ECS2



Une collection dirigée par
Sylvain Rondy

Fiches-méthodes

Maths

Exercices corrigés

Benoît Grandpierre
Stéphane Préteseille

ellipses

ECS2



Une collection dirigée
par **Sylvain Rondy**

Maths

Benoît Grandpierre
Professeur agrégé de mathématiques
en classe préparatoire économique et commerciale
au lycée Montaigne à Paris

Stéphane Préteseille
Professeur agrégé de mathématiques
en classe préparatoire économique et commerciale
au lycée Saint-Jean à Douai

ellipses



Une collection dirigée
par **Sylvain Rondy**

Retrouvez tous les livres de la collection sur www.editions-ellipses.fr

La maquette de cet ouvrage a été adaptée en Latex par Stéphane Préteseille.

ISBN 9782340-035287
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2019
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La collection « Que faire ? » a été conçue pour aider chacun à comprendre le cours et à maîtriser les techniques fondamentales en parcourant, par petites cellules ciblées (fiches), l'ensemble du programme.
Cet ouvrage est composé de 10 chapitres et contient en tout 52 fiches, chacune comportant entre 5 et 9 pages et portant sur une notion très précise du programme, ce qui oblige à se focaliser, sans se disperser, donc en favorisant la concentration et en augmentant l'efficacité du travail fourni.
Le plan de chaque fiche est le suivant :

- La partie « Quand on ne sait pas ! » présente le thème abordé, propose des rappels de cours et donne les premières pistes à explorer afin de s'en sortir.
- La partie « Que faire ? » délivre les techniques à connaître absolument pour résoudre les exercices.
- La partie « Conseils » donne quelques astuces, des conseils de rédaction ou met en garde contre des erreurs typiques à éviter.
- La partie « Exemple traité » permet de vérifier que l'on a bien compris en proposant un exercice typique du thème étudié, dont la correction est très détaillée.
- La partie « Exercices » propose des exercices choisis soigneusement afin de balayer largement le thème étudié.
- La partie « Pour vous aider à démarrer » donne des idées de méthode à ceux qui en éprouvent le besoin face aux exercices proposés.
- La partie « Solutions des exercices » fournit les solutions des exercices rédigées avec le plus grand soin.

J'espère que ce livre sera un bon compagnon de route et une aide efficace à tous les lecteurs.

Bon courage à tous !

Sylvain Rondy

Sommaire

Troisième semestre

Espaces vectoriels

1 Déterminer une matrice de passage et appliquer les formules de changement de base 11
2 Montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme 19
3 Utiliser la trace d'une matrice 25

Réduction des endomorphismes

4 Trouver des valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme 31
5 Localiser les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme 37
6 Étudier la diagonalisabilité d'une matrice carrée 41
7 Étudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme 49

Algèbre bilinéaire

8 Montrer qu'une application est un produit scalaire 57
9 Montrer qu'une application définie à l'aide d'une intégrale est un produit scalaire 65
10 Tester l'orthogonalité ou l'orthonormalité d'une famille de vecteurs 73
11 Utiliser la méthode d'orthonormalisation de Schmidt 81
12 Utiliser les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale 89
13 Utiliser les propriétés d'une matrice de changement de base orthonormale 95
14 Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux, supplémentaires orthogonaux 101

Compléments d'analyse

15 Appliquer le théorème de changement de variable dans une intégrale généralisée 109

Compléments de probabilité

16 Appliquer la formule de l'espérance totale 115
17 Déterminer la loi d'une variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité 121
18 Étudier l'existence et calculer la variance d'une variable aléatoire à densité 129
19 Étudier l'espérance d'une variable aléatoire discrète à l'aide du théorème de transfert 137
20 Étudier l'espérance d'une variable aléatoire à densité à l'aide du théorème de transfert 143

Suites de variables aléatoires

21 Déterminer la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes 149
22 Déterminer les lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes 157
23 Étudier l'indépendance de variables aléatoires discrètes 163
24 Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires discrètes 169
25 Déterminer la loi du minimum et du maximum de variables aléatoires discrètes 175
26 Calculer la covariance d'un couple de variables aléatoires discrètes 183
27 Calculer l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes 191
28 Étudier l'indépendance de variables aléatoires quelconques 197
29 Déterminer la loi de la somme de variables aléatoires à densité indépendantes 203

Quatrième semestre

Compléments d'algèbre bilinéaire

30 Montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est symétrique 213
31 Déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel 219
32 Utiliser une projection orthogonale pour minimiser une norme 227
33 Montrer qu'une application est un projecteur orthogonal 235
34 Diagonaliser une matrice symétrique réelle 243
35 Diagonaliser un endomorphisme symétrique 253
36 Utiliser les propriétés des matrices symétriques réelles 261
37 Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien est stable par un endomorphisme 269

Convergences

38 Appliquer l'inégalité de Markov ou l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev 277
39 Étudier la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires 285
40 Étudier la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à valeurs entières 291
41 Étudier la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires quelconques 299

Estimation

42 Montrer qu'un estimateur est sans biais, asymptotiquement sans biais 307
43 Déterminer le risque quadratique d'un estimateur, comparer des estimateurs 315
44 Montrer qu'une suite d'estimateurs est convergente 323
45 Déterminer un intervalle de confiance 327
46 Déterminer un intervalle de confiance asymptotique 333

Fonctions de plusieurs variables

47 Déterminer le gradient d'une fonction de plusieurs variables 341
48 Déterminer la matrice hessienne d'une fonction de plusieurs variables 347
49 Rechercher les extremums locaux d'une fonction sur un ouvert 353
50 Rechercher les extremums d'une fonction sous contrainte quelconque 361
51 Rechercher les extremums d'une fonction sous contrainte linéaire 369
52 Rechercher les extremums globaux d'une fonction de plusieurs variables 379

Troisième semestre



Déterminer une matrice de passage et appliquer les formules de changement de base



Quand on ne sait pas !

