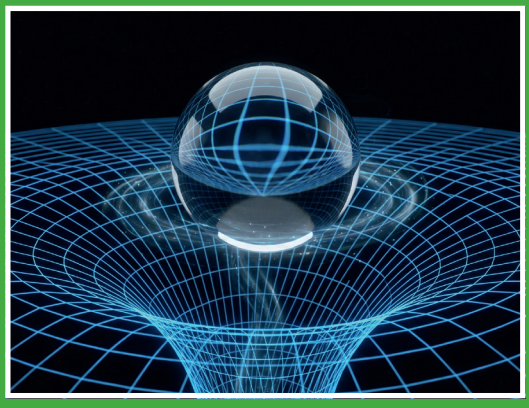
SAVOIRS PHYSIQUE ACTUELS

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

POUR LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE



STÉPHANE COLLION

CNRS EDITIONS

cnrs

edp sciences

Stéphane Collion

Éléments de géométrie riemannienne pour la relativité générale

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS Éditions

Dans la même collection

Supraconductivité – Tomes 1 et 2
Philippe Manguin et Rémi Kahn

Information quantique – Théorie et expérience
Michel Le Bellac et Isabelle Zaquine

Rhéophysique – Tomes 1 et 2
Patrick Oswald

Condensats de Bose-Einstein – Tomes 1 et 2
Yvan Castin

Analyse complexe et méthodes numériques
Jean Zinn-Justin

Symétries continues, 2e édition, révisée et augmentée
Franck Laloë

La diffraction des rayons X par les cristaux liquides – Tomes 1 et 2
Anne-Marie Levelut, Patrick Davidson et Alan Braslau

Groupes de symétrie en physique – Brisure spontanée et transitions de phase
Jean Zinn-Justin

Théorie statistique des champs – Tomes 1 et 2
François David

Physique quantique, information et calcul – Des concepts aux applications
Pascal Degiovanni, Natacha Portier, Clément Cabart, Alexandre Feller et Benjamin Roussel

Mécanique quantique – Tomes I, II et III
Claude Cohen–Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur
http://laboutique.edpsciences.fr

Mise en page : Merlin Héré--Cuzon

Illustration de couverture : Visualisation de la courbure de l'espace-temps à l'aide d'une sphère de verre sur une grille de gravité en néon bleu représentant la relativité générale, image générée à l'aide de l'IA.

Imprimé en France

© **2026, EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A
et
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.
Ce livre ne peut être reproduit ni utilisé à des fins d'entraînement de systèmes d'intelligence artificielle. La fouille de textes et de données est interdite conformément à l'article 4(3) de la Directive (UE) 2019/790.

ISBN EDP Sciences 978-2-7598-4031-1 (papier) – 978-2-7598-4032-8 (ebook)
ISBN CNRS Éditions 978-2-271-16176-5 (papier) – 978-2-271-16177-2 (ebook)

À Alice, Maïa, Lili et Isia,
encore, et toujours

Table des matières

1 Introduction **1**

I Fondamentaux géométriques **11**

2 De l'espace affine aux espaces courbes : les variétés différentielles **13**
2.1 Motivation historique 13
2.2 Motivation mathématique 14
2.3 Variétés topologiques 16
2.4 Cartes et expressions en coordonnées 18
2.4.1 Fonctions coordonnées 18
2.4.2 Expression en coordonnées d'une fonction 18
2.5 Une variété topologique ne suffit pas pour faire du calcul différentiel... 19
2.6 Variétés différentielles 19
2.7 Applications différentiables entre variétés 21
2.7.1 Les isomorphismes de variétés, les difféomorphismes 22
2.8 Un exemple pour voir à quoi ça ressemble : la sphère . . 22
2.9 Du local au global : fonctions bosses et partitions de l'unité 23
2.9.1 Fonctions bosses 23
2.9.2 Partition de l'unité 25
2.10 Courbes sur une variété 26
2.11 Sous-variétés 26
2.12 Variétés produit 27
2.13 Variétés à bord 27
2.14 Expressions en coordonnées versus notions intrinsèques 28

3 Les vecteurs tangents **31**
3.1 Transposer le calcul différentiel de $\mathbb{R}^n$ aux variétés . . . 31
3.1.1 Vecteurs et structure affine de $\mathbb{R}^n$ 32
3.1.2 Vecteurs tangents à une sous-variété, le point de vue du géomètre 32
3.1.3 Vecteurs et différentielle directionnelle, le point de vue de l'analyste 33
3.2 Les vecteurs tangents à une variété 33
3.2.1 Les définitions du géomètre 34

3.2.2 La définition de l'analyste 36
3.2.3 Équivalence des deux définitions 37
3.2.4 Synthèse 38
3.3 Base de l'espace tangent, expression en coordonnées . . 39
3.4 Les espaces tangents sont indépendants les uns des autres ! 40
3.5 L'application tangente, la différentielle d'une fonction entre variétés 41
3.5.1 Expression de la différentielle en coordonnées, jacobien 42
3.5.2 Différentielle d'une fonction composée, et autres propriétés 43
3.6 Changement de coordonnées 44
3.7 Vitesse d'une courbe 44
3.8 Les champs de vecteurs 45
3.8.1 Champ de vecteurs le long d'une application . . 46
3.8.2 Champ de base 46
3.9 Crochet de deux champs de vecteurs 46
3.10 Le flot d'un champ de vecteurs 47
3.11 1-forme différentielle, co-vecteur 49
3.11.1 Formes linéaires en un point d'une variété différentielle 49
3.11.2 Expression en coordonnées 50
3.11.3 Changement de coordonnées 50
3.11.4 1-formes sur une variété 51
3.11.5 Transport par une application entre variétés . . 51
3.12 Peut-on transporter un champ de vecteurs par une application ? 52
3.13 Plongements, sous-variétés et espace tangent 52
3.14 Variétés produit et espace tangent 53
3.15 Notion d'orientation d'une variété 53
3.16 Variétés fibrées 54

4 Les tenseurs **55**
4.1 Tenseurs sur un espace vectoriel 55
4.2 Tenseurs en un point p d'une variété $\mathscr{M}$ 56
4.2.1 Expression en coordonnées 56
4.2.2 Changement de coordonnées 57
4.3 Champs de tenseurs sur une variété 58
4.4 Interprétation 60
4.5 Abus et précisions de langage... 61
4.6 Définitions variées des tenseurs, récapitulatif 62
4.7 Opérations sur les tenseurs 63
4.7.1 Produit tensoriel 63
4.7.2 Contraction 63
4.8 Transport des tenseurs par les applications entre variétés 64
4.9 Expressions en coordonnées, champs lisses ; récapitulatif 65
4.10 Produit tensoriel abstrait d'espaces vectoriels 66

5 Les formes différentielles et la formule de Stokes, bref aperçu **69**
5.1 Définition . . . 70
5.2 Structure algébrique . . . 70
5.3 Une dérivation naturelle . . . 71
5.4 Les seuls objets que l'on peut intégrer sur une variété . . 71
5.5 La formule la plus importante des mathématiques : la formule de Stokes . . . 72
5.6 Les groupes de De Rham, invariants topologiques fondamentaux . . . 73

6 La métrique d'une variété **75**
6.1 La métrique d'une variété . . . 76
6.2 Expression en coordonnées . . . 76
6.3 Signature et bases orthonormales . . . 77
6.4 Formes bilinéaires symétriques et produits scalaires, quelques rappels . . . 78
6.4.1 Formes bilinéaires symétriques . . . 78
6.4.2 Produits scalaires et orthogonalité . . . 79
6.5 Dualité métrique : un peu de musique... . . . 81
6.5.1 Trace riemannienne . . . 83
6.6 Les isomorphismes de variétés semi-riemannienne : les isométries . . . 83
6.7 Pseudo-longueur d'une courbe . . . 84
6.8 Existence des métriques . . . 84
6.9 Un exemple : la métrique de Schwarzschild . . . 85
6.9.1 Un peu d'histoire . . . 89

