

100%
EXOS

T^{le}

NOUVEAU
BAC

Maths

SPÉCIALITÉ

*l'entraînement
intensif!*

250 EXERCICES progressifs
& minutés

40 SUJETS DE SPÉCIALITÉ

CORRIGÉS détaillés
& commentés

COURS & MÉTHODES



GRATUIT*: des ressources interactives
et des parcours de révision
sur **annabac.com**



100%
EXOS

T^{le}

Maths

SPÉCIALITÉ

Sophie Barache

Professeur agrégée de mathématiques
au collège Mont-Sauvy d'Orgon

Fabrice Barache

Professeur agrégé de mathématiques
à l'école de l'air de Salon-de-Provence

Sophie Bauer

Professeur agrégée de mathématiques
au lycée Saint-Exupéry de La Rochelle

Raphaël Bauer

Professeur agrégé de mathématiques
au lycée Saint-Exupéry de La Rochelle

Maquette de principe : Frédéric Jély
Mise en pages : Grafatom
Schémas : Grafatom
Édition : Julien Lionnet

© Hatier Paris, 2020

Sous réserve des exceptions légales, toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite, par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par le Code de la Propriété Intellectuelle. Le CFC est le seul habilité à délivrer des autorisations de reproduction par reprographie, sous réserve en cas d'utilisation aux fins de vente, de location, de publicité ou de promotion de l'accord de l'auteur ou des ayants droit.

Votre ouvrage 100 % exos

- Conforme au nouveau programme de Maths Tle (spécialité) entré en vigueur à la rentrée 2020, ce « 100 % exos » vous propose une **méthode de travail** complète et un **entraînement intensif** sur mesure, faisant une large place à la préparation du **nouveau bac**.
- Pour chaque thème du programme, vous trouverez un **COURS** structuré, les **MÉTHODES** qu'il faut maîtriser, des **EXERCICES** progressifs et leurs **CORRIGÉS** détaillés.
- Assortis d'**indications de solutions**, de **commentaires** et de **conseils** des auteurs, tous les exercices corrigés vous permettent :
 - de **comprendre** les notions essentielles et de maîtriser le cours ;
 - de **progresser** et de vous **entraîner** à votre rythme ;
 - de vous **évaluer** et de **réussir** le jour J ;
 - de **préparer** votre orientation.

Le site de vos révisions

- L'achat de cet ouvrage vous permet de bénéficier d'un **ACCÈS GRATUIT*** à toutes les **ressources** d'annabac.com : fiches, quiz, sujets corrigés... et à ses **parcours de révision** personnalisés.
- Pour profiter de cette offre, rendez-vous sur **www.annabac.com**, dans la rubrique « Je profite de mon avantage client ».



* Selon les conditions précisées sur le site.

ANALYSE

1 Limites de suites et de fonctions

COURS & MÉTHODES		7
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	18
	S'entraîner	21
	Préparer un contrôle.....	23
	Aller plus loin	25
CORRIGÉS		27

2 Compléments sur les fonctions

COURS & MÉTHODES		41
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	49
	S'entraîner	50
	Préparer un contrôle.....	53
	Aller plus loin	54
CORRIGÉS		56

3 Fonctions de référence

COURS & MÉTHODES		73
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	81
	S'entraîner	83
	Préparer un contrôle.....	87
	Aller plus loin	89
CORRIGÉS		91

4 Suites et raisonnement par récurrence

COURS & MÉTHODES		113
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	119
	S'entraîner	121
	Préparer un contrôle.....	124
	Aller plus loin	126
CORRIGÉS		127

5 Primitives et équations différentielles

COURS & MÉTHODES		143
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	149
	S'entraîner	150
	Préparer un contrôle.....	152
	Aller plus loin	154
CORRIGÉS		157

6 Intégration

COURS & MÉTHODES		169
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	175
	S'entraîner	176
	Préparer un contrôle.....	181
	Aller plus loin	183
CORRIGÉS		185

PROBABILITÉS

7 Dénombrement – Loi binomiale

COURS & MÉTHODES		199
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	208
	S'entraîner	213
	Préparer un contrôle.....	217
	Aller plus loin	219
CORRIGÉS		224

8 Échantillons, loi des grands nombres

COURS & MÉTHODES		257
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	263
	S'entraîner	266
	Préparer un contrôle.....	271
	Aller plus loin	273
CORRIGÉS		278

GÉOMÉTRIE

9 Vecteurs dans l'espace et produit scalaire

COURS & MÉTHODES		299
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	308
	S'entraîner	310
	Préparer un contrôle.....	315
	Aller plus loin	317
CORRIGÉS		319