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et x un vecteur de E.
On écrit x dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme : $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, avec $x_1, \ldots, x_n$ des scalaires.

La matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne à n lignes dont les coefficients sont, de haut en bas, $x_1, \ldots, x_n$.

On rappelle la définition suivante :

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont les matrices des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit x un vecteur de E et f un endomorphisme de E. On note X la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, X' la matrice de x dans la base $\mathcal{B}'$, M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, M' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On dispose des propriétés suivantes :

- P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.
- $X = PX'$.
- $M' = P^{-1}MP$.

Que faire ?

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

- On calcule la matrice P de la façon suivante : la j-ème colonne de P est la matrice de e'_j dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice colonne constituée, dans l'ordre de haut en bas, des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

- Si l'on connaît la matrice X d'un vecteur $x \in E$ dans l'une des bases $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$, ainsi que la matrice P, on détermine la matrice X' de ce même vecteur dans l'autre base à l'aide d'un produit matriciel via la relation $X = PX'$ rappelée dans la partie précédente. Ceci peut nécessiter le calcul de P^{-1}.

- Si l'on connaît la matrice M d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans l'une des bases $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$, ainsi que la matrice P, on détermine la matrice M' de ce même endomorphisme dans l'autre base à l'aide de la relation $M' = P^{-1}MP$ rappelée dans la partie précédente. Ceci nécessite le calcul de P^{-1}.

Conseils

- Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie de référence, $\mathcal{B}$ est souvent la base canonique de l'espace vectoriel E dans lequel on travaille. Le calcul de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est alors assez rapide.
- En général, la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est choisie pour que la matrice d'un endomorphisme f soit « plus simple », souvent diagonale ou triangulaire. Il est possible qu'il soit plus facile de déterminer directement, donc sans utiliser la formule de changement de base, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exemple traité

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{E} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ et la famille $\mathcal{B} = \big((1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\big)$.
On admet que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (voir le tome de première année, fiche 108, pour une preuve).

1 Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{B}$.
Calculer la matrice inverse de P, notée P^{-1}.

2 Soit $x = (3,2,2) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les matrices colonnes X et X' des coordonnées de x dans les bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.

3 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f\big((x,y,z)\big) = \big(-2x+3y+z, -x+2y+z, -3x+3y+2z\big)$$

Déterminer les matrices M et D de f dans les bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.
Quel est lien entre les matrices M, D et P ?

SOLUTION

1 - Par définition, la matrice P est la matrice dont les colonnes sont les matrices des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ (dans l'ordre). Comme $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, cela revient à écrire les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ en colonne : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- On sait déjà que P est inversible, en tant que matrice de changement de base.

On calcule la matrice inverse de P, par exemple, en résolvant le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \ : \ P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ & & y & + & z & = & c \end{array} \right.$$

On effectue l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour obtenir un système équivalent que l'on résout par substitution :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ & - & y & & & = & -a+b \\ & & y & + & z & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a-y-z \\ y & = & a-b \\ z & = & c-y \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a-c \\ y & = & a-b \\ z & = & -a+b+c \end{array} \right.$$

Le dernier système se traduit matriciellement par : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 On a directement : $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour calculer X', le plus simple est d'appliquer la formule du cours :

$$X = PX', \text{ donc } X' = P^{-1}X$$

Finalement :

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 L'énoncé affirme que f est linéaire. Le lecteur est invité à le vérifier.
On calcule :

$$f\big((1,0,0)\big) = \big(-2,-1,-3\big) \, ; \, f\big((0,1,0)\big) = \big(3,2,3\big) \, ; \, f\big((0,0,1)\big) = \big(1,1,2\big)$$

donc $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule aussi :

$$\begin{aligned} f\big((1,1,0)\big) &= \big(1,1,0\big) \\ f\big((1,0,1)\big) &= \big(-1,0,-1\big) = -\big(1,0,1\big) \\ f\big((1,1,1)\big) &= \big(2,2,2\big) = 2\big(1,1,1\big) \end{aligned}$$

donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Enfin, on dispose de la relation : $M = PDP^{-1}$.

Exercices

EXERCICE 1.1

On considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} p : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) \end{array}$$

1 On note $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathcal{C}$.

2 Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et une base de $\mathrm{Im}(p)$.

3 En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de p est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Déterminer une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$.

EXERCICE 1.2

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose : $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = f(e_1) + e_1$.

1 Calculer v.

2 Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

4 Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

➲ Source : EM Lyon

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1

2 Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont respectivement le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques et le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques, puis donner une base de chacun des ces sous-espaces.

3 Procéder par analyse-synthèse : en observant la matrice à obtenir, remarquer que le dernier vecteur de $\mathcal{B}$ appartient au noyau de p et que les trois premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ sont leur propre image par p.

4 Utiliser la formule de changement de base.

EXERCICE 1.2

1 Calculer v matriciellement.

2 Utiliser un argument de dimension pour démontrer que c'est une base.

4 Calculer A' à l'aide de la formule de changement de base.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1

p est linéaire par linéarité de la transposition.