7 Dériver les champs de vecteurs ; la connexion **91**
7.1 Énoncé du problème . . . 91
7.2 Dérivée de Lie des champs de vecteurs le long des lignes de flot . . . 93
7.2.1 Rappel sur le flot d'un champ de vecteurs . . . 93
7.2.2 Dérivée de Lie . . . 94
7.2.3 Dérivée de Lie et crochet de Lie . . . 95
7.2.4 Champs de vecteurs commutatifs et crochet de Lie 95
7.3 Différentiation externe des formes différentielles . . . 95
7.4 Différentiation sur une variété semi-riemannienne . . . 95
7.4.1 Inconvénient de la dérivée de Lie . . . 95
7.4.2 Connexion d'espaces tangents, transport parallèle 96
7.5 Définition moderne d'une connexion . . . 98
7.6 Dérivation induite des champs de vecteurs le long d'une courbe . . . 100
7.7 Transport parallèle, relier les espaces tangents . . . 102
7.8 Expression en coordonnées, symboles de Christoffel . . . 104
7.9 Dérivation des tenseurs . . . 105
7.9.1 Définition et existence . . . 105
7.9.2 Dérivation des tenseurs associés à une connexion 106

7.9.3 Dérivée covariante totale d'un champ de tenseurs, généralisation de la différentielle 106
7.9.4 L'identité de Leibniz, moyen de calculer et de définir la dérivée d'un tenseur 107
7.9.5 Expression en coordonnées 108
7.10 Quelques opérateurs différentiels 108
7.10.1 Le gradient 109
7.10.2 La divergence 109
7.10.3 Le laplacien 111
7.11 Dérivation des tenseurs, compléments 111
7.11.1 Dérivation des tenseurs associée à la dérivée de Lie 111
7.11.2 Dérivées secondes covariantes 112
7.11.3 Le hessien covariant 113
7.11.4 Comparaison des différentes différentiations . . 113
7.12 Exemples fondamentaux de connexions 113
7.13 Connexions dans les variétés fibrées 114

8 Les géodésiques 115
8.1 Généralités sur les courbes 115
8.1.1 Caractère causal des courbes 115
8.1.2 Longueur des courbes 116
8.2 Géodésiques 117
8.2.1 L'équation des géodésiques 118
8.2.2 Premières propriétés 118
8.3 L'application exponentielle 120
8.4 Voisinage normal, coordonnées normales 121

9 Résumé, exemples et illustrations avec $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^n$ 125
9.1 Variété, cartes 125
9.2 Fonctions différentiables 126
9.3 Courbes 127
9.4 Vecteurs tangents, dérivations, dérivation associée à une courbe 127
9.5 Vecteurs vitesse des courbes 128
9.6 Champs de vecteurs 128
9.7 Tenseurs 128
9.8 Métrique sur une variété 129
9.9 Connexion sur une variété 130
9.10 Dérivation induite des champs de vecteurs le long d'une courbe 131
9.11 Transport parallèle 132
9.12 Géodésiques 133
9.13 Dérivation des tenseurs 134
9.14 Extension de la définition de tenseurs 135

II Premiers pas 137

10 Éléments de géométrie lorentzienne, espace-temps 139

10.1 Genre causal en géométrie lorentzienne 139
10.2 Cônes temporels 142
10.3 Caractère causal des courbes 143
10.4 Caractère causal des sous-variétés 144
10.5 Orientation en temps 144
10.6 Espace-temps 146

11 Relativité générale, premiers pas 147
11.1 Tout commença avec la relativité restreinte 147
11.2 Puis vint la relativité générale : principe d'équivalence et covariance 148
11.3 Les postulats géométriques de la relativité générale . . . 149
11.4 Point de vue du mathématicien 149
11.4.1 Espace-temps 149
11.4.2 Particules 151
11.4.3 Définition géométrique du temps : le temps propre 152
11.5 Point de vue du physicien 153
11.5.1 Lignes d'univers, principe d'équivalence 153
11.5.2 Particules massives 155
11.5.3 Particules sans masse (photons) 155
11.5.4 Grandeurs mesurées par un observateur 156
11.6 Et la suite ? 158

12 Interlude : dictionnaire de traduction mathématique-physique 159
12.1 Calcul intrinsèque ou en coordonnées ? 159
12.2 Dictionnaire mathématiques-physique 161

III Courbure et géodésiques 167

13 Familles de courbes, champ de vecteurs variation 169
13.1 Familles de courbes à 2 paramètres 169
13.2 Champs de vecteurs le long d'une famille de courbes à 2 paramètres 170
13.3 Champ de vecteurs variation 171
13.4 Lemme de symétrie des dérivées 171
13.5 Variations de courbes et application exponentielle 172
13.6 Remarque : courbes et variations lisses par morceaux . . 173

14 Distance et pseudo-distance 175
14.1 La fonctionnelle longueur, formule de première variation 175
14.1.1 Première variation de la longueur 176
14.2 Le cas riemannien 178
14.2.1 Distance riemannienne 178
14.2.2 Théorème de Hopf-Rinow 179
14.3 Le cas lorentzien 181
14.4 Interprétation : temps et « paradoxe » des jumeaux en relativité générale 181

14.5 La connexion de Levi-Civita revisitée 182
14.6 Aperçu de deux outils techniques indispensables 182
14.6.1 Lemme de Gauß 183
14.6.2 La fonction rayon 183

15 La courbure **185**
15.1 Motivations 185
15.2 Tenseur de courbure de Riemann 187
15.3 Symétries du tenseur de courbure 189
15.4 Familles de courbes et courbure 189
15.5 Transport parallèle le long de boucles fermées et courbure 190
15.6 Courbure sectionnelle 192
15.7 Courbure de Ricci, courbure scalaire 195
15.8 Courbure d'Einstein, identité de Bianchi 197
15.9 Identités de Ricci 197
15.10 Variétés à courbure sectionnelle constante 198
15.11 Courbure de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{S}^n$ 198
15.12 Invariants géométriques 199
15.13 La courbure, pratique mathématique, pratique physique 200

16 Familles de géodésiques, champs de Jacobi **203**
16.1 Familles de Géodésiques, champs de Jacobi 203
16.2 Existence des champs de Jacobi et lien avec l'application exponentielle 206
16.3 Points conjugués 206
16.4 Interprétation physique des champs de Jacobi en relativité générale 207
16.4.1 Forces de marée 208
16.5 Le point de vue du physicien 209
16.5.1 Déviation géodésique, démonstration de Wald . 209
16.5.2 Congruences de courbes, équation de Raychaudhuri 211
16.5.3 Points conjugués et équation de Raychaudhuri . 215

17 Géodésiques et courbure **217**
17.1 Courbure et points conjugués 217
17.2 Définition de la courbure à partir de la déviation géodésique 218
17.2.1 Courbure sectionnelle à partir de la déviation géodésique 218
17.2.2 Développement de Taylor du module des champs de Jacobi 219
17.3 Interprétation métrique de la courbure dans le cas riemannien 220

18 Propriétés extrémales des géodésiques **223**
18.1 Qu'est-ce que le calcul des variations ? 223
18.2 Fonctionnelle longueur 224
18.3 Fonctionnelle énergie 224
18.4 Présentation des résultats 225
18.4.1 Points conjugués le long des géodésiques 226

18.4.2 Résultats de O'Neill 226
18.5 Les formules utilisées pour obtenir ces résultats 227
18.5.1 Première variation de longueur 228
18.5.2 Formule de Synge pour la variation seconde . . 229
18.5.3 Première et seconde variations de l'énergie . . . 230
18.6 Quelques conséquences globales 230
18.7 Causalité, sous-variétés et points focaux 232
18.7.1 Causalité 232
18.7.2 Sous-variétés et points focaux 232

