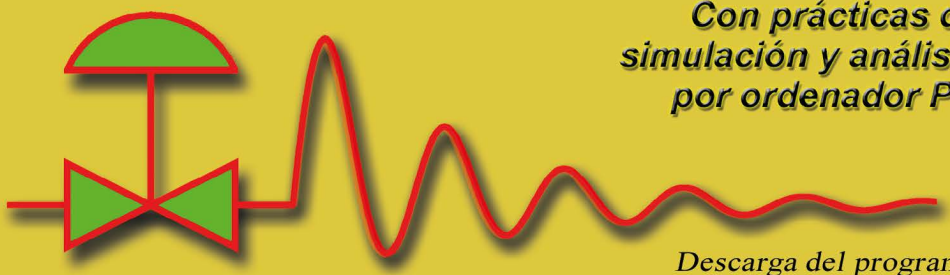
Alfredo Roca

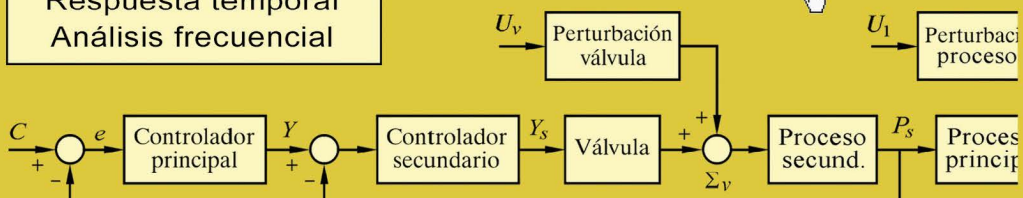
CONTROL AUTOMÁTICO DE PROCESOS INDUSTRIALES

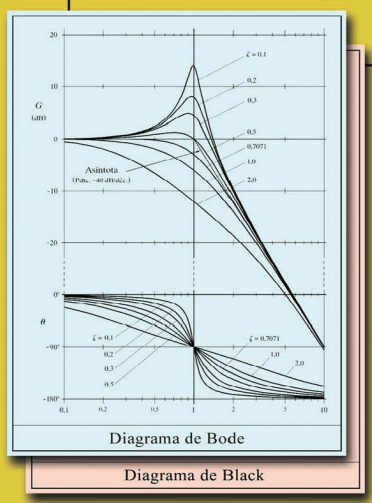
Con prácticas de simulación y análisis por ordenador PC

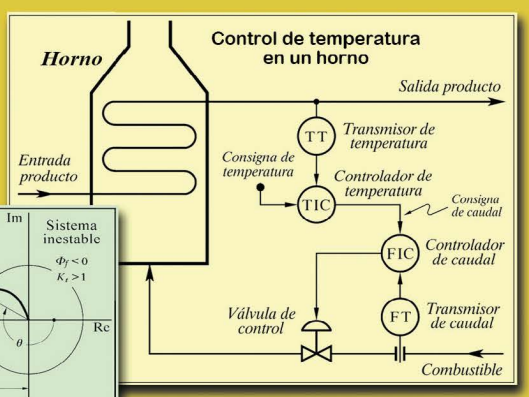


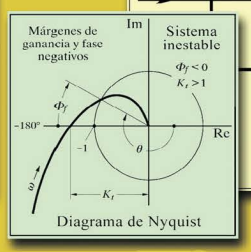
Descarga del programa gratuito de simulación
www.alfredoroca.com

Sistemas configurables
Respuesta temporal
Análisis frecuencial









SEGUNDA EDICIÓN

DIAZ DE SANTOS

Alfredo Roca

Control automático de procesos industriales

Con prácticas de simulación y análisis por ordenador PC

Segunda edición

DIAZ DE SANTOS

Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

© Alfredo Roca Cusido, 2023 Segunda Edición (Versión papel)
1ª Edición, 2014

© Alfredo Roca Cusido, 2023 Segunda Edición (Versión electrónica)

Reservados todos los derechos.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley ,cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (art.270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto de los citados derechos.

Ediciones Díaz de Santos
Email:ediciones@editdiazdesantos.com
www.editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-514-2 (Libro electrónico)
ISBN: 978-84-9052-511-1 (Libro en papel)

ÍNDICE

1 Introducción **1**

1.1 Concepto de sistema 1
1.2 Concepto de bloque 1
1.3 Diagrama de bloques 2
1.4 Función de transferencia o transmitancia 2
1.5 Sistema controlado 5
1.6 Control manual en lazo cerrado 5
1.7 Control automático en lazo cerrado 6
1.8 Cambios de carga y perturbaciones 7
1.9 Realimentación 8
1.10 Álgebra de bloques 9
1.10.1 Reglas algebraicas 10

2 La transformada de Laplace **17**

2.1 Qué es y para qué sirve 17
2.2 Propiedades y teoremas de la transformada de Laplace 18
2.2.1 Enumeración de las propiedades y teoremas 19
2.2.2 Aplicación del teorema de la derivación real 23
2.2.3 Antitransformada de fracciones impropias 26
2.3 Transmitancia operacional 27
2.4 Transformación de ecuaciones diferenciales 30
2.5 Ejemplos de cálculo 33
2.5.1 Cálculo con condiciones iniciales 35
2.6 Conversión de una función laplaciana en una ecuación diferencial 37

3 Variables y parámetros 39

3.1 Es necesario tipificar 39
3.2 Variables 40
Potencial o fuerza impulsora 40
Flujo o corriente 40
Carga o cantidad 40
3.3 Parámetros 41
Resistencia y conductancia 42
Capacidad 43
Inertancia 44
3.4 Analogías 47