1 On calcule :

$$p\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad p\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$p\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad p\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Ainsi $M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2 ■ Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors en notant O la matrice nulle :

$$M\in\mathrm{Ker}(p)\Longleftrightarrow p(M)=O\Longleftrightarrow\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\right)=O\Longleftrightarrow M=\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}$$

Une base de $\mathrm{Ker}(p)$ est alors $\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ (génératrice d'après ce qui précède, libre car un seul vecteur non nul).

- Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il vient :

$$\begin{aligned}\text{Im}(p) &= \text{Vect}\big(p(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}), p(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}), p(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}), p(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})\big)\\ &= \text{Vect}(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})\\ &= \text{Vect}(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})\end{aligned}$$

Une base de $\text{Im}(p)$ est alors $(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})$ (génératrice d'après ce qui précède, libre par vérification rapide ; on peut aussi utiliser le théorème du rang pour obtenir $\dim\big(\text{Im}(p)\big) = 3$ et éviter de vérifier la liberté).

3 Procédons par analyse-synthèse.

- Analyse.

Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est D. La dernière colonne de D est nulle, donc le dernier vecteur de la base $\mathcal{B}$ est un vecteur de $\text{Ker}(p)$. Par ailleurs, les premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont leur propre image, ce sont donc des vecteurs de $\text{Im}(p)$.

- Synthèse.

On considère alors la famille de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ obtenue en concaténant les vecteurs des bases de $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ précédemment déterminées :

$$\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix})$$

La famille $\mathcal{B}$ est obtenue en concaténant une base de l'espace des matrices symétriques et une base de l'espace des matrices antisymétriques. Or ces espaces sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (résultat établi dans la fiche 112 du tome de première année).

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on pouvait aussi montrer rapidement que $\mathcal{B}$ est libre, et de cardinal $4 = \dim\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)$.)

Enfin, on calcule :

$$\begin{aligned} p(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad p(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ p(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \quad p(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi : $D = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

4 Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$, alors on a bien : $M = PDP^{-1}$.

On calcule alors : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 1.2

1 La matrice de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ est par définition la première colonne de A. Ainsi $f(e_1) = (0, -2, 1)$.
Finalement $v = f(e_1) + e_1 = (1, -2, 1)$.

2 S'agissant d'une famille de 3 vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est une famille libre.
On a :

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma e_1 = (0,0,0) &\iff \alpha(1,-1,0) + \beta(1,-2,1) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0) \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma, -\alpha - 2\beta, \beta) = (0,0,0) \end{aligned}$$

On obtient successivement, de droite à gauche : $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$ et enfin $\gamma = 0$, donc $\mathcal{C}$ est libre.
Finalement $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 Comme $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on construit P en écrivant les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ en colonne : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que P est inversible. On détermine P^{-1} en résolvant le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ -x & - & 2y & & & = & b \\ & & y & & & = & c \end{array} \right.$$

On résout par substitutions (et en réordonnant les inconnues à la fin) :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & a - x - y \\ x & = & -2y - b \\ y & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & = & & - & b & - & 2c \\ y & = & & & & & c \\ z & = & a & + & b & + & c \end{array} \right.$$

Le dernier système se traduit matriciellement par : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4 D'après la formule de changement de base on a : $A' = P^{-1}AP$.

On calcule successivement $AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme



2

Quand on ne sait pas !

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par f si pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.

Que faire ?

Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est stable par un endomorphisme f, on se donne un vecteur x quelconque de F et on démontre que $f(x)$ est aussi dans F. Pour cela on montre que $f(x)$ satisfait les propriétés qui caractérisent F.

Conseils

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

- Si le sous-espace vectoriel F dont on veut montrer la stabilité par f est un noyau d'application linéaire, il s'écrit $F = \text{Ker}(g)$, où g est une application linéaire définie sur E.
  Montrer que F est stable par f, c'est montrer que pour tout $x \in F$, $f(x) \in \text{Ker}(g)$, c'est-à-dire $g\big(f(x)\big) = 0$.
- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces stables par f.
  En effet, $f(0_E) = 0_E \in \{0_E\}$ et pour tout $x \in E$, $f(x) \in E$.

Exemple traité

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On considère l'endomorphisme d défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X]$, $d(P) = P'$.
Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace stable par d.

SOLUTION

- L'application d est bien linéaire par linéarité de la dérivation. Par ailleurs, si P est un polynôme à coefficients réels, alors P' est encore un polynôme à coefficients réels. Enfin, le degré de P' est inférieur à celui de P, lui-même inférieur à n.
  Ainsi d est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

■ Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Soit P un élément de $\mathbb{R}_k[X]$.
Par propriété du degré, on a : $\deg(P') \leqslant \deg(P) \leqslant k$.
Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $d(P) \in \mathbb{R}_k[X]$. On a montré que $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par d.

Exercices

EXERCICE 2.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

1 Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par f.

2 Monter que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $\text{Ker}\big(P(f)\big)$ est stable par f.

EXERCICE 2.2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 2 & 4 & -4 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1 Déterminer les matrices A et B, représentant respectivement $f - \text{id}$ et f^2 dans la base canonique.