IV Relativité générale 235

19 Relativité générale, présentation axiomatique 237
19.1 Présentation axiomatique 237
19.2 Les postulats géométriques 238
19.2.1 L'espace-temps 238
19.2.2 Particules 238
19.2.3 Définition géométrique du temps : le temps propre 239
19.3 L'équation d'Einstein, le postulat physique 240
19.3.1 Tenseur d'énergie-impulsion 240
19.3.2 Équation d'Einstein 242
19.3.3 L'équation d'Einstein ne peut caractériser complètement l'espace-temps 243
19.3.4 Familles de particules, fluides de matière 243
19.4 Gravitation, courbure, et géodésiques 246
19.5 « Paradoxe » des jumeaux dans l'espace-temps 247
19.6 La constante cosmologique : mathématique ou physique ? 248
19.7 Le problème de Cauchy en relativité générale 249
19.8 Forces, limites et alternatives 250
19.9 Approche entièrement géométrique 253

20 Les singularités de l'espace-temps 255
20.1 Complétude géodésique et extensibilité 256
20.1.1 Introduction heuristique 256
20.1.2 Prolongement de courbes, point terminaux . . . 256
20.1.3 Complétude géodésique ; extension de l'espace-temps 257
20.2 Singularités de l'espace-temps 259
20.3 Un peu de causalité 259
20.3.1 Relations de causalité 259
20.3.2 Géodésiques extrémales et hyperbolicité globale 261
20.4 Surfaces piégées de Penrose 263
20.5 Énergie et géométrie 265
20.6 Les théorèmes de singularités de Penrose et Hawking . . 266
20.7 Principe de démonstration 268
20.8 La conjecture de censure cosmique 269

V Pour aller un peu plus loin **271**

21 Les variétés fibrées **273**
21.1 Fibration et variétés fibrées 273
21.2 Un exemple fondamental : le fibré tangent 275
21.3 Sections d'un fibré 276
21.4 Atlas de fibré, et fonctions de transition 277
21.5 Submersion riemannienne 279
21.6 Connexions dans les variétés fibrées 280
21.7 Revêtements 282

22 Géodésiques et symétries : les champs de Killing **285**
22.1 Définitions 285
22.2 Propriétés élémentaires 286
22.3 Champs de Killing et géodésiques 287

23 Intégration sur une variété semi-riemannienne **289**
23.1 Forme volume riemannienne 289
23.2 Intégrale d'une fonction sur une variété semi-riemannienne orientée 289

24 La théorie de Kaluza-Klein **291**
24.1 Préambule : retour sur les isomorphismes musicaux . . . 292
24.2 L'électromagnétisme sur la variété espace-temps 292
24.2.1 Le champ électromagnétique comme 2-forme différentielle 292
24.2.2 Particules chargées 292
24.2.3 Équations de Maxwell 293
24.2.4 Loi de Lorentz 293
24.2.5 Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique 294
24.3 Électromagnétisme et équation d'Einstein 295
24.4 Axiomatique classique pour la gravitation et l'électromagnétisme 295
24.5 Une géométrie commune pour la gravité et l'électromagnétisme 296
24.6 Espace-temps de dimension 5, « petite » dimension 296
24.7 Chute libre dans un champ électro-gravitationnel 298
24.8 Fluide de poussière dans un espace-temps de dimension 5 299
24.9 Fluides dans un champ électro-gravitationnel 300
24.10 Limites et perspectives 301

25 Éléments de théorie des sous-variétés **305**
25.1 Sous-variétés semi-riemanniennes 305
25.2 Caractère causal des sous-variétés 306
25.3 Seconde forme fondamentale 307
25.4 Courbes et géodésiques dans les sous-variétés 308
25.5 Géométrie extrinsèque et équation de Gauß-Codazzi . . . 308
25.6 Sous-variétés totalement géodésiques 309

25.7 Champ de vecteurs de courbure moyenne 310
25.8 Hypersurfaces semi-riemanniennes 310
25.9 Opérateur de forme sur une hypersurface 311
25.10 Champ de vecteurs de courbure moyenne et opérateur de forme 312
25.11 Hypersurfaces de genre lumière 312
25.12 Surfaces piégées de Penrose, complément 314
25.13 Les théorèmes de plongement de Whitney et de Nash . . 316

VI Appendice 319

A Congruences de courbes, équation de Raychaudhuri 321
A.1 Congruence de courbes 321
A.2 L'équation d'évolution fondamentale 322
A.3 Tenseur d'évolution, vorticité et cisaillement 323
A.4 Flots irrotationnels 324
A.5 Remarque technique 325
A.6 Tenseur de projection et tenseurs de genre espace 326
A.7 Congruence de genre temps 326
A.8 Congruence de genre lumière 330
A.9 Singularités d'une congruence 334
A.10 Points conjugués et équation de Raychaudhuri 336

Bibliographie 339

Index 343

Chapitre 1

Introduction

La géométrie différentielle et riemannienne est le langage de la relativité générale. La relativité générale est en effet une théorie purement géométrique d'une élégance et d'une simplicité formelle sans équivalent, une fois maîtrisés les fondements de la géométrie riemannienne.

Objectif, prérequis, bibliographie

L'objectif de ce livre est de présenter de manière simple et motivée toutes les notions fondamentales de la géométrie riemannienne permettant d'appréhender les fondements géométriques de la relativité générale. Il est issu d'un cours donné à un groupe d'adhérents de la Société astronomique de France (SAF) souhaitant un exposé mathématique précis et rigoureux, avec pour seule ambition la découverte des belles idées mathématiques mises en œuvre.

Il ne s'agissait donc pas d'essayer de rédiger un ouvrage de géométrie différentielle de plus ; il en existe déjà beaucoup, certains excellents. L'ambition était de tenter un cours au propos original : viser une bonne appréhension des notions mathématiques introduites sans s'attarder sur les détails techniques, en compensant l'absence de nombreuses démonstrations (pour lesquelles des références précises seront données) par des justifications heuristiques des objets introduits. Notre souhait est qu'une fois cette compréhension acquise, le lecteur qui le souhaite puisse aborder sereinement les chapitres correspondants d'un livre universitaire complet.

En ce sens, ce cours sera un « guide de géométrie différentielle » pour les étudiants mathématiciens, leur permettant de découvrir les fondements théoriques de la relativité, source de recherches mathématiques importantes. Il séduira également les étudiants physiciens souhaitant approfondir les bases mathématiques de leurs cours de relativité générale.

Cette compréhension profonde des bases de la géométrie riemannienne, pourtant indispensable à une maîtrise des aspects théoriques de la re-

lativité générale, nous semble en effet parfois un peu négligée dans les ouvrages de physique. Pour faciliter la découverte des idées abordées, nous avons donc choisi de ne pas fournir tous les détails techniques (parfois fastidieux, il faut le reconnaître) nécessaires à la mise en place parfaitement rigoureuse de la géométrie riemannienne, et ne proposerons quasiment aucune démonstration.

Nous sommes convaincus qu'une bonne appréhension des objets manipulés facilitera et rendra plus agréable l'acquisition ultérieure d'une maîtrise technique des outils de la géométrie différentielle et de la relativité générale, en leur donnant du sens, tout en posant des bases solides pour la découverte de leurs aspects théoriques plus avancés.

Pour l'approfondissement nécessaire aux développements tant théoriques que techniques de la géométrie différentielle et riemannienne, nous renvoyons essentiellement aux ouvrages de référence de Lee, de O'Neill, et à celui en français de Lafontaine. Pour la relativité générale, nous renvoyons vers les cours, disponibles en ligne, d'Éric Gourgoulhon, et aux ouvrages (en anglais) de Carroll et de Wald. Ce cours peut donc aussi être vu comme un « guide de lecture » de ces livres.

Voir ci-dessous la bibliographie détaillée.

Prérequis :

— les bases de l'algèbre linéaire ;

— topologie générale (espace topologique, ouverts, compacts, connexes, fonction continue...) ;

— calcul différentiel (fonctions différentiables et propriétés élémentaires...).

