

Mathématiques pour l'informatique

Pour le BTS SIO

3^e édition

Xavier CHANET

Professeur agrégé de mathématiques

Patrick VERT

Ancien professeur agrégé de mathématiques

DUNOD

Direction et conception graphique de la couverture :
Nicolas Wiel – Pierre André Gualino (graphiste)
Mise en page : Nord Compo

© Dunod, 2021, 2024 pour la nouvelle présentation

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-087353-1

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VI
PARTIE I	
MATHÉMATIQUES	
Chapitre 1 ■ Arithmétique	3
1.1 Numération et conversion	3
1.2 Divisibilité des entiers	8
1.3 Nombres premiers	8
1.4 Congruences	11
TD – Le codage affine	13
Exercices corrigés	16
Chapitre 2 ■ Calcul matriciel	41
2.1 Généralités	41
2.2 Calcul matriciel élémentaire	42
2.3 Inverse d'une matrice carrée	48
2.4 Résolution de systèmes à l'aide de matrices	49
Exercices corrigés	50
Chapitre 3 ■ Logique	69
3.1 Calcul des propositions	69
3.2 Calcul des prédicats	74
3.3 Calcul booléen	77
TD – Expression booléenne	82
Exercices corrigés	85
Chapitre 4 ■ Ensembles	105
4.1 Langage ensembliste	105
4.2 Relations binaires	108
4.3 Applications d'un ensemble dans un ensemble	110

TD – Relation binaire dans un ensemble	113
Exercices corrigés	116
Chapitre 5 ■ Graphes et ordonnancement	133
5.1 Représentations d'un graphe	133
5.2 Chemins d'un graphe	136
5.3 Niveau des sommets d'un graphe sans circuit	141
5.4 Méthode MPM d'ordonnancement d'un graphe	144
TD – Déplacements dans un jeu vidéo	149
Exercices corrigés	152
Chapitre 6 ■ L'examen de mathématiques	169
Sujet n° 1	169
Sujet n° 2	172

PARTIE II

ALGORITHMIQUE APPLIQUÉE

Chapitre 7 ■ Premiers pas	177
7.1 Qu'est-ce qu'un algorithme ?	177
7.2 Le logiciel Python	178
Chapitre 8 ■ Concepts fondamentaux	179
8.1 Données : types et opérations	179
8.2 Stockage des données	184
8.3 Lecture et écriture des données	186
8.4 Instructions conditionnelles	188
8.5 Instructions itératives	189
8.6 Fonctions et procédures	192
8.7 Compléments : Récursivité	196
Exercices corrigés	198
Chapitre 9 ■ Travaux pratiques guidés	215
9.1 Numéro d'un(e) salarié(e) dans une entreprise	215
9.2 Codage hexadécimal d'un texte	217
9.3 Génération d'un mot de passe	219
Chapitre 10 ■ Travaux pratiques	223
10.1 Nombres parfaits	223
10.2 Évolution d'un salaire	226
10.3 Nombres premiers palindromes	229
10.4 Calcul formel	232

10.5 Calcul matriciel	234
10.6 Opérations sur les ensembles	238
10.7 Méthodes de tri	241
10.8 Cryptographie : chiffre de César	244
10.9 Cryptographie : chiffre des scouts sud-africains	247
Chapitre 11 ■ L'examen d'algorithmique	251
Examen 1 – Remplissage d'une tirelire	252
Examen 2 – La suite de Syracuse	256
Examen 3 – Calcul formel sur des entiers	260
PARTIE III	
ANNEXE	
Exercices supplémentaires	267
Index	297

Ressources numériques

Le **code source** des exemples est disponible gratuitement en téléchargement à l'adresse suivante : <https://dunod.com/EAN/9782100862733>

AVANT-PROPOS

Ce livre s'adresse en premier lieu aux étudiants de première et de deuxième année préparant le BTS SIO (Services informatiques aux organisations). Il pourra également intéresser les étudiants en IUT d'informatique, ou ceux en classe préparatoire souhaitant acquérir les bases de l'algorithmique, ainsi que tous ceux qui souhaitent connaître et maîtriser les outils mathématiques nécessaires à une bonne pratique de la programmation informatique.

Les auteurs, tous deux ayant une solide expérience d'enseignement en BTS SIO, ont rédigé cet ouvrage dans le respect le plus strict des derniers programmes en vigueur. L'objectif pédagogique majeur est de fournir un outil d'accompagnement dans les apprentissages, pouvant être utilisé en classe par le professeur ou de manière plus personnelle par l'étudiant.