10 Représentations paramétriques de droites et équations de plans

COURS & MÉTHODES		337
EXOS & SUJETS	Tester ses connaissances.....	347
	S'entraîner	349
	Préparer un contrôle.....	354
	Aller plus loin	355
CORRIGÉS		357

ANNEXES

Aide-mémoire Python	379
----------------------------------	-----

1 Limites de suites et de fonctions

I LIMITE D'UNE SUITE

1. Limite finie d'une suite

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) **converge vers un réel l** si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

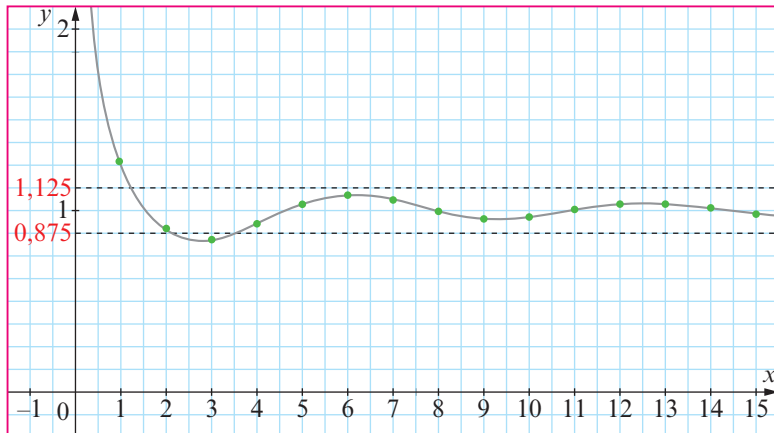
On écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

👍 On dit aussi que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est égale à l .

EXEMPLES :

- La suite (u_n) représentée dans le repère ci-dessous a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$:



On pourrait démontrer que l'intervalle $]0,875; 1,125[$ représenté ci-dessus contient tous les termes de la suite à partir du rang $n = 4$ (et non à partir de $n = 2$ car $u_3 \notin]0,875; 1,125[$).

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; si $q \in]-1; 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

2. Limite infinie d'une suite

Définitions :

On dit qu'une suite (u_n) **diverge vers** $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (respectivement $] -\infty; A[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ (respectivement } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty)$$



On dit aussi que u_n tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$.

EXEMPLES : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

3. Exemple de suite n'ayant pas de limite

La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

En effet, $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Les termes de la suite ne tendent donc pas vers une valeur limite.

Définition : Lorsqu'une suite n'admet pas de limite, on dit encore qu'elle **diverge**.

II LIMITE D'UNE FONCTION

1. Limite en $+\infty$ ou en $-\infty$

De manière analogue aux suites, pour une fonction f , on peut définir la limite de $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$. Lorsqu'elle existe, cette limite peut être égale à un réel, à $+\infty$ ou à $-\infty$.

EXEMPLES :

- Limites en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

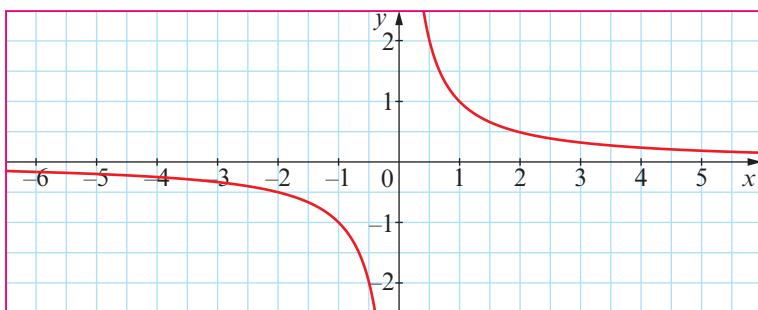
- Limites en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Si f admet une limite finie L en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = L$.

EXEMPLE : La courbe représentative de la fonction inverse admet pour asymptote horizontale l'axe des abscisses en $+\infty$ et en $-\infty$.



2. Limite infinie en un réel a

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a ; +\infty[$ ou $]a ; b[$ (b étant un réel supérieur à a).

► **Définition** : Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a^+ signifie que, pour des valeurs de x suffisamment proches de a (en restant supérieures à a), $f(x)$ est aussi grand que l'on veut.

On écrit alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

On définit de façon analogue les résultats suivants :

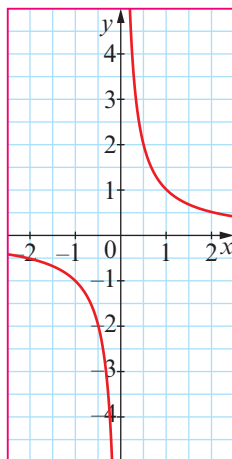
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty.$$

EXEMPLES : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

► Asymptote parallèle à l'axe (Oy)

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) quand x tend vers a^+ ou vers a^- , alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = a$.