4 Elementos básicos 51

4.1 Formas o funciones elementales de excitación 51
4.1.1 Escalón unitario 51
4.1.2 Impulso unitario 53
4.1.3 Rampa unitaria 54
4.1.4 Función senoidal 54
4.2 Componentes básicos de un sistema controlado 54
4.2.1 Componentes activos 55
4.2.2 Elementos de primer orden 56
4.2.3 Retardo de primer orden resistencia-capacidad 56
4.2.4 Retardo de primer orden resistencia-inertancia 59
4.2.5 Estudio de elementos retardo de primer orden. Metodología de cálculo 62
4.2.5.*a* Filtro o elemento R-C (resistencia-capacidad) 63
4.2.5.*b* Elemento bulbo de temperatura 64
4.2.5.*c* Concentración en un tanque agitado 66
4.2.5.*d* Temperatura en un tanque agitado 68
4.2.5.*e* Reacción de primer orden 69
4.2.5.*f* Nivel de un tanque con restricción de descarga. Linealización de funciones de nivel 71
4.2.5.*g* Recipiente con gas a presión provisto de una restricción. Linealización de funciones de sistemas con gases a presión 76
4.2.5.*h* Recipiente con gas a presión con dos restricciones . 80
4.2.6 Elemento capacidad pura o integrador 84
4.2.6.*a* Nivel en tanque con salida constante 85
4.2.6.*b* Masa aislada provista de caldeo eléctrico 87
4.2.6.*c* Pistón hidráulico 88

4.2.7 Elementos ajustables 89
4.2.7.*a* Ganancia ajustable. Multiplicador 90
4.2.7.*b* Reostato o potenciómetro 91
4.2.7.*c* Válvula de control 92
4.2.7.*d* Bomba centrífuga 97
4.2.8 Elementos de segundo orden 102
4.2.8.*a* Circuito eléctrico R-L-C serie 104
4.2.8.*b* Masa suspendida de un resorte con amortiguación 107
4.2.8.*c* Sismógrafo 110
4.2.8.*d* Acelerómetro 113
4.2.8.*e* Dos retardos de primer orden en serie 115
4.2.8.*f* Dos sistemas de nivel conectados en serie 117
4.2.8.*g* Dos filtros R-C conectados en serie 120
4.2.8.*h* Bulbo de temperatura con vaina 121
4.2.8.*i* Tanque encamisado 124
4.2.8.*j* Dos tanques a presión en serie 127
4.2.9 Elemento tiempo muerto 127
4.2.10 Elemento adelanto-retardo 130
4.2.11 Elemento anticipativo 132
4.2.12 Controladores 136
4.2.12.*a* Proporcional (P) 136
Banda proporcional 137
Ganancia 138
Desviación permanente 138
Reajuste manual 138
Ecuación del controlador 143
4.2.12.*b* Integral (I) 144
Ecuación del controlador 144
Transmitancia operacional 146
4.2.12.*c* Proporcional-integral (PI) 147
Acción integral (Reset) 147
Velocidad de reajuste 147
Repeticiones por minuto 147
Tiempo integral 148
Ecuación del controlador 148
4.2.12.*d* Proporcional-derivativo (PD) 149
Acción derivativa (Rate) 149
Tiempo derivativo 150
Ecuación del controlador 150
4.2.12.*e* Proporcional-integral-derivativo (PID) 150
Ecuación del controlador 151
Transmitancia operacional 151
Ejecuciones especiales 153
Nota sobre la señal de error o desviación 155

5 Respuesta temporal de los componentes básicos 157

5.1 Sistemática de cálculo 157
5.1.1 Respuesta al impulso 158
5.1.2 Respuesta al escalón unitario 159
5.1.3 Respuesta a la rampa unitaria 160
5.2 Respuesta de un retardo de primer orden 160
5.2.1 Respuesta indicial 161
Práctica nº 5.1 167
Práctica nº 5.2 168
5.2.2 Respuesta impulsiva 169
Práctica nº 5.3 172
Práctica nº 5.4 173
5.2.3 Respuesta a la rampa 174
Práctica nº 5.5 177
5.3 Respuesta de un retardo de segundo orden 178
5.3.1 Respuesta indicial 179
Caso subamortiguado 179
Caso oscilatorio puro 182
Caso sobreamortiguado 183
Caso críticamente amortiguado 184
Práctica nº 5.6 185
Práctica nº 5.7 186
Práctica nº 5.8 186
5.3.2 Respuesta impulsiva 187
Caso subamortiguado 188
Caso oscilatorio puro 188
Caso sobreamortiguado 189
Caso críticamente amortiguado 189
Práctica nº 5.9 190
5.3.3 Respuesta a la rampa 190
Caso subamortiguado 191
Caso oscilatorio puro 195
Caso sobreamortiguado 195
Caso críticamente amortiguado 196
Práctica nº 5.10 196
5.4 Respuesta de un bloque tiempo muerto 197
Práctica nº 5.11 197
5.5 Respuesta de un bloque adelanto-retardo 198
5.5.1 Respuesta indicial 198
Caso adelanto 199
Caso retardo 199
Práctica nº 5.12 200
Práctica nº 5.13 201

5.5.2 Respuesta impulsiva 202
Práctica nº 5.14 202
5.5.3 Respuesta a la rampa 203
Práctica nº 5.15 205
5.6 Respuesta de un bloque anticipativo 206
5.6.1 Respuesta indicial 206
5.6.2 Respuesta impulsiva 206
5.6.3 Respuesta a la rampa 207
Práctica nº 5.16 208
5.7 Respuesta de un controlador P+D 208
5.7.1 Respuesta indicial 209
5.7.2 Respuesta a la rampa 210
Práctica nº 5.17 212
5.8 Respuesta de un controlador P+I 212
5.8.1 Respuesta indicial 213
Práctica nº 5.18 214
5.8.2 Respuesta a la rampa 215
Práctica nº 5.19 216
5.9 Respuesta de un controlador P+I+D 217
5.9.1 Respuesta indicial 218
5.9.2 Respuesta a la rampa 219
Práctica nº 5.20 220
5.10 Respuesta de un controlador integral 221
Nota sobre representación gráfica de impulsos 222

6 Respuesta frecuencial de los componentes básicos 223

6.1 Conceptos de base 223
6.1.1 El decibelio 224
6.1.2 La octava y la década 226
6.1.3 Las unidades dB/octava y dB/década 227
6.1.4 Números complejos y vectores 228
Números complejos conjugados 232
Operaciones con números complejos 233
6.1.5 Vectores giratorios (fasores). Ondas senoidales 237
6.2 Respuesta frecuencial 241
6.2.1 Obtención de la respuesta frecuencial 244
6.3 Tipos de representaciones gráficas 246
6.3.1 Diagrama de Bode 246
6.3.2 Diagrama de Nyquist 248
6.3.3 Diagrama de Black 249