Dans la partie *Mathématiques*, on trouvera, dans chaque chapitre, le cours, présentant les notions essentielles du programme, des exercices, nombreux et variés, corrigés ou non, allant des applications directes du cours à des problèmes plus complexes pour se perfectionner, et des travaux dirigés corrigés. Deux sujets corrigés d'examen ponctuent cette partie.

Dans la partie *Algorithmique appliquée*, où les instructions et algorithmes sont exécutés en langage Python, on commence par présenter expérimentalement, avec les activités dites « de découverte », les fondamentaux de l'algorithmique. L'étudiant peut ensuite vérifier qu'il maîtrise les concepts clés en résolvant les nombreux exercices, corrigés ou non. Une série de travaux pratiques, tous corrigés, montrent comment résoudre des problèmes par l'utilisation judicieuse de solutions algorithmiques. On trouve enfin trois exemples de sujets officiels d'examen d'algorithmique appliquée, corrigés.

Partie 1

Mathématiques

ARITHMÉTIQUE

1

PLAN

- 1.1 Numération et conversion
- 1.2 Divisibilité des entiers
- 1.3 Nombres premiers
- 1.4 Congruences

OBJECTIFS

- Présenter les grandes notions arithmétiques utiles à l'informatique.
- Maîtriser les principes de numération indispensables aux langages de bas niveau.
- Maîtriser les outils d'arithmétique modulaire utiles à l'algorithmique.

1.1 NUMÉRATION ET CONVERSION

1.1.1 Rappels sur la division euclidienne

Les **entiers naturels** sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc.

Effectuer la **division euclidienne** d'un entier naturel A par un entier naturel B non nul c'est déterminer les uniques entiers Q (appelé **quotient**) et R (appelé **reste**) tels que : $A = BQ + R$ et $0 \leq R < B$.

Exemples

Le quotient et le reste de la division euclidienne de $A = 53$ par $B = 6$ sont respectivement $Q = 8$ et $R = 5$. En effet, $53 = 6 \times 8 + 5$ et $0 \leq 5 < 6$.

Dans la division euclidienne de 1 893 par 11, le quotient vaut 172 et le reste vaut 1.

On peut obtenir ces résultats en posant la division ou avec une calculatrice.

1.1.2 Numération des entiers

L'être humain compte naturellement **en base 10** (avec les dix chiffres) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... , 97, 98, 99, 100, 101, 102, etc.

On peut compter **en base 2** (on n'utilise que les chiffres 0 et 1) : 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, etc.

Pour compter **en base 16**, on utilise les dix chiffres et on en rajoute six autres (que l'on note *A, B, C, D, E* et *F*). Cela donne : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A, B, C, D, E, F*, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, *1A, 1B, 1C, 1D, 1E, 1F*, 20, 21, 22, etc.

Exemples

4 en base 10, c'est 100 en base 2.

9 en base 10, c'est 1001 en base 2.

A en base 16, c'est 10 en base 10.

1A en base 16, c'est 26 en base 10.



Le microprocesseur d'un ordinateur ne travaille qu'avec deux chiffres : 0 (pas de courant) et 1 (courant). Les calculs s'y font donc naturellement en base 2.

Le nombre 23, écrit en base 10, se note 10111 en base 2 et 17 en base 16, mais on ne peut pas écrire $23 = 10111 = 17$.

C'est pourquoi nous adoptons la **notation** $(n)_p$ pour indiquer que le nombre n est écrit en base p : $(23)_{10} = (10111)_2 = (17)_{16}$.

Les écritures en bases 2, 10 et 16 s'appellent aussi respectivement les écritures **binaire, décimale et hexadécimale**.

Lorsqu'un nombre est écrit en base 10, on peut simplifier la notation $(x)_{10}$. Par exemple $(201)_{10}$ peut s'écrire simplement 201.



L'écriture d'un nombre entier en base 2, 10 ou 16 est unique.

Pour convertir un entier d'une base à l'autre, il est important de comprendre la relation algébrique que l'on a entre une base p et l'écriture du nombre dans cette base p . C'est ce qu'énonce la propriété suivante.