Les ouvrages sur lesquels s'appuie ce cours : Les deux principales références, quasiment auto-suffisantes, sont les livres de John Lee, et la véritable « bible » de la géométrie pour la relativité générale, le O'Neill, auquel il convient d'ajouter l'excellent Lafontaine pour la géométrie différentielle. Le lecteur désireux d'approfondir les idées de base présentées dans ce cours, et en particulier étudier les démonstrations des résultats ici présentés, peut se contenter de ces seuls ouvrages. Le but proposé ainsi est d'éviter de se perdre dans l'abondante littérature existante sur ce sujet. Ces ouvrages font l'unanimité, et sont facilement accessibles en bibliothèque, ou sur internet. Néanmoins, les autres ouvrages présentés ci-dessous, tout aussi reconnus, enrichissent évidemment considérablement l'apprentissage de la géométrie et de la relativité. Ils sont donc un peu indispensables aussi... Mais nous avons fait en sorte qu'ils restent peu nombreux.

Pour la géométrie différentielle :

— Tu, *An Introduction to Manifolds* : c'est le livre le plus pédagogique et « élémentaire », bien que très complet sur le sujet, qui aborde sous tous les angles chaque notion. Très agréable à lire, très clair (peu de topologie en revanche, hormis la cohomologie de De Rham).

— Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles* : La grande référence en français. Un peu plus exigeant que le Tu, il reste très pédagogique, et passionnant à lire. Il couvre nos chapitres 2 à 5.

— Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds* : la trilogie de référence. Dans leur seconde édition, ces ouvrages, avec le style remarquablement clair de Lee, sont les références ultra-complètes incontournables sur le sujet. Differential manifolds couvre nos chapitres 2 à 5 et 21, Riemannian manifolds nos chapitres 6 à 18 et 25.

Pour la géométrie riemannienne :

— Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds* : la première édition, trouvable en pdf sur internet, était particulièrement concise et didactique, un vrai régal à lire (malgré de nombreuses coquilles).

— Gallot, Hulin et Lafontaine, *Riemannian Geometry* : un grand classique de référence, de haut niveau.

— Carmo, *Riemannian Geometry* : autre grand classique, sensiblement plus facile que le Gallot-Hulin-Lafontaine.

Pour la géométrie semi-riemannienne, dans l'optique de la relativité :

— O'Neill, *Semi-Riemannian geometry* : c'est la référence indispensable pour la géométrie semi-riemannienne et son utilisation en relativité générale. C'est le seul livre où sont démontrés, et même énoncés, les résultats indispensables concernant les géodésiques de genre temps, lumière et espace, fondamentaux en relativité générale. Une vision particulièrement géométrique, élégante et unique. Incontournable et indispensable ! Il couvre nos chapitres 2 à 18.

Pour la relativité générale :

— Gourgoulhon, *Relativité générale* : cour de master d'Éric Gourgoulhon, disponible sur la page web de son auteur.

— Michel Vaugon, "Cours de relativité pour mathématiciens" : cours de relativité pour mathématiciens de Michel Vaugon, manuscrit/pdf, disponible sur demande.

— Carroll, *Spacetime and Geometry* : ouvrage d'introduction moderne ; on peut le considérer (et c'est d'ailleurs ce que suggère l'auteur dans sa préface), comme un « pré-Wald ».

— Wald, *General Relativity* : la grande référence. Très complet, clair, et rigoureux sur le plan mathématique (il a en particulier inspiré notre chapitre 20 sur les singularités).

— Misner, Thorne et Wheeler, *Gravitation* : l'incontournable pavé. A formé des générations de relativistes. Fait rêver pour tous ses splendides figures et dessins et son approche éminemment géométrique. Mais le cheminement y est parfois difficile à suivre.

— Hawking et Ellis, *The large scale structure of space-time* : ouvrage légendaire, que je suis obligé de mentionner. Il est néanmoins d'un très haut niveau, et difficile à lire. Son but était essentiellement

de présenter, sous forme de livre, les légendaires théorèmes de singularité de Penrose et Hawking.

— Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity* : comme le Hawking and Ellis, il s'agit d'un livre de niveau avancé, mais un must, que je me dois de citer pour son importance historique. C'est Penrose qui a introduit des méthodes profondément mathématiques de topologie différentielle en relativité générale, relançant complètement le domaine, en prouvant les premiers théorèmes de singularités.

— Sachs et Wu, *General Relativity for Mathematicians* : un livre un peu méconnu proposant une approche très originale et inspirante, de haut niveau mathématique.

Plusieurs parties de ce cours s'inspirent fortement des ouvrages de Lee et de O'Neil (en particulier les chapitres 10, 14, 16 et 18). Ce livre ne revendique donc pas beaucoup d'originalité dans son contenu. Les seules originalités qu'il peut revendiquer sont l'ordre de présentation des sujets, les introductions heuristiques aux concepts de la géométrie différentielle, et l'utilisation des « courbes d'une variété », et en particulier des géodésiques, comme fil conducteur (!) pour explorer la géométrie et interpréter le tenseur de courbure des variétés ; de plus cette insistance sur le rôle des géodésiques me semble convenir avec une approche de leur pertinence dans la compréhension de la relativité générale.

Motivations...

En 1905, Einstein conclut les travaux de Lorentz et Poincaré en formulant la relativité restreinte. Elle décrit parfaitement les mesures de mouvements, temps et distance des objets physiques en l'absence de gravitation.

En 1907, Minkowski reformule la relativité restreinte, comprenant qu'elle s'exprime beaucoup plus simplement et naturellement dans un espace affine de dimension 4 ; l'espace-temps est né !

À partir de 1908, sans réelles motivations observationnelles, mais par pure exigence logique, Einstein cherche à insérer la gravitation dans le cadre de la relativité restreinte.

Après des années d'efforts, il a l'idée, qu'on ne peut que qualifier de géniale, de modéliser la gravitation par la *forme* de l'espace-temps : l'espace Euclidien affine n'est pas la « bonne » description de notre univers, celui-ci devant être vu comme un espace « courbe », les objets soumis à la gravitation en suivant des courbes naturelles, *les géodésiques*. Einstein met le point final à sa théorie en 1915, avec la publication de l'équation dite d'Einstein (évidemment !) qui relie la forme de l'espace-temps à son contenu en masse-énergie : la relativité générale est née (fait remarquable dans l'histoire de la physique, elle n'est le fruit que d'un seul chercheur, Einstein).

La relativité générale s'appuie à l'époque sur les dernières avancées (dues à l'école italienne avec Levi-Civita et Ricci-Cubastro) de la géométrie différentielle, « inventée » par Riemann autour de 1850. Riemann avait d'ailleurs eu l'intuition que ses « espaces courbes » pouvaient offrir une meilleure description du monde, mais faute de motivation physique à cette époque, la géométrie différentielle ne se développa que de façon interne aux mathématiques.

En 1916, Schwarzschild propose la première solution exacte des équations d'Einstein, modélisant le champ de gravité autour d'un corps sphérique. Dans les années 1920, Friedman et Lemaitre mettent au point des solutions exactes décrivant un univers en évolution : découverte de l'expansion de l'univers, et de son corollaire, le Big-Bang.

Les physiciens s'emparent alors de ces solutions, et la relativité se développe essentiellement à travers ses aspects techniques et calculatoires, utilisant ces solutions, essentiellement par exemple la solution de Schwarzschild, pour calculer avec une précision accrue les orbites des corps célestes.

Il est tout à fait remarquable de noter que c'est une mauvaise compréhension de certains concepts de la géométrie différentielle, une mauvaise interprétation d'une *carte* utilisée dans la solution de Schwarzschild, qui retarda de près de 50 ans l'acceptation de trous noirs comme réalité physique, alors que cette solution les mettait en évidence depuis sa découverte. Les trous noirs furent ainsi admis par les mathématiciens bien avant les physiciens !

Néanmoins, faute de données observationnelles suffisantes, la relativité sombra un peu, s'effaçant devant la mécanique quantique et ses succès spectaculaires.