6.4 Determinación de la respuesta frecuencial 250
6.4.1 Módulo K o constante K 250
6.4.2 Factores del tipo s 252
6.4.3 Factores del tipo $Ts+1$ 254
Práctica nº 6.1 263
6.4.4 Factores del tipo $T^2s^2+2\zeta Ts+1$ 265
Práctica nº 6.2 276
Práctica nº 6.3 278
Práctica nº 6.4 279
6.4.5 Factores del tipo e^{-Ts} 280
Práctica nº 6.5 281
6.4.6 Elemento adelanto-retardo 282
Práctica nº 6.6 286
Práctica nº 6.7 286
6.4.7 Elemento anticipativo 287
Práctica nº 6.8 289
6.4.8 Controlador P 290
6.4.9 Controlador P+D 290
Práctica nº 6.9 293
6.4.10 Controlador P+I 294
Práctica nº 6.10 296
6.4.11 Controlador P+I+D 297
Práctica nº 6.11 302
Práctica nº 6.12 303
Práctica nº 6.13 305
6.4.12 Controlador integral 306

7 Control automático en lazo cerrado 309

7.1 Realimentación 309
7.2 Concepto de estabilidad 309
7.3 Criterios de optimización 311
7.4 Respuesta frecuencial y estabilidad 316
7.5 Margen de ganancia y margen de fase. Estabilidad relativa 319
7.5.1 Margen de ganancia 320
7.5.2 Margen de fase 321
7.5.3 Estabilidad relativa 322
7.6 Interpretación gráfica de los márgenes de ganancia y de fase 322
7.6.1 Ejemplo de cálculo de los márgenes de ganancia y de fase 324

7.7 Criterios de estabilidad 326
7.7.1 Criterio de estabilidad de Nyquist 329
7.7.2 Criterio de estabilidad de Bode 330
7.7.3 Ampliación del criterio de estabilidad de Nyquist 330
7.8 Respuesta frecuencial en lazo cerrado 337
7.9 Manejo de las perturbaciones 342
7.10 Estrategias de control 347

8 Control en lazo cerrado simple 349

8.1 Aplicación 349
8.2 Diagrama de bloques 349
Práctica nº 8.1 351
8.3 Simulación y análisis de sistemas controlados 351
8.3.1 Respuesta generalizada de un lazo con perturbación 352
Generalización de las funciones de transferencia en lazo cerrado 356
8.3.2 Control proporcional de un proceso retardo de primer orden 357
Respuesta frente a cambios en el punto de consigna 358
Práctica nº 8.2 361
Respuesta frente a perturbaciones 365
Práctica nº 8.3 366
8.3.3 Control proporcional de un proceso formado por dos retardos de primer orden 367
Respuesta frente a cambios en el punto de consigna 368
Práctica nº 8.4 371
Respuesta frente a perturbaciones 373
Práctica nº 8.5 376
Práctica nº 8.6 377
8.3.4 Control proporcional de un proceso formado por tres retardos de primer orden 379
Práctica nº 8.7 382
8.3.5 Control en modo integral de un proceso formado por un retardo de primer orden 389
Práctica nº 8.8 391
8.3.6 Control proporcional-integral de un proceso formado por un retardo de primer orden 393
Práctica nº 8.9 394
8.3.7 Control proporcional-integral de un proceso formado por dos retardos de primer orden 395
Práctica nº 8.10 397
8.3.8 Control proporcional-integral de un proceso formado por tres retardos de primer orden 401
Práctica nº 8.11 403

8.3.9 Control proporcional-integral-derivativo de un proceso formado por dos retardos de primer orden 406
Práctica nº 8.12 409
8.4 Efecto de un retardo de tiempo en la medida 410
Práctica nº 8.13 414
8.5 Efecto de un tiempo muerto en un sistema 416
8.5.1 Efecto del tiempo muerto en la medida 416
Práctica nº 8.14 418
8.5.2 Efecto del tiempo muerto en el proceso 420
Práctica nº 8.15 421
8.5.3 Mejoras que aporta la acción derivativa 423
Práctica nº 8.16 424
Práctica nº 8.17 425
8.6 Efecto de las alinealidades en un sistema 426
Práctica nº 8.18 428

9 Controles complejos en lazo cerrado 433

9.1 Control en cascada 433
Práctica nº 9.1 441
Práctica nº 9.2 447
Práctica nº 9.3 474
9.1.1 Predicción de la desviación permanente 478
9.2 Control en adelanto 482
9.2.1 Ecuaciones del control en adelanto 484
Práctica nº 9.4 495
Práctica nº 9.5 503

Apéndices

A-1 Tabla de transformadas de Laplace 519

A-2 Escalado de procesos y normalización de variables para el ordenador 529

1 Introducción 529
2 Márgenes de operación 529

3 Normalización de variables 530
4 Escalado del tiempo 535
5 Resumen 537
6 Manejo de los parámetros *"Valor de base Be y Bs"* 539
7 Manejo del parámetro *"Elevac./Supres. de cero Z"* 549
8 Manejo del parámetro *"Valor de referencia R"* 552

A-3 Composición de la respuesta temporal de un sistema **555**

A-4 Regla de Mason
para el cálculo de la transmitancia
entre dos puntos de un sistema **565**

A-5 Bibliografía **575**

Anexo 1

Guía de manejo del programa **579**

1 Requisitos para uso del programa **579**

1.1 Se requiere 579
1.2 Notas sobre la resolución de pantalla 579

2 Instalación del programa **580**

2.1 Obtención del fichero para la instalación 580
2.2 Modos de instalación 580
2.2.1 Instalación manual 580
2.2.2 Instalación automática 580
2.3 Uso del programa 580