Propriété 1.1

Quels que soient les nombres entiers $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ compris entre 0 et $p - 1$, où p désigne 2, 10 ou 16, on a :

$$(a_n \dots a_2 a_1 a_0)_p = a_n \times p^n + \dots + a_2 \times p^2 + a_1 \times p + a_0$$

Dans le cas où $p = 16$, on remplace dans l'écriture du membre de gauche, tout a_i égal à 10, 11, 12, 13, 14 ou 15 par *A, B, C, D, E* ou *F* respectivement.

Exemple

Conversion vers la base 10 :

$$(11011)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$$

$$(5C8)_{16} = 5 \times 16^2 + 12 \times 16 + 8 = 1\,280 + 192 + 8 = 1\,480$$

Il existe plusieurs méthodes pour convertir un entier vers la base $p = 2$ ou 16. Nous allons déterminer l'écriture en base 2 du nombre 75 et l'écriture en base 16 du nombre 2 014 (méthodes 1 et 2), puis effectuer des conversions directes entre les bases 2 et 16 (méthode 3).

Méthode 1 : on effectue la division euclidienne du nombre par la plus grande puissance de p qui lui est inférieure ou égale, puis on recommence avec le reste et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il soit nul.

$$75 = 1 \times 2^6 + 11, 11 = 1 \times 2^3 + 3 \text{ et } 3 = 1 \times 2 + 1$$

$$\text{Donc } 75 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1$$

$$= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

$$= (1001011)_2$$

$$\text{De même } 2\,014 = 7 \times 16^2 + 222 \text{ et } 222 = 13 \times 16 + 14$$

$$\text{d'où } 2\,014 = 7 \times 16^2 + 13 \times 16 + 14 = (7DE)_{16}.$$

Méthode 2 : on effectue la division euclidienne du nombre par p puis on recommence avec le quotient et ainsi de suite jusqu'à obtenir 0. À la fin, on inverse l'ordre des restes obtenus.

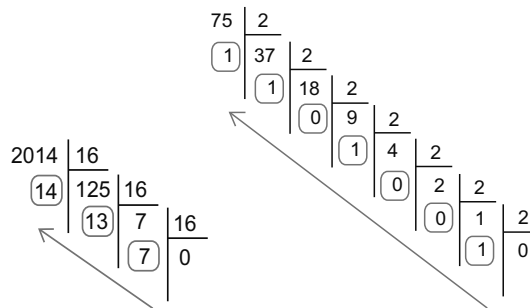


Figure 1.1

Ainsi, on retrouve $2\,014 = (7DE)_{16}$ et $75 = (1001011)_2$.

Méthode 3 : on peut passer directement de la base 2 à la base 16, et inversement, en utilisant le tableau de conversion suivant :

Base 16	0	1	2	3	4	5	6	7
Base 2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Base 16	8	9	A	B	C	D	E	F
Base 2	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Conversion directe de $(2B)_{16}$ en base 2 :

$$(2B)_{16} = (00101011)_2 = (101011)_2$$

On ajoute, à partir du tableau, les écritures de 2 et de B en base 2, puis on supprime les zéros inutiles.

Conversion directe de $(110111)_2$ en base 16 :

$$(110111)_2 = (00110111)_2 = (37)_{16}$$

On ajoute à gauche des zéros inutiles pour « faire des paquets » de quatre chiffres que l'on remplace ensuite par leurs équivalents en base 16.



Puisque l'écriture en base 2 d'un nombre peut être très « longue » et du fait de la simplicité de conversion entre les bases 2 et 16, on utilise beaucoup le **système hexadécimal** en informatique.



Les calculatrices permettent de convertir un nombre d'une base à l'autre.

1.1.3 Numération des réels

Dans le dernier paragraphe, nous avons défini les écritures binaire, décimale et hexadécimale d'un nombre entier. Plus largement, tout nombre réel peut être écrit en base 2, 10 ou 16.

Pour comprendre, prenons l'exemple de deux réels et de la base 10 :

$$(53,627)_{10} = 5 \times 10 + 3 + 6/10 + 2/10^2 + 7/10^3$$

$$(456,905)_{10} = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6 + 9/10 + 0/10^2 + 5/10^3$$

Plus généralement on a la propriété suivante.