2 Montrer que $\text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Ker}(f^2) = \mathbb{R}^3$.

3 Vérifier que $\text{Ker}(f^2)$ est stable par f et en déduire l'existence d'une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

4 Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$. En déduire l'existence d'une base (e'_2, e'_3) de $\text{Ker}(f^2)$ telle que $e'_2 \in \text{Ker}(f)$, puis justifier que l'on peut choisir la base $\mathcal{E}$ de la question précédente de telle sorte que $a = c = 0$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 2.1

1 Si un vecteur s'écrit $f(y)$, où $y \in E$, alors il appartient à $\text{Im}(f)$.

2 Montrer que $\big(P(f)\big)\big(f(x)\big) = 0$ en écrivant formellement $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

EXERCICE 2.2

2 Utiliser la caractérisation des supplémentaires à l'aide des dimensions et de l'intersection réduite au vecteur nul.
Pour le calcul des dimensions, déterminer une base du noyau de $f - \mathrm{id}$ et le rang de B.

3 Calculer $f^3(x)$ avec $x \in \mathrm{Ker}(f)$ pour établir la stabilité de $\mathrm{Ker}(f^2)$ par f.
Procéder par concaténation de bases pour construire $\mathcal{E}$.

4 Justifier que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$, puis compléter une famille formée d'un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$ en une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$.
Reprendre alors la construction de la question précédente pour conclure.

Solutions des exercices

EXERCICE 2.1

1 ■ Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par f.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On veut montrer que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
On calcule :

$$f\big(f(x)\big) \underset{x\in\mathrm{Ker}(f)}{=} f(0) \underset{f \text{ linéaire}}{=} 0$$

Ainsi, $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
On a montré que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par f.

■ Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. On veut montrer que $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition, $f(y)$ est un élément de $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.

2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrons que $\mathrm{Ker}\big(P(f)\big)$ est stable par f.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\big(P(f)\big)$.
On veut montrer que $f(x) \in \mathrm{Ker}\big(P(f)\big)$, c'est-à-dire que $\big(P(f)\big)\big(f(x)\big) = 0$.
Il existe un entier naturel n et des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}\big(P(f)\big)\big(f(x)\big) &= \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k\Big)\big(f(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k\big(f(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k f\big(f^k(x)\big) = f\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x)\Big) \quad \text{(par linéarité de } f\text{)}\\ &= f\Big(\big(P(f)\big)(x)\Big)\end{aligned}$$

Or par hypothèse $\big(P(f)\big)(x) = 0$, donc comme $f(0) = 0$, on a $\big(P(f)\big)\big(f(x)\big) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\big(P(f)\big)$ est stable par f.

On a démontré au passage que pour tout polynôme P et tout endomorphisme f, f commute avec $P(f)$, c'est-à-dire : $f \circ P(f) = P(f) \circ f$.

EXERCICE 2.2

1 On calcule :

$$A = M - I_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 2 & 4 & -4 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 \\ 2 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = M^2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2 On va utiliser la caractérisation des supplémentaires à l'aide des dimensions et de l'intersection réduite au vecteur nul. (Méthode de première année, consulter si besoin la fiche 112 du tome de première année.)

- Montrons que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f^2) = \{0\}$.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f^2)$.
  En particulier, $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, donc $f(x) - x = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.
  Par ailleurs, $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, donc $f^2(x) = 0$.
  On a alors : $0 = f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(x) = x$.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f^2) \subset \{0\}$ et comme réciproquement on a $0 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f^2)$, on a montré que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f^2) = \{0\}$.
- Montrons que la somme des dimensions des deux sous-espaces vectoriels vaut $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. On raisonne matriciellement.

▶ La matrice de $f - \mathrm{id}$ dans la base canonique est A. Soit $x \in E$ dont la matrice dans la base canonique est $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a :

$$x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \iff AX = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} -10a & & +10c & = & 0 \\ 2a & -b & -4c & = & 0 \\ -3a & -b & +c & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\text{substitution}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rrrcl} & & c & = & a \\ 2a & -b & -4a & = & 0 \\ -3a & -b & +a & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} c & = & a \\ b & = & -2a \end{array} \right.$$

Finalement : $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \iff X = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} \iff X \in \mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big)$.

En particulier, $(1, -2, 1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}$ (libre car un seul vecteur qui est non nul, et génératrice d'après nos calculs), donc $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = 1$.

▶ Le rang de f^2 est le rang de la matrice $B = M^2 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On observe que les 3 colonnes de M^2 sont proportionnelles, donc le rang de M^2 est au plus 1, et comme $M^2 \neq 0$, le rang de M^2 est au moins 1.
Finalement $\mathrm{Rg}(M^2) = 1$ et on en déduit à l'aide du théorème du rang que $\dim\big(\mathrm{Ker}(f^2)\big) = 2$.

On a alors $\dim\big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f^2)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

D'après ce qui précède, on a : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f^2) = \mathbb{R}^3$.

3 ■ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. On a donc : $f^2(x) = 0$.
Montrons que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Pour cela on calcule :

$$f^2\big(f(x)\big) = f^3(x) = f\big(f^2(x)\big) = f(0) \underset{f \text{ linéaire}}{=} 0$$

On a donc montré que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^2)$, donc $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par f.

■ On considère alors une base (e_1) de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et une base (e_2, e_3) de $\mathrm{Ker}(f^2)$. Comme ces deux espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
La stabilité de $\mathrm{Ker}(f^2)$ par f implique que $f(e_2) \in \mathrm{Ker}(f^2)$ et $f(e_3) \in \mathrm{Ker}(f^2)$, puisque e_2, e_3 appartiennent à $\mathrm{Ker}(f^2)$.
Ainsi il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{array}{ll} f(e_1) = e_1 & \text{puisque } e_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \\ f(e_2) = a\,e_2 + c\,e_3 & \text{puisque } f(e_2) \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) \\ f(e_3) = b\,e_2 + d\,e_3 & \text{puisque } f(e_3) \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) \end{array}$$

Avec ces notations on a : $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$.