3 Arranque del programa **581**

4 Menú principal de Windows 582

Estructura de los menús 582

5 Descripción de las principales opciones 584

5.1 Análisis de componentes básicos 584
5.2 Simulación de lazos de control 584
5.3 Menús de opciones 584
5.3.1 Menú Frecuencial 585
• Diagrama Real 585
• Diagrama de Bode 585
• Diagrama de Nyquist 585
• Diagrama de Black 585
• Todos los diagramas 586
• Marcas de frecuencia 586
• Frecuencia crítica (resonancia) 586
• Frecuencia de cruce de ganancia 586
• Frecuencia de pico de resonancia 586
5.3.2 Menú Temporal 587
a) Para *Componentes básicos* 587
• Impulso 587
• Escalón 587
• Rampa 587
b) Para *Lazos de control* 587
• Escalón condiciones iniciales 588
• Rampas programadas 588
5.3.3 Menú Cambios 588
• Parámetros del componente 589
• Límites de las escalas de frecuencia 589
• Duración de la respuesta temporal 589
• Constantes (*Componentes básicos*) 589
• Programación de las rampas (*Lazos de control*) 589
• Modos (*Lazos de control*) 590
a) *Modo del lazo en la respuesta frecuencial* 590
b) *Modo de presentación de la respuesta temporal* 591
• Frecuencia de muestreo (*Lazos de control*) 592
5.3.4 Menú Miscelán 593
• Borrar pantalla 593
• Vista anterior 593
• Ver Diagrama de bloques 593
• Ver parámetros de los bloques activos (*Lazos de c.*) 594
• Hacer nulos los bloques (*Lazos de control*) 594

5.4 Otros menús 594
5.4.1 Menú Archivo 595
• Imprimir 595
• Preferencias 595
5.4.2 Menú Menú general 596
5.4.3 Menús especiales 596
• Cambios > Color de fondo 596
• Miscelán > Calculador ABACUS 596
• Miscelán > Calculadora de Windows 597
• Miscelán > Preferencias de trabajo 597
5.4.4 Menú Información 597
5.4.5 Menús redundantes 597
5.4.6 Otras opciones en la ejecución de una *Respuesta temporal* 598

6 Control de errores **599**

7 Ficheros del programa **600**

7.1 Ficheros generados en la instalación 600
7.2 Ficheros generados por el usuario 600

8 Misceláneos.
Peculiaridades de un programa de simulación **601**

8.1 Generalidades 601
8.2 Tiempo muerto virtual oculto en el sistema 602
8.3 El problema de las variables discontinuas 603

¡PRECAUCIÓN! 604

Nota:

El fichero conteniendo exclusivamente la **Guía de manejo del programa**, en los formatos Word y PDF, puede descargarse en la dirección:

https://www.alfredoroca.com/index.php#guia_prog

1

INTRODUCCIÓN

1.1 Concepto de sistema

Un *sistema* es un conjunto de elementos, interrelacionados entre sí, los cuales se caracterizan por poseer unos parámetros inherentes que los definen, y por mostrar unas condiciones físicas asociadas, susceptibles de evolucionar con el tiempo.

Los parámetros característicos, específicos de cada elemento, son considerados normalmente constantes e invariables con el tiempo y se les denomina *parámetros del sistema*.

Las condiciones físicas de cada componente, cambiantes con el tiempo, determinan el estado del sistema en todo momento, y se expresan mediante las denominadas *variables del sistema*. Sus magnitudes y su evolución vienen regidas por leyes específicas, en función del tiempo, de la configuración de los componentes y de los parámetros de los mismos.

1.2 Concepto de bloque

En Teoría de control, cada uno de los componentes elementales o básicos en que puede descomponerse un sistema, constituye un *bloque*. Asimismo, un conjunto de bloques contiguos puede reagruparse formando un único bloque.

Un bloque puede representarse gráficamente por un rectángulo, con una flecha de entrada y otra de salida, las cuales significarán las señales de entrada y salida, respectivamente, a dicho bloque (fig. 1.1).

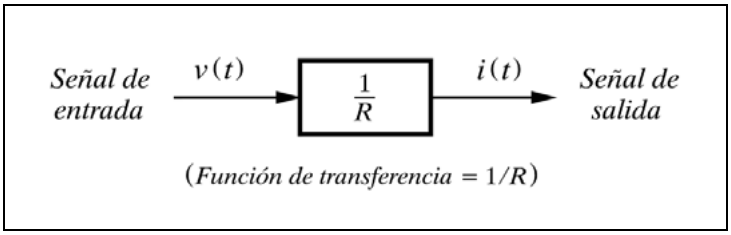


Fig. 1.1 Representación gráfica de un bloque

La *señal de entrada* corresponderá a una variable física, o *variable de entrada*, la cual será convertida o manipulada por el bloque, proporcionando o generando, como resultado, una *señal de salida*, es decir, la *variable de salida*.

La forma como se realiza esta conversión depende de las características específicas del bloque, y será representada por una ecuación matemática, denominada *función de transferencia*, que podrá ser inscrita en el rectángulo.

La entrada es la causa, la excitación, la acción o el estímulo que actúan sobre el bloque; mientras que la salida es el efecto, la respuesta, la reacción o la consecuencia de aquella entrada sobre el bloque representado por la función de transferencia.

1.3 Diagrama de bloques

La representación gráfica del conjunto de bloques que componen un sistema formará el *diagrama de bloques*. Los bloques se unen mediante líneas, que con sus flechas señalan la dirección del flujo de información o señales que circulan a lo largo del sistema (fig. 1.3, pág. 7).

La adición algebraica o comparación de señales se representará por un pequeño círculo o sumatorio, y se anotará junto a cada señal de entrada el signo con el que se halle operando.

Un diagrama de bloques es una forma convencional de representar gráficamente las interrelaciones entre las variables significativas del sistema, así como las características (parámetros) de los componentes que lo forman.

1.4 Función de transferencia o transmitancia

Toda variable que evoluciona con el tiempo siguiendo una determinada ley, podrá ser representada por una ecuación matemática en función de una serie de *parámetros* y de la variable *tiempo*; es decir, por una *función temporal*.

La expresión o ecuación matemática que, en un bloque, relaciona la variable de salida con la de entrada, se denomina *función de transferencia* o también *transmitancia* del bloque. Ésta será, por tanto, el cociente entre la función temporal de la salida y la de la entrada. La transmitancia no es más que un modelo matemático representativo del comportamiento dinámico de un componente, frente a una señal de entrada.