C'est en 1964 que Penrose révolutionna la relativité générale en introduisant des méthodes purement mathématiques issues de la topologie différentielle (une branche de la géométrie différentielle), avec des méthodes dites globales, pour mettre en évidence le caractère générique des phénomènes spectaculaires liés aux trous noirs suggérés par la solution de Schwarzschild. Il mit ainsi en évidence l'importance d'une bonne compréhension des fondements de la géométrie différentielle pour développer la relativité générale. La théorie des trous noirs en particulier connut des avancées spectaculaires grâce à des mathématiciens-physiciens talentueux : Penrose, Hawking, Carter, Kerr...

Aujourd'hui la relativité peut s'approcher selon plusieurs chemins :

— Un angle de physicien, technique, cherchant à préciser les modèles numériques permettant la confrontation à l'expérience. Obtenir de tels modèles pertinents demande une bonne maîtrise de certains outils très fins de la géométrie différentielle.

— Un angle de mathématicien, cherchant à utiliser des méthodes mathématiques sophistiquées pour résoudre des problèmes théoriques.

> Le plus emblématique à mon goût étant la conjecture de censure cosmique de Penrose, qui établirait de manière convaincante l'existence des trous noirs, qui malgré les observations de plus en plus précises, doivent toujours être soumis à des tests de validation de plus en plus fins. Cette conjecture est un problème fondamentalement mathématique soumis à deux angles d'attaque, l'un utilisant la théorie des équations aux dérivées partielles, l'autre la topologie différentielle.

Évidemment, il existe un continuum entre ces deux chemins « extrêmes », mélangeant en proportions variables mathématiques fondamentales et modélisations physiques ; c'est ce qui fait la beauté et la richesse de la relativité générale.

Ainsi, quelle que soit l'approche souhaitée de la relativité, une bonne compréhension des fondements et objets de base de la géométrie différentielle, et de leur signification, s'avère nécessaire. C'est l'objet de ce cours.

Précisément, on peut présenter la relativité générale de manière extrêmement esthétique, en la fondant sur quatre postulats, trois postulats géométriques, et un postulat physique :

— Les trois postulats géométriques :
  (i) L'Univers est modélisé par une variété lorentzienne orientée en temps $(\mathscr{M}, \boldsymbol{g})$, appelée espace-temps.
  (ii) Les particules massives ont pour lignes d'univers les géodésiques de genre temps de $\mathscr{M}$.
  (iii) Les photons ont pour lignes d'univers les géodésiques de genre lumière de $\mathscr{M}$.

— Le postulat physique :
  (iv) L'équation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} S g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} .$$

Le but de ce livre est d'emmener le lecteur à la découverte de chacune des idées intervenant dans ces postulats...

Présentation des chapitres

Note : dans tout ce livre, les termes lecteur, mathématicien, physicien *sont de genre neutre : ils désignent aussi bien une* lectrice, mathématicienne, physicienne *qu'un* lecteur, mathématicien, physicien.

La géométrie riemannienne demande l'introduction de nombreux objets techniques avant de pouvoir découvrir les premiers beaux théorèmes. Le lecteur doit donc s'armer d'un peu de patience et de courage.

Les chapitres 2 à 10 introduisent les objets et outils de base de la géométrie différentielle et riemannienne. Le chapitre 2 introduit les espaces

géométriques fondamentaux sur lequel tout va reposer, généralisant l'espace de la géométrie euclidienne pour définir des espaces « courbes » : les *variétés différentielles*. Le chapitre 6 introduira la *métrique* d'une variété, intuitivement : le moyen d'y mesurer les distance ; les variétés différentielles deviennent des *variétés riemanniennes*. Les chapitres 3 (vecteurs tangents), 4 (tenseurs) et 7 (connexion d'une variété), apparaîtront peut-être compliqués à certains lecteurs, mais ils sont essentiels pour la suite. Ces lecteurs ne doivent pas s'inquiéter de les trouver difficiles ; ils le sont ! C'est en les voyant à l'œuvre dans la suite du cours qu'ils deviendront familiers, comme souvent en mathématiques...

Le chapitre 9 propose un petit résumé, illustré par les exemples de $\mathbb{R}^n$ et de la sphère $\mathbb{S}^n$, des notions essentielles introduites dans les 8 premiers chapitres. Le lecteur est invité à faire, selon ses envies, les allers-retours qui lui sembleront nécessaires entre ce chapitre et ceux définissant précisément les objets mentionnés.

Le chapitre 11 est une première récompense : il utilise les objets introduits dans les chapitres précédents pour poser les postulats géométriques de la relativité générale. L'espace-temps est défini, et les courbes représentant l'histoire des particules qui s'y déplacent, leurs « lignes d'univers », sont reliées aux courbes remarquables d'une variété définies au chapitre 8, les géodésiques. Malheureusement on ne sait pas encore y faire grand chose : il faut encore comprendre comment lier le comportement des géodésiques à la géométrie - la courbure - de la variété. Ce sera l'objet des chapitres 13 à 18.

Le chapitre 12 est un interlude, dont le but est d'aider le lecteur à passer du style d'écriture mathématique au style, souvent plus technique, des livres de physique. Il s'agit en quelque sorte d'un dictionnaire de traduction mathématiques-physique ! Il est donc à lire par le lecteur désirant approfondir la relativité à l'aide des livres classiques des physiciens.

Le chapitre 13 met en place les idées nécessaires à l'étude des familles de courbes sur une variété, et le chapitre 14 présente les premiers résultats, locaux, sur les notions de distance et pseudo-distance sur une variété.

Le chapitre 15 définit, enfin, l'objet qui définit la forme d'une variété riemannienne : *la courbure*.

Les chapitres 16, 17, 18 relient alors la courbure au comportement des géodésiques. Le chapitre 16 présente la courbure comme « l'essence » de la gravitation. Le chapitre 18 est le point culminant des aspects mathématiques, présentant les propriétés extrémales des géodésiques.

Tous ces chapitres nous permettent enfin d'atteindre le but de ce cours avec le chapitre 19 : la présentation des *fondements géométriques de la relativité générale*.

Mais pour aller plus loin, et pour faire rêver le lecteur, nous proposons ensuite deux chapitres d'un niveau sensiblement plus avancé : le chapitre 20 sur les théorèmes de singularités de Penrose et Hawking, et le chapitre 24 sur la théorie de Kaluza-Klein. Le but est de montrer comment les mathématiques peuvent offrir aux physiciens théoriciens des sources d'inspiration pour développer des théories physiques, et même prédire de nouveaux phénomènes physiques. Il n'est évidemment pas possible, compte tenu des objectifs fixés pour ce livre, de fournir tous les détails sur ces sujets. Le lecteur est donc invité à lire ces chapitres de manière détendue, avant d'envisager de se lancer dans les ouvrages ou articles les traitant de manière rigoureuse.

Néanmoins, ces chapitres 20 et 24 nous servent de prétextes pour introduire (succinctement) quelques dernières notions mathématiques essentielles dans un cours de géométrie différentielle et riemannienne : les variétés fibrées (chapitre 21), les champs de Killing (chapitre 22), l'intégration sur une variété riemannienne (chapitre 23), et quelques éléments de théorie des sous-variétés (chapitre 25).

Le chapitre 21 sur les variétés fibrées et le chapitre 25 sur les sous-variétés, en particulier, auraient eu leur place bien plus tôt dans ce cours. Néanmoins, nous avons fait en sorte de rédiger ce cours de telle sorte que chaque chapitre ne fasse appel qu'à ce qui a été vu précédemment. Nous pouvions donc placer ces chapitres vers la fin. Ils sont néanmoins essentiels dans toute étude rigoureuse de la géométrie différentielle.

Le chapitre 25 se terminera sur la présentation de deux théorèmes spectaculaires, les théorèmes de Whitney et de Nash, qui disent que toute variété différentielle ou riemannienne abstraite peut être plongée, isométriquement dans le cas riemannien, dans un espace euclidien $\mathbb{R}^m$ de dimension assez grande. En termes simples, ces théorèmes disent que toutes les variétés abstraites que nous aurons pris la peine de définir et d'enrichir pendant 22 chapitres, sans référence à un espace ambiant, peuvent en fait être réalisées comme des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$... Mais cela n'en simplifierait malheureusement pas l'étude, l'essentiel reposant sur les propriétés *intrinsèques* des variétés.

