cos^2 45° + I_y \operatorname{sen}^2 45° - P_{xy} \operatorname{sen} 90° =$$

$$= \frac{15}{64} MR^2 \frac{1}{2} + \frac{15}{64} MR^2 \frac{1}{2} = \frac{15}{64} MR^2$$

y con $M' = \dfrac{3M}{4}$ sustituimos:

$$I_\delta = \frac{15}{64} MR^2 + \frac{3M}{4} \frac{2R^2}{324\pi^2} [(9\pi - 14)^2 - 14^2] = 0{,}238\, MR^2$$

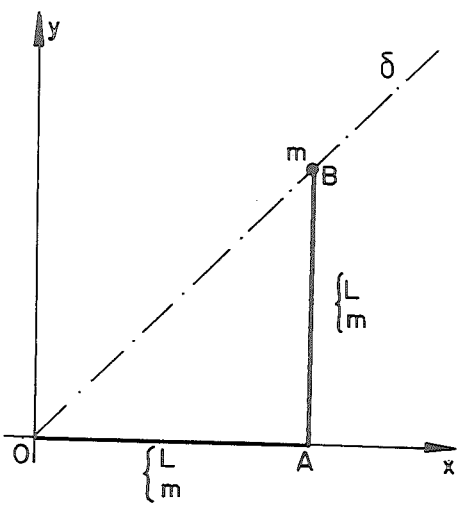
13. En el sistema plano de la figura las barras tienen longitud L y masa m, cada una, y en B hay una masa puntual de valor m. Hallar:

1.°) Centro de masas G del sistema.

2.°) Momento de inercia respecto a la recta OB.

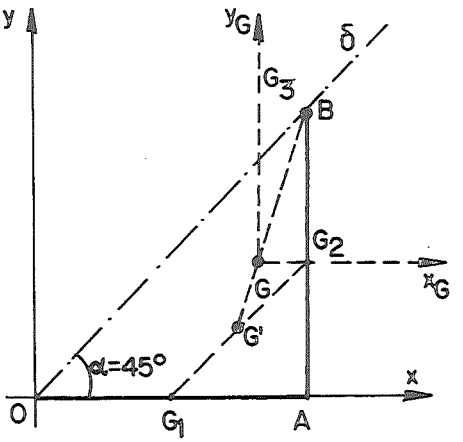
3.°) Direcciones y momentos principales en G.

4.°) ¿En qué punto del eje «y» habrá que situar una masa $2m$ para que la elipse central de inercia tenga los ejes horizontal y vertical?



1.°) *Centro de masas G del sistema*

Calculamos el c.d.g. de cada una de las partes (varillas OA y AB, y masa puntual en B) y, a continuación, suponemos la masa de cada una de dichas partes situada en su c.d.g. respectivo, para calcular después el c.d.g. de un sistema de masas puntuales.



a) *Barra horizontal OA*

Por suponer las barras homogéneas, el c.d.g. estará en el centro de simetría de cada barra:

$$X_1 = \frac{L}{2} \qquad Y_1 = 0$$

b) *Barra vertical AB*

$$X_2 = L \qquad Y_2 = \frac{L}{2}$$

c) *Masa puntual en B*

Su c.d.g. coincide con ella misma. Por tanto:

$$X_3 = L \qquad Y_3 = L$$

El c.d.g. del sistema total tendrá unas coordenadas dadas por las expresiones:

$$X = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m\frac{L}{2} + mL + mL}{3m} = \frac{5}{6}L$$

$$Y = \frac{m_1 Y_1 + m_2 Y_2 + m_3 Y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m \cdot 0 + m\frac{L}{2} + mL}{3m} = \frac{1}{2}L$$

Es decir:

$$G\left(\frac{5}{6}L, \frac{1}{2}L\right)$$