4 ■ Soit $x \in \text{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$, puis $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(0) = 0$, donc $x \in \text{Ker}(f^2)$.
Ceci étant valable pour tout $x \in \text{Ker}(f)$, on a montré que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

■ Comme la dernière colonne de M est proportionnelle à la première, M est de rang au plus 2 et donc n'est pas inversible. Ainsi $\text{Ker}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et il existe $e'_2 \in \text{Ker}(f)$ non nul. D'après ce qui précède on a en particulier $e'_2 \in \text{Ker}(f^2)$.
D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (e'_2) de $\text{Ker}(f^2)$ en une base (e'_2, e'_3) de $\text{Ker}(f^2)$ puisque cet espace est de dimension 2.

■ On peut alors reprendre la construction de la base $\mathcal{E}$ de la question précédente en prenant comme base de $\text{Ker}(f^2)$ la base (e'_2, e'_3) que l'on vient de construire.
On remplace les vecteurs e_2 et e_3 par les vecteurs e'_2 et e'_3 et comme $f(e'_2) = 0$, on a : $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, avec $b, d \in \mathbb{R}$.

Utiliser la trace d'une matrice



Quand on ne sait pas !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors par définition la trace de A, noté $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux.

Formellement : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

On dispose alors des propriétés suivantes :

- L'application qui à toute matrice carrée d'ordre n associe sa trace est une forme linéaire non nulle.
- Deux matrices semblables ont la même trace.
  En d'autres termes, si A et P sont des matrices carrées d'ordre n telles que P est inversible, alors :
  $$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$$

Que faire ?

- Étant donné une matrice carrée A, on calcule sa trace en sommant ses coefficients diagonaux.
- Étant donné trois matrices carrées de même ordre A, B et P, liées par la relation $B = P^{-1}AP$, on a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. Ainsi si l'on a déjà calculé la trace de A ou de B, on trouve la trace de l'autre matrice.

Conseils

Si l'on connaît tous les coefficients diagonaux d'une matrice, sauf un, mais que l'on connaît la trace de cette matrice, alors on peut calculer le coefficient manquant. Voir l'exemple traité et l'exercice 3.

Cette démarche peut être utile pour déterminer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme (voir la fiche 4).

Exemple traité

Soit $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ -4 & 7 & 8 \\ -1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Que vaut a ?

SOLUTION

On sait d'après le cours que $\text{Tr}(P^{-1}MP) = \text{Tr}(M)$.

On calcule d'une part : $\text{Tr}(M) = \frac{1}{5}(11 + 7 + 12) = \frac{30}{5} = 6$.

On calcule d'autre part : $\text{Tr}(P^{-1}MP) = 1 + 2 + a$.

Ainsi : $1 + 2 + a = 6$, donc $a = 3$.

Exercices

EXERCICE 3.1

Le but de cet exercice est de manipuler la définition de la trace sous forme abstraite.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont des entiers naturels non nuls.

1 Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

a. Démontrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

b. À l'aide du résultat précédent, retrouver le résultat du cours : pour toutes matrices semblables $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$.

2 On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démontrer que $\text{Tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $A = 0$.

EXERCICE 3.2

Soit $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure.
On suppose que :

- Il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $TX = X$.
- $\text{Tr}(T) = 0$.
- $\text{Tr}(T^2) = 2$.

Déterminer les coefficients diagonaux de T.

EXERCICE 3.3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 2 & 4 & -4 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On a vu dans la fiche 2 qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ et deux réels b et d, tels que $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$. Déterminer d.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 3.1

1 Avec les notations de l'énoncé, on rappelle que le terme général de la matrice AB est $c_{i,j}$ avec :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Exprimer les traces de AB et de BA sous la forme d'une somme double.

2 Reprendre la formule précédente en remplaçant les coefficients de B par ceux de ${}^tA$, c'est-à-dire en remplaçant $b_{k,i}$ par $a_{i,k}$.

EXERCICE 3.2

On exploite, dans l'ordre, les trois relations de l'énoncé :

- Justifier que la matrice $T - I_3$ est triangulaire supérieure non inversible, puis en déduire un coefficient diagonal de T.
- Traduire l'énoncé par une équation liant les trois coefficients diagonaux de T.
- Traduire l'énoncé par une équation liant les trois coefficients diagonaux de T.

Résoudre finalement le système obtenu.

EXERCICE 3.3

Utiliser la formule de changement de base et exploiter une des propriétés de la trace.

Solutions des exercices

EXERCICE 3.1

1 a. Les matrices AB et BA sont respectivement carrée d'ordre n et carrée d'ordre p. Leurs coefficients diagonaux, notés respectivement $(c_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(d_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$, vérifient :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ c_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,i} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ d_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}$$

Ainsi on a : $\text{Tr}(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}$.