EXEMPLE : La courbe représentative de la fonction inverse admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$.



III OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Dans ce paragraphe, a désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

1. Limite de la somme de deux suites, de deux fonctions

Le tableau donne, lorsque c'est possible, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$, respectivement $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n / \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$-\infty$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n / \lim_{x \rightarrow a} g(x)$			
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$l_2 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l_1 + l_2$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

👍 Il y a une forme indéterminée : $(+\infty) + (-\infty)$.

2. Limite du produit de deux suites, de deux fonctions

Le tableau donne, lorsque c'est possible, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$, respectivement $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n / \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$-\infty$	$l_1 < 0$	0	$l_1 > 0$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n / \lim_{x \rightarrow a} g(x)$					
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$l_2 < 0$	$+\infty$	$l_1 \times l_2$	0	$l_1 \times l_2$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$l_2 > 0$	$-\infty$	$l_1 \times l_2$	0	$l_1 \times l_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

👍 Formes indéterminées : $(\pm\infty) \times 0$.

3. Limite du quotient de deux suites, de deux fonctions

Ici, (v_n) désigne une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et g désigne une fonction ne s'annulant pas au voisinage de a . Le tableau donne,

lorsque c'est possible, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$, respectivement $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n / \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n / \lim_{x \rightarrow b} g(x)$	$-\infty$	$l_1 < 0$	0	$l_1 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	?	0	0	0	?
$l_2 < 0$	$+\infty$	$\frac{l_1}{l_2}$	0	$\frac{l_1}{l_2}$	$-\infty$
0^-	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
0^+	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$
$l_2 > 0$	$-\infty$	$\frac{l_1}{l_2}$	0	$\frac{l_1}{l_2}$	$+\infty$
$+\infty$	?	0	0	0	?

👍 Formes indéterminées : $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

4. Limite de fonction composée

Théorème :

a, b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{X \rightarrow b} v(X) = c \end{cases}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c.$$

IV LIMITES ET COMPARAISON

► Théorèmes de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout entier n assez grand :

$$u_n \leq v_n.$$

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2$, alors $l_1 \leq l_2$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

► Théorème des gendarmes

Soit $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites telles que :

- pour tout entier n assez grand, $v_n \leq u_n \leq w_n$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

👍 Le théorème de comparaison et le théorème des gendarmes sont aussi valables pour les fonctions quand la variable tend vers a (a étant soit un réel, soit $\pm\infty$), les inégalités restant vraies au voisinage de a .

V LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS USUELLES

► Limites de suites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \text{ et pour tout entier } p \geq 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases} \quad \text{et la suite } (q^n) \text{ n'a pas de limite si } q \leq -1.$$

► Limites des fonctions usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et, pour tout entier } n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

► Théorème des croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \text{ (où } n \text{ désigne un entier naturel)}$$

► **Théorème** : limite à l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle

- La limite d'un polynôme à l'infini est égale à la limite à l'infini de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) à l'infini est égale à la limite à l'infini du quotient **simplifié** de ses termes de plus hauts degrés.



Ce théorème s'applique aussi bien aux suites qu'aux fonctions (mais uniquement en $\pm\infty$). Voir la méthode 2.

MÉTHODE 1

Déterminer la limite en a d'une fonction composée

→ Voir les exos 4, 7, 8, 9 et 11.

Étape 1. Décomposer la fonction f sous la forme

$x \mapsto u(x) = X \mapsto v(X) = v(u(x)) = f(x)$, u et v étant des fonctions dont on est capable de déterminer les limites.

Étape 2. Déterminer la limite en a de $u(x)$, notée b , puis la limite en b de $v(x)$.

Exo résolu

Déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction :

$$f : x \mapsto (1-x)e^{1-x}.$$

CORRIGÉ

Étape 1. Pour tout x réel, $f(x) = Xe^X$, avec $X = 1 - x$.

Étape 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$.

Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{1-x} = 0$.

MÉTHODE 2

Déterminer la limite à l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle f

→ Voir les exos 3, 11, 16 et 18.

Étape 1. Identifier les termes de plus haut degré.

- Si f est un polynôme, sa limite en $\pm\infty$ est égale à celle de son terme de plus haut degré ax^n .

- Si f est une fraction rationnelle, sa limite en $\pm\infty$ est égale à celle du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur soit $\frac{ax^n}{bx^m}$.

Étape 2.

- Si f est un polynôme, déterminer, alors la limite en $\pm\infty$ de ax^n .

- Si f est une fraction, simplifier le quotient puis déterminer sa limite en $\pm\infty$.