Enfin, un appendice donnera une démonstration d'une équation importante pour certains aspects théoriques de la relativité générale, *l'équation de Raychaudhuri*. Cette équation est au cœur de la démonstration des théorèmes de singularités de Penrose et Hawking. Il m'est apparu difficile d'en trouver une démonstration complète et satisfaisante dans la littérature ; cet appendice vise donc à combler ce manque.

En guise d'introduction détendue à ce cours, le lecteur peut feuilleter le livre Collion, *Voyage dans les mathématiques de l'espace-temps*. Il propose une approche « vulgarisée » des mathématiques ici exposées.

Enfin, le lecteur accompagnera utilement ce cours par le remarquable recueil d'exercices et de problèmes : Gadea et Masqué, *Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds*. Un fascicule d'exercices liés à notre cours sera également proposé sur le site de notre éditeur EDP.

Michel et Éric, contributeurs essentiels...

Michel Vaugon, mon directeur de thèse, m'a enseigné la géométrie différentielle lors de son cours de DEA, cours qu'il a donné de nombreuses années à l'Université Paris 6. Son influence est donc évidente sur ce poly. C'est également Michel, suite à ma demande, qui s'est lancé dans un cours de relativité générale pour mathématiciens. Il a gentiment accepté de relire ce texte, récupérant une bonne poignée de bêtises et erreurs.

Avec Michel, nous avons fait la connaissance d'Éric Gourgoulhon, lors d'un déjeuner, pour discuter d'un « amusement mathématique » autour de Kaluza-Klein, que nous lui avions envoyé à lire. Les cours, polys et livres d'Éric, ainsi que sa vision très géométrique, ont eu une grande influence sur mon apprentissage de la relativité générale. Il a aimablement accepté que j'utilise des passages de ses cours dans ce poly. « Accessoirement », c'est Éric qui m'a fourni la base latex grâce à laquelle ce poly a été rédigé.
Merci...

Merci aussi à...

Merci à Pierre Palat, Alexandre Bellon, et Merlin Héré--Cuzon de m'avoir invité à tenter un cours « expérimental » à la Société astronomique de France (SAF). Merci à tous les auditeurs de ce cours pour les échanges particulièrement enrichissants qui ont conduit à la rédaction de ce cours.

Merci à Michèle Leduc, Michel le Bellac et France Citrini pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant de publier ce livre dans cette belle collection de la maison EDP Sciences. Merci à Sophie Hosotte d'avoir fait une relecture attentive de ce livre pour y corriger de nombreuses coquilles (je suis entièrement responsable de celles qui restent.)

Last, but vraiment not least, un grand merci à Merlin Héré--Cuzon. Mathématicien, expert LaTeX intransigeant, et esthète de l'écriture mathématique, il a accepté le lourd travail de transformer mon vilain poly en un livre publiable. Lors de cette agréable collaboration, il a su, par d'amicales pressions, me suggérer de nombreuses améliorations qui ont rendu mon texte bien meilleur. Et surtout, si ce livre est *beau* à lire, c'est grâce à lui.

Remarque : ce livre a été écrit, relu et corrigé sans aucun recours à une quelconque IA. Toutes les erreurs et maladresses sont authentiquement humaines.

Première partie

Fondamentaux géométriques

Chapitre 2

De l'espace affine aux espaces courbes : les variétés différentielles

Au commencement était la géométrie d'Euclide, avec ses points, ses droites, et son plan...
Puis sont venus Gauß et Riemann, avec leurs espaces courbes...

Ce chapitre introduit les espaces géométriques fondamentaux sur lesquels tout va reposer, les *variétés différentielles*. Ces espaces généralisent les espaces affines de la géométrie euclidienne, en formalisant la notion intuitive « d'espaces courbes ».

2.1 Motivation historique

En guise de motivation, on peut tenter une approche heuristico-historique de l'invention de la géométrie différentielle.

Attention ! Je triche assez fortement avec l'histoire dans les deux paragraphes qui viennent, le but étant plus une motivation justifiée en 2025 qu'un véritable exposé historique.

Il est bien connu que la géométrie s'est développée pendant de nombreux siècles sur les fondements posés dans les éléments d'Euclide. La géométrie Euclidienne a également été le cadre naturel utilisé par les physiciens pour décrire le monde, et en particulier les phénomènes astronomiques, jusqu'au xx^{e} siècle.

Avec Descartes et l'invention des coordonnées, l'algèbre fit une entrée déterminante dans le développement de la géométrie.

Ensuite, Liebniz et Newton firent de l'espace euclidien, muni de ces coordonnées cartésiennes, le cadre naturel de l'invention du calcul différentiel. Mais le calcul différentiel se révéla également être un outil extrêmement puissant d'étude de la géométrie.

De leur côté, les physiciens s'emparèrent immédiatement de ces développements (Newton avait d'ailleurs inventé son calcul différentiel pour les besoins de sa théorie de la gravitation), et la physique connut un essor prodigieux.

Grâce à l'algèbre et au calcul différentiel les mathématiciens accélérèrent le développement de la géométrie. Ils constatèrent néanmoins rapidement, entre autres avec la recherche d'une « démonstration » du cinquième postulat d'Euclide, que le cadre euclidien était trop étroit. D'autant qu'ils avaient sous les pieds, avec la surface de la terre, des signes manifestes que tout n'était pas droit...

Ce fut la découverte des géométries non-euclidienne par Gauß, Bolyai, Lobatchevski...

En résumé : l'espace affine, typiquement, $\mathbb{R}^n$, est le cadre naturel de la géométrie de base. Il permet d'y associer algèbre linéaire et calcul différentiel. On y trouve donc naturellement les notions de dimension, de coordonnées, de différentielle, d'intégrale. Le calcul différentiel peut d'ailleurs être vu comme le moyen d'introduire l'algèbre linéaire dans l'étude de fonctions qui ne sont pas linéaires.

Se pose alors la question de trouver des espaces géométriques plus généraux, contenant des objets connus comme la sphère ou le tore, où l'on puisse encore définir des coordonnées, une dimension, et surtout faire du calcul différentiel.

Les notions de coordonnées, de dimension et de différentielle sont des notions locales. On va donc chercher à construire des espaces qui ressemblent localement à $\mathbb{R}^n$.

2.2 Motivation mathématique

Comment dépasser l'espace euclidien pour étudier ces nouveaux espaces géométriques ? Deux cheminements possibles :

— L'algèbre : c'est l'avénement de la géométrie algébrique.

— Le calcul différentiel : c'est l'avènement de la géométrie différentielle !

Dans ce cours, le but étant d'atteindre les bases de la relativité générale, nous allons emprunter ce deuxième chemin. À noter que c'est d'ailleurs le chemin que prirent les physiciens, privilégiant la puissance du calcul différentiel à celle de l'algèbre moderne, les lois d'évolution en physique semblant actuellement s'exprimer plus naturellement à partir des équations différentielles. Peut-être cela changera-t-il un jour ?

Puisque le calcul différentiel consiste à « approcher »une fonction quelconque par une fonction linéaire, il s'agit bien d'utiliser la puissance de l'algèbre linéaire pour étudier des fonctions dérivables : songez au théorème d'inversion locale qui à partir d'une hypothèse d'algèbre linéaire, donne une conclusion d'analyse.

Or l'espace affine euclidien, par sa définition même, associe un espace de points, sur lequel on peut faire du calcul différentiel, et un espace algébrique, l'espace vectoriel associé. Mais cette association confère à l'espace Euclidien une grande rigidité.

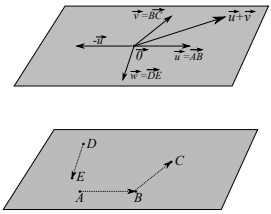


FIGURE 2.1 – Espace affine.