Or s'agissant de sommes finies, on peut permuter les symboles $\sum$ dans la dernière égalité pour obtenir :

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} b_{i,k}a_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{k,i}b_{i,k}$$

On reconnaît $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{k,k}$ dans cette dernière expression, si bien que finalement :

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,k} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \mathrm{Tr}(AB)$$

b. On applique ce qui précède avec $A = P^{-1}N$ et $B = P$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M) &= \mathrm{Tr}\big(P^{-1}NP\big) = \mathrm{Tr}\big((P^{-1}N)P\big)\\ &= \mathrm{Tr}\big(P(P^{-1}N)\big) = \mathrm{Tr}\big((PP^{-1})N\big) = \mathrm{Tr}(N)\end{aligned}$$

2 Si $A = 0$, alors $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \mathrm{Tr}(0) = 0$.

Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$.

En utilisant la formule littérale pour $\mathrm{Tr}(BA)$ avec $b_{k,i} = a_{i,k}$ (les coefficients de la matrice $B = {}^tA$), il vient :

$$0 = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}a_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}^2$$

Il s'agit d'une somme de réels positifs ou nuls qui vaut 0, donc tous ses termes sont nuls.

Ainsi : $\forall\,(i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,k}^2 = 0$, donc $a_{i,k} = 0$, puis $A = 0$.

EXERCICE 3.2

Notons a, b et c les coefficients diagonaux de T. On exploite les trois hypothèses de l'énoncé.

- Comme il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $TX = X$, on a $(T - I_3)X = 0$ avec X non nul, donc la matrice $T - I_3$ n'est pas inversible. S'agissant d'une matrice triangulaire supérieure, elle a nécessairement au moins un 0 sur sa diagonale. Ses coefficients diagonaux étant $a-1$, $b-1$ et $c-1$, l'un des coefficients a, b ou c est égal à 1. Quitte à les renommer, on peut supposer que $c = 1$.
- On calcule : $\mathrm{Tr}(T) = a+b+c = a+b+1$. Ainsi on dispose de l'équation : $a+b+1 = 0$.
- Comme T est triangulaire de coefficients diagonaux a, b et c, T^2 est triangulaire de coefficients diagonaux a^2, b^2 et $c^2 = 1$. Ainsi $\mathrm{Tr}(T^2) = a^2 + b^2 + 1$. On dispose alors d'une deuxième équation : $a^2 + b^2 + 1 = 2$, c'est-à-dire $a^2 + b^2 = 1$.

On trouve ainsi les coefficients diagonaux de T en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+1=0 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=-a-1 \\ a^2+(-a-1)^2=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=-a-1 \\ a^2+a^2+2a+1=1 \end{array}\right.$$

La dernière équation se simplifie en : $2a^2+2a=0$, c'est-à-dire $a^2+a=0$, c'est-à-dire $a(a+1)=0$. Comme $a(a+1)=0$ si et seulement si $a=0$ ou $a=-1$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+1=0 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right. \iff \left(\left\{\begin{array}{l} b=-1 \\ a=0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} b=0 \\ a=-1 \end{array}\right.\right)$$

Finalement, les coefficients diagonaux de T sont 0, 1 et -1.

EXERCICE 3.3

En notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{E}$ et $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, on dispose de la relation $M=PTP^{-1}$.
On a alors, comme deux matrices semblables ont la même trace :

$$\text{Tr}(M)=\text{Tr}(PTP^{-1})=\text{Tr}(T)=1+d$$

On calcule aussi : $\text{Tr}(M)=\dfrac{1}{5}\big(-5+4+6\big)=1$.
Ainsi $d=0$.

Trouver des valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme



Quand on ne sait pas !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E et λ un scalaire.

  On dit que λ est valeur propre de f s'il existe un vecteur $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$.
  On dit alors que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
  On note $\mathrm{Sp}(f)$ le spectre de f, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de f.

- Soit A une matrice carrée d'ordre n et λ un scalaire.

  On dit que λ est valeur propre de A s'il existe une matrice colonne X **non nulle** telle que $AX = \lambda X$.
  On dit alors que X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
  On note $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A.

On dispose du résultat suivant :

Si T est une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de T sont exactement ses coefficients diagonaux.

Que faire ?

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E, A une matrice carrée d'ordre n, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Pour montrer que λ est valeur propre de A, on peut montrer en résolvant un système linéaire que l'espace vectoriel $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ (A - \lambda I_n)X = O\}$ n'est pas réduit au vecteur nul, où I_n est la matrice identité d'ordre n, et O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

  En effet, il existe alors X non nul tel que $(A-\lambda I_n)X = O$, c'est-à-dire tel que $AX = \lambda X$.

  Ceci est équivalent à montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

- Pour montrer que λ est valeur propre de f, on peut montrer en se ramenant à un système linéaire que $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul.

En effet, il existe alors un vecteur x non nul tel que $(f - \lambda \mathrm{id}_E)(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(x) = \lambda x$.

- Parfois, l'énoncé invite à calculer $f(x)$ ou AX, avec $x \in E$ ou X une matrice colonne, non nuls. Si l'on constate que l'on a la relation $f(x) = \lambda x$ ou $AX = \lambda X$, alors λ est valeur propre de f ou de A.

Enfin, on peut passer des endomorphismes aux matrices, et réciproquement, à l'aide du résultat suivant :

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors f et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ont les mêmes valeurs propres.

Conseils

- Attention à ne pas oublier qu'un vecteur propre, par définition, est non nul.
- 0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si cet endomorphisme n'est pas injectif.
- 0 est valeur propre d'une matrice A si et seulement si cette matrice n'est pas inversible.
- Si la somme des coefficients de chaque ligne d'une matrice A est égale à une même constante λ, alors λ est valeur propre de A et un vecteur propre associé est la matrice colonne X dont tous les coefficients valent 1.