Un sencillo ejemplo de función de transferencia puede ser la de un bloque constituido por una resistencia eléctrica (resistor). Podemos definir como variable de entrada la tensión en bornes de este resistor, y como variable de salida la intensidad que circulará por el mismo.

Escribiremos

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

en donde la notación (t) significa que las variables que la contienen son temporales, es decir, que varían con el tiempo. Vemos que R, la resistencia eléctrica del elemento, no es una función temporal, pues, en efecto, no es una variable sino un parámetro constante en el tiempo. Este parámetro define precisamente el componente en cuestión y, por tanto, su comportamiento o respuesta frente a determinada entrada.

La función de transferencia del bloque será, según se ha dicho, la razón entre las funciones de entrada y salida. Llamando $G(t)$ a esta función, se tendrá

$$G(t) = \frac{i(t)}{v(t)} = \frac{1}{R}$$

es decir, la inversa de la resistencia o, lo que es lo mismo, la conductancia del resistor.

Veamos ahora cómo se aplica, de un modo general, el conocimiento de la transmitancia de un bloque para calcular la salida, dada una determinada entrada.

La salida (respuesta), será el resultado de multiplicar la transmitancia por la entrada (excitación), esto es,

$$i(t) = G(t)\ v(t)$$

Supongamos que la tensión de entrada obedece a una función del tipo

$$v(t) = A \operatorname{sen} \omega t$$

entonces

$$i(t) = \frac{1}{R} A \operatorname{sen} \omega t$$

Es preciso aclarar que la definición que se ha dado de transmitancia, basada en la relación de funciones temporales, sólo es práctica en caso de relaciones sencillas, como la que hemos visto en el ejemplo. Cuando las señales de entrada y salida están relacionadas por una ecuación íntegrodiferencial, es poco práctico tratar de establecer la función de transmitancia del modo indicado, y el rigor matemático nos obligaría a definiciones complejas y operaciones engorrosas, fuera del alcance de este libro, y, sobre todo, carentes de interés. Porque, como se verá en el capítulo siguiente, al estudiar la transformada de Laplace, estos conceptos se manejan de forma sorprendentemente sencilla. Lo que se ha pretendido hasta aquí es dar una visión anticipada del concepto transmitancia, dada su implicación con los diagramas de bloques.

Lo importante es percatarse de que un bloque puede significar cualquier elemento, componente, dispositivo o sistema, capaz de responder de una forma característica frente a una determinada excitación, y esta forma queda definida precisamente por la transmitancia del bloque. Asimismo, un conjunto de bloques concatenados puede reagruparse para formar un solo bloque, reuniendo entonces las características de cada uno de los bloques que lo forman.

Tomemos los siguientes dos ejemplos, bien dispares entre sí, basados en el esquema general:

Entrada ⇨ [*Bloque* (*Transmitancia*)] ⇨ *Salida*

- Una masa responde con una aceleración cuando se le aplica una fuerza. Aquí la entrada es la *fuerza*, la transmitancia dependerá de la *masa*, y la salida será la *aceleración* (o la velocidad, o la distancia recorrida), sin menoscabo de que la fuerza sea una variable cambiante con el tiempo.

- Un horno por el que circula un producto químico para su calentamiento, responderá con una temperatura de salida de este producto, en función del caudal de combustible que le sea suministrado. En este caso el *caudal de combustible* será la entrada, la *temperatura de producto* la salida, mientras que la transmitancia dependería del diseño del *horno*, de las características del producto, de las del combustible, etc.

Es cierto que en este último ejemplo la temperatura de salida podrá depender en la práctica de otros factores, cambiantes con el tiempo, tales como el caudal y la temperatura inicial del producto a calentar, la calidad del combustible, la temperatura ambiente, etc., pero ello será objeto de estudio detallado más adelante.

1.5 Sistema controlado

Un *proceso* es un conjunto de equipos o dispositivos, ya sean mecánicos, eléctricos, electrónicos, informáticos, neumáticos, hidráulicos, físicos, químicos, térmicos, o de cualquier otra índole, dispuestos de tal modo que en conjunto puedan realizar las operaciones necesarias con el fin de lograr un determinado objetivo.

Un ejemplo de proceso podría ser el horno para calentamiento, citado anteriormente, en el que el objetivo final sería conseguir mantener constante, en un valor prefijado, la temperatura del fluido circulante a la salida.

Pero para conseguir este objetivo es evidente que son precisos una serie de dispositivos adicionales, que de alguna manera lleven a cabo el control o regulación del proceso.

Estos dispositivos reciben el nombre de *sistema de control*.

Se denomina *sistema controlado* al conjunto formado por el proceso y el sistema de control.

En este ejemplo, será necesario, como mínimo, disponer de una información continua de la temperatura que se está controlando y de un dispositivo capaz de modificar o ajustar el caudal de aportación de combustible. Prácticamente hablando, de un termómetro situado en la tubería de salida de producto y de una válvula situada en la tubería de aporte de combustible al horno.

1.6 Control manual en lazo cerrado

Con el montaje descrito podríamos intentar ya efectuar un *control manual* del proceso, operando del siguiente modo:

Según que la temperatura indicada por el termómetro (TI) esté por debajo o por encima del valor deseado, abriríamos o cerraríamos, respectivamente (en mayor o menor medida, según la diferencia observada), la válvula de aportación de combustible, a efectos de corregir el caudal aportado. A continuación, esperaríamos hasta poder evaluar el efecto producido en el proceso por tal corrección, y obraríamos en consecuencia, ajustando nuevamente la apertura de la válvula, hasta conseguir establecer la temperatura en el valor deseado (fig. 1.2).