Néanmoins, même en confinant les objets géométriques « à l'intérieur » de l'espace euclidien, le calcul différentiel permit d'étudier de très nombreux objets « tordus » comme les courbes et les surfaces. Mais ce cadre se révéla finalement trop restrictif. D'une part, après certains travaux de Gauß, il apparut que d'avoir à tenir compte d'un espace « ambiant » alourdissait l'étude des propriétés géométriques intrinsèques de certains espaces. Mais de plus, l'imagination sans limite des mathématiciens fit apparaître des objets géométriques qu'il semblait difficile de faire vivre dans un espace euclidien. Bien des années plus tard, on découvrit finalement (Whitney, 1936, et Nash, 1950) que tous ces étranges objets peuvent en fait vivre dans un espace euclidien de dimension assez grande, mais cela n'en simplifia pas l'étude, la géométrie différentielle que nous allons découvrir étant déjà devenue une branche des mathématiques extraordinairement développée et puissante.

Coordonnées et puissance de l'algèbre linéaire semblent indispensables au calcul différentiel comme moyen d'étude d'objets « courbes ». Si l'on fait le choix d'utiliser le calcul différentiel comme moyen d'étude de ces nouvelles géométries, il s'agit alors d'essayer de trouver un moyen de conserver des notions de dimension, de coordonnées, et d'approximation par des objets issus de l'algèbre linéaire.

Comment donc conserver ces notions dans un cadre plus général que celui de l'espace euclidien ? Si l'on regarde bien les principes de base du calcul différentiel, on constate qu'il s'agit toujours d'étudier une fonction « au voisinage » d'un de ses points ; ce qui se passe au loin n'a aucune influence sur les propriétés de différentiabilité de cette fonction (*attention : il n'en demeure pas moins que les plus beaux problèmes consistent souvent à relier ce qui se passe localement autour de chaque point au comportement* global *de la fonction étudiée*).

Il suffirait donc peut-être de demander que nos espaces géométriques ressemblent « localement », c'est-à-dire autour de chaque point à l'espace euclidien... Or, en mathématiques, pour dire que deux ensembles se ressemblent, on utilise les bijections ! Et plus précisément des bijections qui

conservent une certaine structure : isomorphismes, homéomorphismes, difféomorphismes...

On en arrive à une première définition possible : *les variétés topologiques...*

2.3 Variétés topologiques

Une première étape naturelle serait donc de définir :

Définition 2.1. Un espace topologique $\mathscr{M}$ est dit *localement euclidien de dimension n* si tout point $p \in \mathscr{M}$ possède un voisinage $\mathscr{U}$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un tel couple (ouvert, homéomorphisme) est appelé une carte.

Néanmoins, pour des raisons techniques qui apparaissent à l'usage, ceci n'est pas suffisant. En particulier, puisqu'on veut faire de l'analyse, il convient que l'espace soit séparé. Ensuite, il faut qu'on puisse décrire notre espace sans « trop » de cartes. La définition qui s'est imposée est la suivante :

Définition 2.2. Une variété topologique $\mathscr{M}$ de dimension n est un espace topologique tel que :

(i) $\mathscr{M}$ est un espace topologique *séparé* : deux points distincts de $\mathscr{M}$ admettent des voisinages ouverts disjoints.

(ii) $\mathscr{M}$ possède une *base dénombrable d'ouverts* : il existe une famille dénombrable $(\mathcal{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de $\mathscr{M}$ telle que tout ouvert de $\mathscr{M}$ puisse s'écrire comme réunion (éventuellement infinie) d'éléments de cette famille.

(iii) Tout point p de $\mathscr{M}$ possède un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

La propriété (i) permettra de faire de l'analyse en ayant une notion précise de limite. Notons de plus qu'elle est raisonnable d'un point de vue physique puisqu'elle permet de distinguer deux points même après une « petite perturbation ».

La propriété (ii) exclut les variétés « trop grosses », permet une théorie de l'intégration, et est un élément indispensable dans la preuve, due à Whitney, qu'une variété de dimension n peut toujours être plongée différentiablement dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$.

La propriété (iii) exprime l'essence d'une variété : localement, on peut en repérer les points de manière continue par n nombres réels $(x_1, \ldots, x_n)$, appelés *coordonnées*. Plus précisément, étant donné un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathscr{M}$, un *système de coordonnées*, ou une *carte*, sur $\mathscr{U}$ est un homéomorphisme [1]

$$\phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{U} \subset \mathscr{M} & \to & \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \\ p & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right. .$$

1. Rappelons qu'un *homéomorphisme* entre deux espaces topologiques (ici $\mathscr{U}$ et $\phi(\mathscr{U})$) est une bijection ϕ telle que ϕ et ϕ^{-1} soient continues.

Remarque 2.3. En relativité générale, il est d'usage d'indexer les coordonnées de 0 à $n-1$, $(x^0, \ldots, x^{n-1})$, l'index 0 désignant habituellement la coordonnée « temporelle ». Par ailleurs, les indices sont placés en position supérieure pour pouvoir utiliser la *convention de sommation d'Einstein* : quand dans une expression telle que $x^i y_i$ un même indice est répété en haut et en bas, l'expression doit être comprise comme la somme $\Sigma_i x^i y_i$, la somme étant prise sur toutes les valeurs prévues pour i (pour les coordonnées ci-dessus par exemple, de 0 à $n-1$). Nous adopterons désormais cette convention.

En termes imagés, une *variété* $\mathcal{M}$ de dimension n est donc un « espace » qui ressemble *localement* à $\mathbb{R}^n$; i.e. qui peut *localement* être décrit par un n-uplet de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$. Attention cependant, globalement $\mathcal{M}$ peut être très différent de $\mathbb{R}^n$, en particulier du point de vue *topologique*.

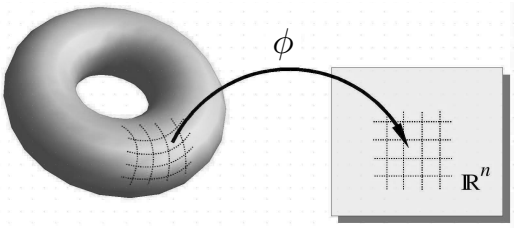


FIGURE 2.2 – Localement, une variété ressemble à $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ sur cette figure), mais ce n'est pas nécessairement le cas au niveau global.

Remarque 2.4. Il faut en général plus d'une carte pour couvrir $\mathcal{M}$. Ainsi par exemple, il en faut au moins deux pour la sphère. Cela se démontre topologiquement : la sphère est compacte, aucun ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ ne l'est !

Définition 2.5. Un *atlas* sur $\mathcal{M}$ est une famille de couples $(\mathcal{U}_k, \phi_k)_{k\in K}$, indexée par un ensemble dénombrable K, où $\mathcal{U}_k$ est un ouvert de $\mathcal{M}$ et ϕ_k est une carte sur $\mathcal{U}_k$, telle que la réunion des $\mathcal{U}_k$ recouvre $\mathcal{M}$:

$$\bigcup_{k\in K} \mathcal{U}_k = \mathcal{M} .$$

La définition donnée ici d'une variété, classique, démarre par la donnée d'un espace topologique. Mais en fait, un atlas détermine à lui seul la topologie de la variété sur laquelle on le donne ; cette approche est souvent la manière la plus pratique de construire une variété.

Les variétés topologiques sont les objets d'étude de base d'un immense champ des mathématiques apparu au XX$^{\text{e}}$ siècle : la topologie (algébrique et/ou différentielle).

2.4 Cartes et expressions en coordonnées

L'utilisation des cartes et des coordonnées est un moyen parfois commode d'obtenir une représentation plus habituelle d'une situation étudiée sur une variété, puisqu'elle permet localement de se retrouver dans le cadre familier de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.6. Étant donné un atlas sur une variété, on peut toujours le modifier pour avoir un atlas dont les ouverts de cartes sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ tout entier ; c'est parfois utile.