Propriété 1.2

Quels que soient les nombres entiers $a_0, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_m$ compris entre 0 et $p - 1$ (où p désigne 2, 10 ou 16), on a :

$$(a_n \dots a_0, b_1 \dots b_m)_p = a_n \times p^n + \dots + a_2 \times p^2 + a_1 \times p + a_0 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \dots + \frac{b_m}{p^m}$$

Dans le cas où $p = 16$, on remplace dans l'écriture du membre de gauche, tout a_i ou b_i égal à 10, 11, 12, 13, 14 ou 15 par A, B, C, D, E ou F respectivement.

Exemple

$$7,25 \text{ en base 2 : } 7,25 = 7 + 0,25 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 + 1/2^2 = (111,01)_2$$

$$(101,11)_2 \text{ en base 10 : } (101,11)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 + 1/2 + 1/2^2 = 5,75$$

$$(B,3C)_{16} \text{ en base 10 : } (B,3C)_{16} = 11 + 3/16 + 12/16^2 = 11,234375$$

1.1.4 Opérations élémentaires

En base 2 ou 16, on pose les opérations de la même manière qu'en base 10.

- L'**addition** : exemple $(101)_2 + (1110)_2 = (10011)_2$ (en base 10, cela donne $5 + 14 = 19$).

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 1 \\
 + \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 (1)_2 + (0)_2 = (1)_2 \\
 (0)_2 + (1)_2 = (1)_2 \\
 (1)_2 + (1)_2 = (10)_2 : \text{on pose 0, on retient 1.} \\
 (1)_2 + (1)_2 = (10)_2 : \text{on pose 0, on retient 1.}
 \end{array}
 \right.$$

- La **soustraction** : exemple $(10110)_2 - (111)_2 = (1111)_2$ (en base 10 cela donne $22 - 7 = 15$).

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 - \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \text{Puisque } 1 > 0, \text{ on pose une retenue de 1,} \\
 \text{puis } (10)_2 - (1)_2 = (1)_2. \\
 \text{Nouvelle retenue de 1 puis } (11)_2 - ((1)_2 + (1)_2) = (1)_2, \text{ etc.}
 \end{array}
 \right.$$

- La **multiplication** : exemple $(F3)_{16} \times (2A)_{16} = (27DE)_{16}$ (en base 10 cela donne $42 \times 243 = 10\,206$).

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad F \quad 3 \\
 \times \quad 2 \quad A \\
 \hline
 9 \quad 7 \quad E \\
 + 1 \quad E \quad 6 \quad . \\
 \hline
 2 \quad 7 \quad D \quad E
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 (A)_{16} \times (3)_{16} = 10 \times 3 = 30 = (1E)_{16}, \text{ on pose E, on retient 1.} \\
 (A)_{16} \times (F)_{16} = 10 \times 15 = 150 = (96)_{16}, \text{ avec la retenue, on obtient,} \\
 (96)_{16} + (1)_{16} = (97)_{16}, \text{ d'où } 97E. \\
 (2)_{16} \times (3)_{16} = (6)_{16}, \text{ on pose 6.} \\
 (2)_{16} \times (F)_{16} = 2 \times 15 = 30 = (1E)_{16}, \text{ on obtient } 1E6 \text{ avec le décalage} \\
 \text{« . »}. \\
 \text{On effectue ensuite l'addition } (97E)_{16} + (1E60)_{16} : (E)_{16} + (0)_{16} = (E)_{16}, \\
 \text{on pose E ; } (7)_{16} + (6)_{16} = 13 = (D)_{16}, \text{ on pose D ; } (9)_{16} + (E)_{16} \\
 = 9 + 14 = 23 = (17)_{16}, \text{ on pose 7 et on retient 1 ; enfin, } (1)_{16} + (1)_{16} \\
 = (2)_{16}, \text{ on obtient alors le résultat } 27DE.
 \end{array}
 \right.$$

- La **division** : exemple $(110)_2 \div (11)_2 = (10)_2$ (en base 10 cela donne $6 \div 3 = 2$).