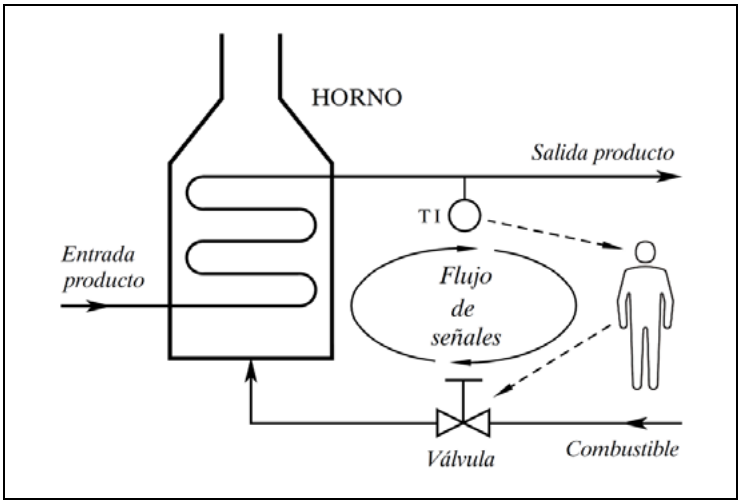
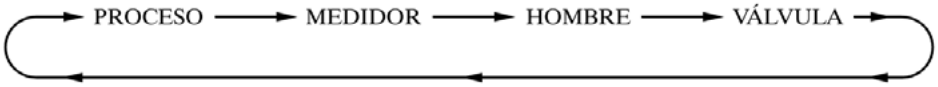


Fig. 1.2 Control manual en lazo cerrado

Vemos que el flujo de información que se efectúa en el control de este proceso, circula cerrándose sobre sí mismo a través del ser humano, siguiendo la secuencia cerrada siguiente:



sin que pueda decirse cuál de estos componentes está en primer lugar. Forman un anillo o *control en lazo cerrado*, sin principio ni fin.

1.7 Control automático en lazo cerrado

El modo de regulación manual descrito en el apartado anterior tiene, como es obvio, numerosos inconvenientes. El principal es que precisa la atención permanente humana, lo que hace que sea costoso. Otros inconvenientes, en general, derivados del ya citado, son que es lento, inseguro y poco preciso. Es de destacar el riesgo que pueda comportar una eventual distracción humana, por ejemplo, por fatiga.

La *regulación* o *control automático en lazo cerrado* consiste en sustituir la acción del elemento humano por un dispositivo llamado *controlador* o *regulador*, el cual gobierna el *elemento final de regulación*, normalmente una *válvula de control*, a efectos de corregir la *variable manipulada* de entrada al proceso.

El conjunto que forman los componentes que llevarán a cabo el control automático de un proceso se llama *sistema de control automático.*

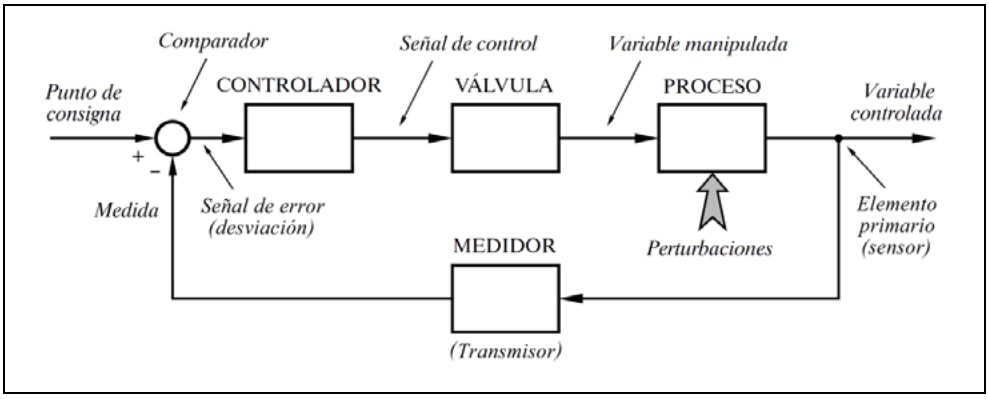


Fig. 1.3 Disposición básica de un proceso controlado automáticamente

La figura 1.3 muestra un diagrama de bloques de la disposición básica de los componentes que forman un proceso con control automático en lazo cerrado. Obsérvese que el flujo de señales se cierra sobre sí mismo, y que el sistema tiene como señal de entrada el *punto de consigna* (también llamado *valor deseado* o *set point* en inglés) y como señal de salida la *variable controlada*.

El dispositivo *comparador* entre las señales de consigna y medida, generador de la *señal de error* o *desviación*, suele formar parte del controlador.

1.8 Cambios de carga y perturbaciones

El controlador actúa continuamente para corregir los efectos de desajuste que producen en la regulación los cambios inevitables a los que el proceso está sometido. Estos cambios pueden ser de tres categorías, perfectamente diferenciadas, a saber:

a) Cambios en valor deseado de la variable controlada. Suelen ser llamados cambios *del punto de consigna* (*valor deseado*).

b) Cambios debidos a exigencias o condiciones específicas del proceso que, sin afectar al punto de consigna, modifican alguna de sus variables principales; es decir, son alteraciones en el flujo de energía (o material) de entrada o salida del proceso, relacionadas directamente con el mismo. Son los llamados *cambios de carga.*

c) Cambios producidos por alteraciones ajenas a las exigencias del proceso y, en muchos casos, de origen externo al mismo. Este tipo de cambios son denominados *perturbaciones.* No obstante, cualquiera de los tres casos puede ser denominado, genéricamente, con esta misma expresión.

Los de la primera categoría no merecen apenas comentario; son debidas a necesidades específicas de operación, al precisarse un cambio en el valor de la variable controlada.

En nuestro ejemplo del horno, pertenecería a la segunda categoría un cambio en el caudal del producto circulante. Es evidente que un aumento en la demanda de dicho caudal tenderá a producir, en principio, un enfriamiento que será mostrado por el medidor de temperatura instalado a la salida del horno. Es un caso claro de cambio de carga del sistema.

A la tercera categoría pertenecerían, por ejemplo, un cambio en la presión o en la calidad del combustible, o un cambio en la temperatura ambiente. Serían perturbaciones al proceso.

La distinción entre la segunda y la tercera categoría no siempre es evidente y puede ser muy sutil. Por ejemplo, una alteración en la temperatura de entrada del producto será del tipo cambio de carga, si las condiciones normales del proceso son las de caudal constante y temperatura de entrada variable, que es precisamente la que se quiere controlar a la salida. Por el contrario, si las condiciones normales de operación son de caudal variable y temperatura de entrada constante, entonces la alteración de esta temperatura corresponderá a una perturbación. No obstante, no es tan importante la distinción en sí, sino más bien su evaluación, debido a que, en cualquier caso, produce efectos perniciosos sobre la controlabilidad y comportamiento del proceso, por lo que puede ser necesario, en algunos casos, un diseño especial del sistema de control que evite o minimice estos efectos.