2.4.1 Fonctions coordonnées

Tout point $p_0 \in \mathscr{M}$ appartient par définition à un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{M}$ muni d'un homéomorphisme $\phi : \mathscr{U} \to \phi(\mathscr{U}) \subset \mathbb{R}^n$. Si $\phi(p_0) = 0$, on dit que la carte ϕ est centrée en p_0. ϕ étant à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on peut l'écrire en termes de ses composantes $(x^1, \dots, x^n)$, définies par $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$.

Les x^i sont les *fonctions coordonnées* sur $\mathscr{U} \subset \mathscr{M}$, $x^i(p)$ étant la i-ème coordonnées dans la carte $(\mathscr{U}, \phi)$. C'est ce qui sera sous-entendu lorsqu'on écrit $\phi : p \mapsto (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$.

2.4.2 Expression en coordonnées d'une fonction

Une fonction définie sur $\mathscr{M}$ peut alors s'exprimer en fonction des coordonnées données par une carte. En effet, tous les objets que nous définirons sur une variété auront une *expression en coordonnées*, qui n'est rien d'autre que la composition de la fonction définissant l'objet avec l'inverse d'une carte.

Ainsi, si $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ est une application entre deux variétés, et si $\varphi : \mathscr{U} \subset \mathscr{M} \to \mathbb{R}^n$, $x \in \mathscr{U} \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ est une carte sur $\mathscr{M}$ et $\psi : \mathscr{V} \subset \mathscr{N} \to \mathbb{R}^m$, $y \in \mathscr{V} \mapsto (y^1, \dots, y^m)$ une carte sur $\mathscr{N}$, avec $f(\mathscr{U}) \subset \mathscr{V}$, l'expression en coordonnées de f est simplement :

$$\widetilde{f} \coloneqq \psi \circ f \circ \varphi^{-1} .$$

La fonction $\widetilde{f}$ est alors une fonction entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ qui peut s'écrire :

$$\widetilde{f}(x^1, \dots, x^n) = (y^1, \dots, y^m) .$$

Le point fondamental à comprendre est que si l'on veut définir un objet *intrinsèque* sur une variété en utilisant une représentation en coordonnées, il faudra s'assurer que cette définition est bien indépendante du choix de ces coordonnées. Dans le cadre *différentiel*, cela se fera essentiellement à l'aide d'un axiome que nous allons découvrir, *l'axiome de changement de carte*.

Remarque 2.7 (Fonctions et applications). Bien que les deux termes soient aujourd'hui essentiellement synonymes, un usage courant

en géométrie est d'utiliser le terme « fonction » pour les fonctions à valeurs dans un espace euclidien $\mathbb{R}^k$, et le terme « application » pour les fonctions entre deux espaces géométriques quelconques[2]. Nous nous efforcerons de suivre cet usage dans ce chapitre, même si par la suite le terme plus universel et moderne de fonction sera souvent utilisé.

2.5 Une variété topologique ne suffit pas pour faire du calcul différentiel...

On constate en effet rapidement que si on cherche à attribuer à une fonction définie sur notre variété des propriétés de différentiabilité à partir de son expression dans une certaine carte choisie, ces propriétés vont dépendre de la carte choisie : elle pourra être différentiable dans une carte mais pas dans une autre... La définition de variété topologique n'est pas suffisante pour faire du calcul différentiel. Il manque encore un axiome...

2.6 Variétés différentielles

C'est Whitney, en 1936, qui finit par trouver la bonne définition permettant de définir une notion de différentiabilité indépendante de la carte choisie pour exprimer une fonction en termes de coordonnées locales. Elle repose fondamentalement sur un axiome de *compatibilité* des cartes.

Définition 2.8. Un *atlas différentiable* sur une variété topologique $\mathscr{M}$ de dimension n est un atlas $(\mathscr{U}_k, \phi_k)_{k\in K}$ tel que pour toute intersection non vide $\mathscr{U}_i \cap \mathscr{U}_j$, l'application, appelée *changement de carte*, ou *fonction de transition*,

$$\varphi_{ji} \coloneqq \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathscr{U}_i \cap \mathscr{U}_j) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_j(\mathscr{U}_i \cap \mathscr{U}_j) \subset \mathbb{R}^n$$

est différentiable (voir figure 2.3).

Remarquez que cette application va d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc on parle bien de différentiabilité classique dans $\mathbb{R}^n$.
En demandant que les applications de changement de carte soient de classe C^k, on obtient la notion d'atlas différentiable de classe C^k. Dans ce livre, nous utiliserons le terme *différentiable* pour C^∞, i.e. *lisse*. Dans la suite nous ne considérerons plus que des atlas C^∞.

Définition 2.9. On définit les termes suivants.

- Deux atlas sont C^k*-compatibles* si leur réunion est un atlas de classe C^k.
- Le *complété* d'un atlas de classe C^k donné, A, est la réunion de tous les atlas qui lui sont C^k-compatibles. Une carte $(\mathscr{U}, \phi)$ est C^k-compatible à A si $A \cup \{(\mathscr{U}, \phi)\}$ est encore un atlas.

2. Les Anglo-Saxons utilisent *function* et *map*.

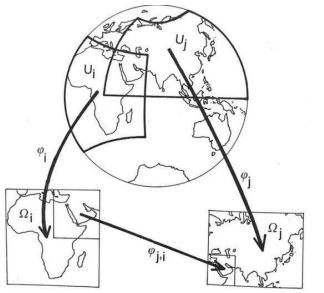


FIGURE 2.3 – On obtient une variété différentielle en demandant que les changements de carte soient différentiables.

— Un atlas $\mathcal{A}$ est *complet* (ou maximal) s'il est égal à son complété. Un atlas A est toujours contenu dans un unique atlas complet $\mathcal{A}$; il suffit de lui adjoindre toutes les cartes compatibles.

Une *variété différentielle* de classe C^k est un couple $(\mathscr{M}, \mathcal{A})$ où $\mathscr{M}$ est une variété topologique et $\mathcal{A}$ est un atlas différentiable *complet* de classe C^k de $\mathscr{M}$.

Cette définition d'atlas complet est nécessaire car si une variété topologique $\mathscr{M}$ de dimension $n > 0$ possède un atlas différentiable, on montre facilement qu'elle possède une infinité d'atlas différentiables non compatibles. Si pour deux atlas complets $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, les variétés $(\mathscr{M}, \mathcal{A})$ et $(\mathscr{M}, \mathcal{A}')$ sont difféomorphes, on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ définissent des *structures différentielles équivalentes* sur $\mathscr{M}$ (voir ci-dessous la définition de difféomorphes). Mais une variété topologique $\mathscr{M}$ peut posséder plusieurs *structures différentielles non équivalentes*.

C'est un résultat stupéfiant de la géométrie différentielle démontré par Milnor en 1956 dans le cas particulier de la sphère de dimension 7, $\mathbb{S}^7$: il existe des variétés différentielles, appelées *sphères exotiques*, qui sont homéomorphes à $\mathbb{S}^7$ mais qui ne sont pas *difféomorphes* à $\mathbb{S}^7$ munie de sa structure différentielle dite standard, induite par celle de $\mathbb{R}^8$.

D'un autre côté, pour $n \leq 6$, mais $n \neq 4$, il n'existe qu'une unique structure différentielle sur $\mathbb{S}^n$; pour $n = 4$, on ne sait pas ! De plus, toute variété de dimension $n \leq 3$ n'admet qu'une unique structure différentielle. De manière étonnante, dans le cas de $\mathbb{R}^n$, il n'existe qu'une unique structure différentielle pour tout $n \neq 4$ (la structure dite standard), mais pour $n = 4$ (la dimension de l'espace-temps !), il existe une infinité non-dénombrable de structures différentielles non-équivalentes sur $\mathbb{R}^4$, les structures dites exotiques.

Dans la pratique, on ne se donne jamais un atlas complet sur une variété $\mathscr{M}$: on se donne un atlas A, et on sait qu'on peut le compléter en un atlas complet $\mathcal{A}$. On écrit souvent « soit $\mathscr{M}$ une variété différentielle », sans mention explicite de l'atlas complet $\mathcal{A}$ définissant sa structure différentielle.