Exo résolu

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 - 5x + 7$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{3x^2 - x - 1}$

CORRIGÉ

a. Étape 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 - 5x + 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2)$

Étape 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -\infty$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 - 5x + 7 = -\infty$.

a. Étape 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{3x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2}$

Étape 2. pour tout $x \neq 0$, $\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{3x^2 - x - 1} = \frac{1}{3}$.

MÉTHODE 3**Lever une indétermination**

→ Voir les exos 4, 8, 11 et 15.

Étape 1. Reconnaître s'il s'agit de la limite d'une somme, d'un quotient ou d'un produit, et observer que l'on aboutit à une forme indéterminée.

Étape 2. S'il s'agit de la limite d'une somme, factoriser par le terme qui tend le plus vite vers l'infini.

S'il s'agit d'un quotient, faire de même avec le numérateur et avec le dénominateur, puis simplifier la fraction ainsi obtenue.

S'il s'agit d'un produit, développer pour obtenir une somme.

Exo résolu

Déterminer les limites suivantes :

a. Limite en 0 de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} \times \left(\frac{1}{x} - 1\right)$.

b. Limite en $+\infty$ en $f : x \mapsto \frac{3x - 1}{\sqrt{x} + 2}$.

CORRIGÉ

a. Étape 1. $\sqrt{x} \times \left(\frac{1}{x} - 1\right)$ est un produit.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty$. C'est une forme indéterminée.

Étape 2. Développons $f(x)$: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \end{cases}, \text{ donc, par différence, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

b. Étape 1. $\frac{3x-1}{\sqrt{x}+2}$ est un quotient.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + 2 = +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée.

Étape 2. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{x \times \left(3 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \sqrt{x} \times \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}}$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \end{cases} \text{ donc, par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}} = 3.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

MÉTHODE 4

Établir la limite infinie d'une suite à l'aide de la définition

→ Voir les exos 10 et 17.

Pour démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$) à l'aide de la définition, on doit montrer que tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ (ou $] -\infty; M[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 .

Étape 1.

- Si la limite à établir vaut $+\infty$, résoudre l'inéquation $u_n > M$ avec $M > 0$.
- Si la limite à établir vaut $-\infty$, résoudre l'inéquation $u_n < M$ avec $M < 0$.

Étape 2.

Si la limite à établir vaut $+\infty$, définir un entier n_0 tel que l'intervalle $]M; +\infty[$ contienne tous les termes de la suite à partir du rang n_0 , c'est-à-dire tel que : pour tout $n \geq n_0$, $u_n > M$.

On peut alors conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- Si la limite à établir vaut $-\infty$, définir un entier n_0 tel que l'intervalle $] -\infty; M[$ contienne tous les termes de la suite à partir du rang n_0 , c'est-à-dire tel que : pour tout $n \geq n_0$, $u_n < M$.

On peut alors conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exo résolu

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sqrt{n}$ a pour limite $+\infty$.

CORRIGÉ

Étape 1. Soit M un réel positif.

$$u_n > M \Leftrightarrow \sqrt{n} > M$$

$$\Leftrightarrow n > M^2 \text{ (car la fonction carré est strictement croissante sur }]0; +\infty[\text{)}$$

Étape 2. En choisissant pour n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à M^2 , on a bien : Pour tout $n \geq n_0$, $u_n > M$.

Donc la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$).

MÉTHODE 5**Établir la limite finie d'une suite à l'aide de la définition**

→ Voir les exos 10 et 12.

Pour démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ à l'aide de la définition, il s'agit de montrer que tout intervalle ouvert et centré en l (c'est-à-dire de la forme $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 .

Étape 1. On considère un réel $\varepsilon > 0$ (on peut imposer ε aussi proche de 0 que l'on veut).

Résoudre les inéquations : $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$.

Étape 2. Définir alors un entier n_0 tel que l'intervalle $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ contienne tous les termes de la suite à partir du rang n_0 , c'est-à-dire tel que :

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon.$$

On peut alors conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Exo résolu

À l'aide de la définition de la limite, montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \frac{3n}{n-1}$ a pour limite 3 quand n tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ

Étape 1. Soit ε un réel strictement positif.

$$3 - \varepsilon < u_n < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - 3 < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{3n}{n-1} - 3 < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{3n}{n-1} - 3 \frac{n-1}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{3}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{n-1} < \varepsilon \text{ car l'on a toujours : } -\varepsilon < 0 < \frac{3}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \text{ par décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} + 1.$$

Ainsi, on a montré : $3 - \varepsilon < u_n < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} + 1$.

Étape 2. En choisissant pour n_0 le plus petit entier supérieur à $\frac{3}{\varepsilon} + 1$, on a bien :

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad 3 - \varepsilon < u_n < 3 + \varepsilon.$$

La suite (u_n) converge donc vers 3.