  Ce résultat ne figurant pas au programme officiel, il est nécessaire dans cette situation de calculer explicitement AX pour constater que λ est valeur propre de A.
- Si λ est valeur propre de A, alors λ est valeur propre de ${}^tA$ (voir la deuxième question de l'exercice 3).

Exemple traité

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 J est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de J.

2 En calculant la somme des coefficients de chaque ligne, trouver une autre valeur propre de J.

3 En déduire deux valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

SOLUTION

1 Les colonnes de J sont proportionnelles, donc J n'est pas inversible. Ainsi 0 est valeur propre de J.

2 La somme des coefficients de chaque ligne de J vaut 3. On traduit ceci par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq 0$, 3 est valeur propre de J de vecteur propre associé $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

3 On remarque que :

$$A = \begin{pmatrix}2+3 & 2 & 2\\ 2 & 2+3 & 2\\ 2 & 2 & 2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = 2J + 3I_3$$

On considère alors X_0 un vecteur propre pour J associée à la valeur propre 0, et on calcule : $AX_0 = (2J + 3I_2)X_0 = 2JX_0 + 3X_0 = 0 + 3X_0 = 3X_0$.
Ainsi 3 est une valeur propre de A.

On considère ensuite X_3 un vecteur propre pour J associé à la valeur propre 3, et on calcule : $AX_3 = (2J + 3I_2)X_3 = 2JX_3 + 3X_3 = 2 \times 3X_3 + 3X_3 = 9X_3$.
Ainsi 9 est une valeur propre de A.

Exercices

EXERCICE 4.1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par : $f(P) = XP' + P''$.

1 Déterminer l'image d'un polynôme constant par f, et en déduire une valeur propre de f.

2 Expliciter la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déduire toutes les valeurs propres de f.

EXERCICE 4.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit f un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = \theta$, où θ désigne l'endomorphisme nul de E.
Montrer que 0 est valeur propre de f, et que c'est sa seule valeur propre.

EXERCICE 4.3

Soit $M = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

1 Montrer que 0 est valeur propre de M.

2 Calculer la somme des coefficients de chaque colonne et en déduire une autre valeur propre.

3 En considérant $\mathrm{Tr}(M)$, montrer que si M est diagonalisable, alors 5 est aussi valeur propre de M.

4 Vérifier que 5 est bien valeur propre de M.

EXERCICE 4.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^3 - 2M^2 - M = A$.
Justifier que si λ est valeur propre de M, alors $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$ est valeur propre de A.

2 Que dire du spectre de M ?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 4.1

Pour la question 2, observer que la matrice de f est triangulaire supérieure.

EXERCICE 4.2

- Pour montrer que 0 est valeur propre, raisonner par l'absurde et exploiter le fait que la composée de deux isomorphismes est encore un isomorphisme.
- Établir que si $f(x) = \lambda x$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.

EXERCICE 4.3

1 Justifier que M n'est pas inversible.

2 La somme des coefficients de chaque colonne de M permet de trouver une valeur propre λ de ${}^tM$.
Justifier que si ${}^tM - \lambda I_3$ n'est pas inversible, alors $M - \lambda I_3$ ne l'est pas non plus.

3 On rappelle que M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Dans ce cas, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de M.
Connaissant deux valeurs propres de M d'après les questions précédentes, le calcul de la trace doit permettre d'en déduire la valeur propre manquante.

4 Justifier que $M - 5I_3$ n'est pas inversible.

EXERCICE 4.4

1 Considérer un vecteur propre X de M et calculer $(M^3 - 2M^2 - M)X$.

2 Déterminer les valeurs propres de A et en déduire que les valeurs propres de M sont parmi les racines d'un certain polynôme.

Solutions des exercices

EXERCICE 4.1

1 Soit P un polynôme constant. Alors $P' = 0$ et $P'' = 0$, et donc $f(P) = 0$.

En particulier, le polynôme P constant égal à 1 est non nul et vérifie $f(P) = 0 \times P$, donc 0 est valeur propre de f.

2 On calcule :

$$f(1) = 0,\ f(X) = X,\ f(X^2) = 2X^2 + 2,\ f(X^3) = 3X^3 + 6X$$

Ainsi la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

S'agissant d'une matrice triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. De plus les valeurs propres de f sont aussi les valeurs propres de M. Finalement, les valeurs propres de f sont exactement 0, 1, 2 et 3.

EXERCICE 4.2

- 0 est valeur propre de f si et seulement si $\ker(f) \neq \{0_E\}$.
  Supposons par l'absurde que $\ker(f) = \{0_E\}$, alors f est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, donc un isomorphisme. Par composition d'isomorphismes, f^p est encore un isomorphisme, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $f^p = \theta$.
  Finalement, $\ker(f) \neq \{0_E\}$ donc 0 est valeur propre de f.
- Soit λ une valeur propre de f. Il existe alors $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$.
  On calcule aussi : $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$.
  Une récurrence immédiate donne : $f^p(x) = \lambda^p x$.
  Or par hypothèse, $f^p = \theta$, donc $\lambda^p x = 0_E$ et comme x n'est pas le vecteur nul, c'est que $\lambda^p = 0$ et donc $\lambda = 0$.
  Ainsi la seule valeur propre de f est bien 0.

EXERCICE 4.3

1 M ayant deux colonnes identiques, elle n'est pas inversible (son rang est au plus 2). Ainsi 0 est valeur propre de M.

2 La somme des coefficients de chaque colonne de M vaut 4. On en déduit que la somme des coefficients de chaque ligne de ${}^tM$ vaut 4. On calcule alors :

$${}^tM \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, 4 est valeur propre de ${}^tM$.