1.9 Realimentación

Los cambios citados en el apartado anterior, acontecen constantemente, en mayor o menor grado, causando, según se ha dicho, alteraciones en la variable controlada, como consecuencia de los desequilibrios producidos en los balances energéticos, másicos, químicos, dinámicos, etc.

En el control automático en lazo cerrado, las diferentes etapas de que se compone una acción correctora pueden enumerarse como sigue:

a) Medición de la *variable controlada* y transmisión de la *señal de medida* al *controlador*. Esta misión es llevada a cabo por el *transmisor*, el cual incluye o tiene asociado el *elemento primario* o *sensor* del proceso.

b) Comparación entre el valor del *punto de consigna* prefijado (*valor deseado* o *set point*) y la *señal de medida*, efectuando la diferencia entre ambos para establecer la denominada *señal de error* o *desviación*. La lleva a cabo el dispositivo *comparador*, y suele estar contenido en el propio controlador.

c) Partiendo de la *señal de error*, el *controlador* elabora su *señal de salida* o señal *de control*, de acuerdo con determinado algoritmo o ecuación. El controlador analiza la señal de error, teniendo en cuenta su *signo*, *magnitud*, *duración* y *tendencia* o velocidad de cambio.

d) La señal de salida del controlador es conducida al *elemento final de control* o *regulación*, por lo general una *válvula de control*, que efectuará la correspondiente corrección en la *variable manipulada* de entrada al proceso.

e) Reacción del *proceso*, con la consiguiente modificación del valor de la *variable controlada*, acercándose o igualando al *punto de consigna*.

f) Nueva señal de medida, según la etapa *a)*, con lo que se cierra el circuito.

Cualquier perturbación que se introduzca en algún punto del circuito (lo que sucede principalmente en el proceso), acabará afectando a la variable controlada y, por tanto, será detectada por el medidor (transmisor), entrando en la secuencia de corrección.

Esta secuencia se ejecuta simultáneamente en todo el circuito y su acción es continua en el tiempo, tendiendo a restablecer las condiciones de regulación deseadas, esto es, a igualar la medida con la consigna, anulando la señal de error.

Es importante notar que en esta serie de acciones concatenadas, hay un flujo de señales que están circulando constantemente desde la salida del proceso hacia su entrada, a través del sistema de medida, del controlador y del elemento final de control (véase la figura 1.3). A este fenómeno de "circulación hacia atrás" del flujo de información y de acciones se le llama *realimentación*; es el denominado *feedback* en inglés. Los efectos de esta realimentación fluyen hacia delante, a través del controlador, de la válvula y del proceso, para así cerrar el circuito del flujo de señales, con lo que se establece un anillo o *lazo cerrado* de causas y efectos. Otras posibles denominaciones, menos usuales, son *retroalimentación* y *retroacción*.

1.10 Álgebra de bloques

Dada la importancia que tendrá en futuros capítulos el planteamiento de los sistemas de control mediante diagramas de bloques, a continuación estudiaremos las reglas que rigen la manipulación y transformación de estos diagramas.

Las reglas aquí indicadas son válidas siempre que se trate de elementos lineales. Si la transmitancia de un bloque no es lineal, es posible, en general, linealizar su función en el punto de trabajo, lo que resulta una buena aproximación a efectos de llevar a cabo cualquier análisis del sistema. Sin embargo, para ello habrá que tener en cuenta determinadas consideraciones que serán vistas más adelante.

Las variables se representarán con letras minúsculas, mientras que las mayúsculas significarán las transmitancias de los bloques.

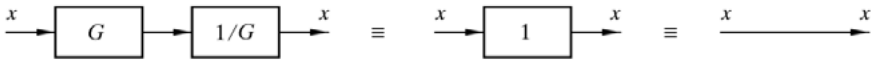
Debe recordarse que la transmitancia de un bloque es siempre la relación entre las señales de salida y entrada, por lo que si llamamos G a la transmitancia de un bloque, x a su entrada, e y a su salida, podrá escribirse

$$G = \frac{y}{x}\ ; \qquad y = Gx$$

En todo momento podrán aplicarse las leyes conmutativas, asociativas y distributivas, igualmente válidas en álgebra de bloques. De hecho, las reglas del Álgebra de bloques se basan en estas leyes, que podemos resumir así:

$$GF = FG$$
$$G + F = F + G$$
$$Gx + Gy = G(x + y)$$
$$Gx + Fx = (G + F)x$$
$$x - y = x + (-y) = x - (+y)$$

Por otra parte, un bloque con ganancia unitaria puede siempre ser suprimido, dejando solamente la línea de flujo. Así, por ejemplo, se podría efectuar la siguiente simplificación:

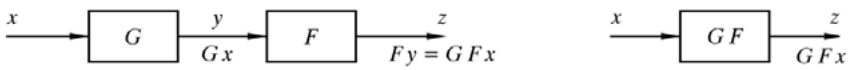


1.10.1 Reglas algebraicas

Las principales reglas algebraicas son las siguientes:

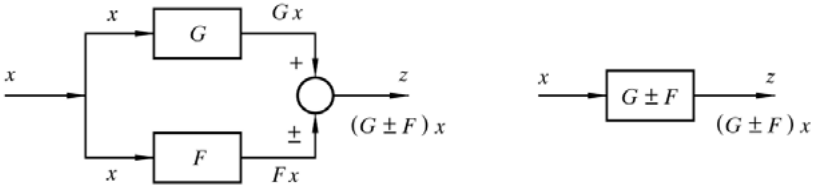
a) Bloques en serie. Pueden ser sustituidos por un único bloque, cuya transmitancia sea el producto de las transmitancias de cada bloque.