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 1 \quad 0 \\
 - 1 \quad 1 \\
 \hline
 0 \quad 0 \\
 - 0 \quad 0 \\
 \hline
 0 \quad 0
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 1 \quad 1 \\
 1 \quad 0
 \end{array}
 \right.
 \left|
 \begin{array}{l}
 \text{On sélectionne les deux premiers chiffres de } 110. \text{ Dans } (11)_2 \text{ on a une fois } (11)_2 \text{ et il reste } 0. \text{ On pose alors 1 au} \\
 \text{quotient. On abaisse ensuite le 0 de } 110. \text{ On obtient } 00. \\
 \text{Dans } (00)_2 \text{ on a zéro fois } (11)_2 \text{ et il reste } 0. \text{ On pose 0 au} \\
 \text{quotient, ce qui termine la division.}
 \end{array}
 \right.$$

1.1.5 Précision et arrondi

Considérons le nombre $N = 432,615$:

- L'arrondi à **10** près de N est 430 (car ce nombre est plus proche de N que 440).
- L'arrondi à **1** près de N est 433 (car ce nombre est plus proche de N que 432).
- L'arrondi à **0,1** près de N est 432,6 (car ce nombre est plus proche de N que 432,7).
- L'arrondi à **0,01** près de N est 432,62 (ce nombre est aussi plus proche de N que 432,61 et dans un tel cas on prend le plus grand).

Cette **notion d'arrondi** se généralise aux nombres réels écrits dans n'importe quelle base p : l'arrondi d'un nombre réel x à une certaine précision est le nombre le plus proche de x tel que tous les chiffres allant au-delà de cette précision soient nuls. Par convention, lorsqu'il existe deux nombres possibles, l'arrondi est alors le plus grand.

Considérons les nombres $N = (101,10011)_2$ et $M = (B82A,7AB)_{16}$:

- L'arrondi à $(10)_2$ près de N est $(110)_2$ car ce nombre est plus proche de N que $(100)_2$.
- L'arrondi à $(0,1)_2$ près de N est $(101,1)_2$ car ce nombre est plus proche de N que $(110,0)_2$.
- L'arrondi à $(100)_{16}$ près de M est $(B800)_{16}$ car ce nombre est plus proche de M que $(B900)_{16}$.
- L'arrondi à $(0,1)_{16}$ près de M est $(B82A,8)_{16}$ car ce nombre est plus proche de M que $(B82A,7)_{16}$.

1.2 DIVISIBILITÉ DES ENTIERS

Soient a et b des entiers naturels. a est **divisible** par b s'il existe un entier naturel k tel que : $a = bk$.

On dit alors que b divise a , que b est un **diviseur** de a et que a est un **multiple** de b .

Exemple

$65 = 13 \times 5$ donc on peut dire que 65 est divisible par 13 (et par 5 aussi), que 13 et 5 sont des diviseurs de 65 et que 65 est un multiple de 13 (et de 5 aussi).

Propriété 1.3

- Si a est divisible par b alors tout multiple de a est divisible par b .
- Si a est divisible par b et si b est divisible par c , alors a est divisible par c .
- Si a et b sont divisibles par c , alors $a+b$ et $a-b$ sont divisibles par c .

Les démonstrations de ces propriétés seront proposées dans l'exercice corrigé 1.20.

1.3 NOMBRES PREMIERS

1.3.1 Reconnaissance des nombres premiers

Un **entier naturel** est premier s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1.
- 2 est **premier** car il a exactement deux diviseurs : 1 et 2.
- 3 est **premier** car il a exactement deux diviseurs : 1 et 3.

Théorème 1.1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si n n'est pas premier, alors n possède au moins un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Ce théorème permet d'avoir un critère de reconnaissance des nombres premiers : pour savoir si un nombre n est premier, on calcule $\sqrt{n}$. Si n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est premier.



Mémoisez les nombres premiers inférieurs à 20, ils vous seront utiles par la suite : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Exemple

Cherchons si 347 et 713 sont des nombres premiers :

$\sqrt{347} \approx 18,6$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 18,6 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17. 347 n'est divisible par aucun d'eux donc **347 est premier**.

$\sqrt{713} \approx 26,7$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 26,7 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23. 713 est divisible par 23 donc **713 n'est pas premier**.

1.3.2 Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Un nombre qui n'est pas premier peut être divisible par un nombre premier, et même s'écrire uniquement avec des nombres premiers, sous forme de produit.

Théorème 1.2

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique en un produit de facteurs premiers.

Exemple

84 n'est pas premier, il se décompose en un produit de facteurs premiers, cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près :

$$84 = 2 \times 42 = 2 \times 6 \times 7 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$$

975 n'est pas premier, il se décompose en un produit de facteurs premiers :

$$975 = 5 \times 195 = 5 \times 5 \times 39 = 5 \times 5 \times 3 \times 13 = 3 \times 5^2 \times 13$$