Ainsi, ${}^tM - 4I_3$ n'est pas inversible, donc sa transposée ${}^t\left({}^tM - 4I_3\right) = M - 4I_3$ n'est pas inversible non plus. Finalement, 4 est valeur propre de M.

3 Si M est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$, les coefficients de D étant les valeurs propres de M.
Par ailleurs, par propriété de la trace, on a $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(D)$.
On calcule $\text{Tr}(M) = 1 + 5 + 3 = 9$ et deux des trois coefficients de D valent 0 et 4, puisque 0 et 4 sont valeurs propres de M. Nécessairement la dernière valeur propre de M est $9 - 4 = 5$.

4 On calcule : $M - 5I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Cette matrice a une ligne nulle, elle n'est donc pas inversible. Ainsi 5 est bien valeur propre de M.

EXERCICE 4.4

1 Soit X un vecteur propre pour M associé à la valeur propre λ.
On calcule : $(M^3 - 2M^2 - M)X = M^3X - 2M^2X - MX$.
Or : $MX = \lambda X$, puis : $M^2X = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda^2 X$ et enfin : $M^3X = \cdots = \lambda^3 X$.
Ainsi : $(M^3 - 2M^2 - M)X = \lambda^3 X - 2\lambda^2 X - \lambda X = (\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda)X$.
Comme X n'est pas nul, $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$ est une valeur propre de $M^3 - 2M^2 - M$, et comme $M^3 - 2M^2 - M = A$, $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$ est une valeur propre de A.

> On vient d'établir un cas particulier d'un résultat général à connaître :
> soit Q un polynôme et f un endomorphisme, si λ est valeur propre de f, alors $Q(\lambda)$ est valeur propre de $Q(f)$.
> On a un résultat identique en remplaçant f par une matrice carrée A.

2 A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\text{Sp}(A) = \{0, -2\}$.
Ainsi, si λ est une valeur propre de M, on a $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda \in \{0, -2\}$.
On résout :

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0$$
$$\underset{\Delta=8}{\iff} \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 - \sqrt{2} \text{ ou } \lambda = 1 + \sqrt{2}$$

puis

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = -2 \iff \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$
$$\iff \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2$$

où, pour ce dernier calcul, on trouve trois solutions particulières et on exploite le fait qu'une équation polynômiale de degré 3 admet au plus trois solutions distinctes.
Finalement : $\text{Sp}(M) \subset \{-1\,,\, 1 - \sqrt{2}\,,\, 0\,,\, 1\,,\, 2\,,\, 1 + \sqrt{2}\}$.

Localiser les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme



5

Quand on ne sait pas !

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E, A une matrice carrée d'ordre n, λ un scalaire et Q un polynôme.

On rappelle que :

- Si Q est un polynôme annulateur de f et si λ est une valeur propre de f, alors λ est une racine de Q.
- Si Q est un polynôme annulateur de A et si λ est une valeur propre de A, alors λ est une racine de Q.

Que faire ?

Étant donné un endomorphisme f, respectivement une matrice carrée A, si l'on en connaît un polynôme annulateur Q, alors les valeurs propres de f, respectivement de A, sont parmi les racines du polynôme annulateur.

Pour trouver les valeurs propres possibles de f, respectivement de A, on détermine généralement les racines de Q en le factorisant (revoir si besoin les méthodes de première année, en particulier celles présentées dans les fiches 28 et 29 du tome de première année).

Attention cependant, les valeurs propres sont **parmi** les racines de Q, il est possible que certaines racines de Q ne soient pas valeur propre de f, respectivement de A.
Pour vérifier qu'une racine de Q est bien valeur propre, il faut utiliser les méthodes de la fiche 4.

Conseils

Si l'énoncé demande de déterminer un polynôme annulateur, c'est que celui-ci doit être « facile » à trouver.
En général son degré est inférieur ou égal à 3 et on l'obtient en calculant f^2, respectivement A^2, et éventuellement f^3, respectivement A^3.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1 Calculer $A^2 - 7A$.

2 En déduire que 3 et 4 sont les seules valeurs propres possibles de A.

➲ Source : Ecricome

SOLUTION

1 On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$A^2 - 7A = \begin{pmatrix} 2 - 7 \times 2 & 7 - 7 \times 1 & -14 - 7 \times (-2) \\ 0 - 7 \times 0 & 9 - 7 \times 3 & 0 - 7 \times 0 \\ 7 - 7 \times 1 & -7 - 7 \times (-1) & 23 - 7 \times 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

On a montré que $A^2 - 7A = -12I_3$.

2 De la relation $A^2 - 7A = -12I_3$, on déduit que $Q = X^2 - 7X + 12$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

Le discriminant de Q est : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1$.

Ses racines sont donc $\dfrac{7-1}{2} = 3$ et $\dfrac{7+1}{2} = 4$.

D'après le cours, les valeurs propres de A sont parmi les racines de Q, donc 3 et 4 sont les seules valeurs propres possibles de A.

Exercices

EXERCICE 5.1

Soit E un espace vectoriel. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$ (p est un projecteur).
Montrer que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$. A-t-on nécessairement $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$?

EXERCICE 5.2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \Big(-x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z,\ \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z,\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z \Big)$$

Calculer $f^2 - f - 2\mathrm{id}_E$ et en déduire les valeurs propres possibles de f.