$$y = Gx\ ; \qquad z = Fy\ ; \qquad z = GFx$$



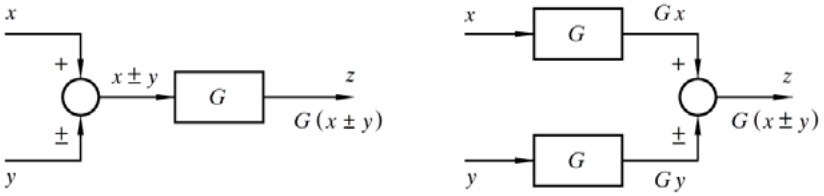
b) Bloques en paralelo. Su equivalente será un bloque con una transmitancia igual a la suma de transmitancias.

$$z = Gx \pm Fx = (G \pm F)\,x$$



c) Desplazamiento de un punto de suma detrás de un bloque.

$$z = (x \pm y)\,G = Gx \pm Gy$$

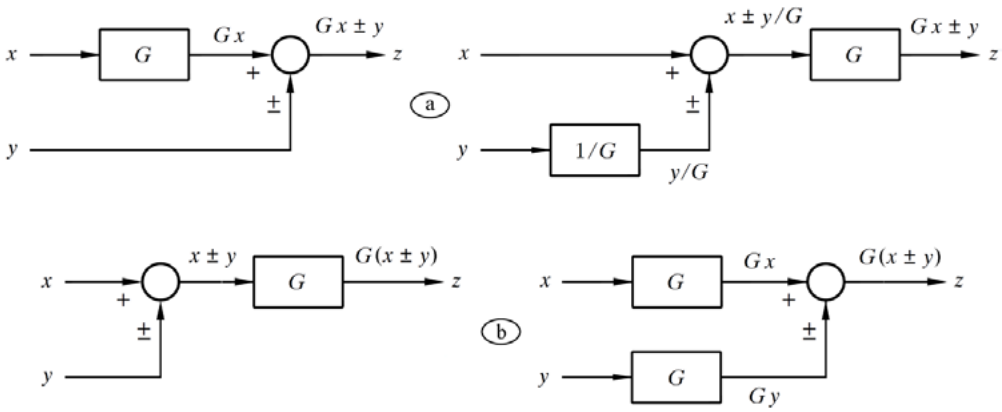


d) (a) Desplazamiento de un bloque detrás de un punto de suma.

$$z = Gx \pm y \;\; ; \qquad (x \pm y/G)\,G = Gx \pm y$$

(b) Desplazamiento de un bloque delante de un punto de suma.

$$z = G(x \pm y) \;\; ; \qquad Gx \pm Gy = G(x \pm y)$$

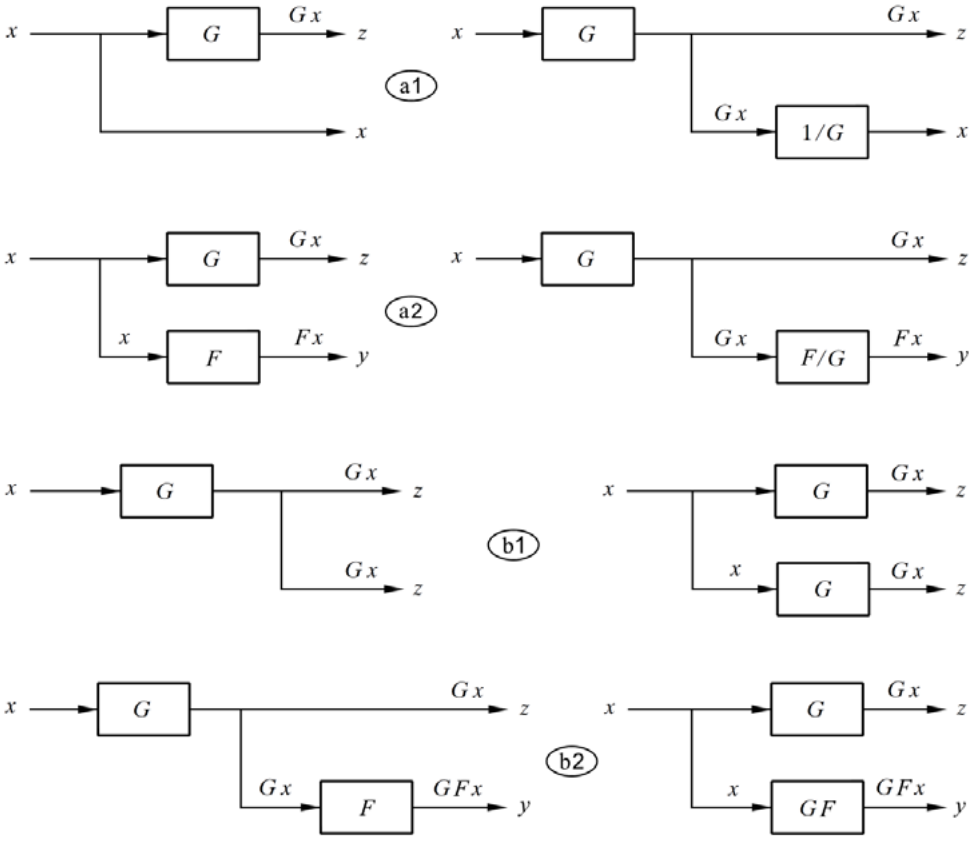


e) (a1/a2) Desplazamiento de un punto de derivación detrás de un bloque.

$$z = Gx \;;\qquad Gx\,(1/G) = x \;;\qquad y = Fx \;;\qquad Gx\,(F/G) = y$$

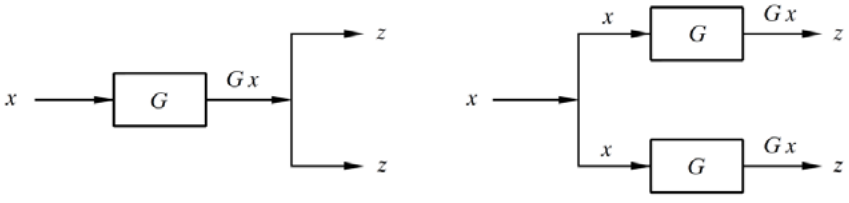
(b1/b2) Desplazamiento de un punto de derivación delante de un bloque.

$$z = Gx \;;\qquad y = GFx$$



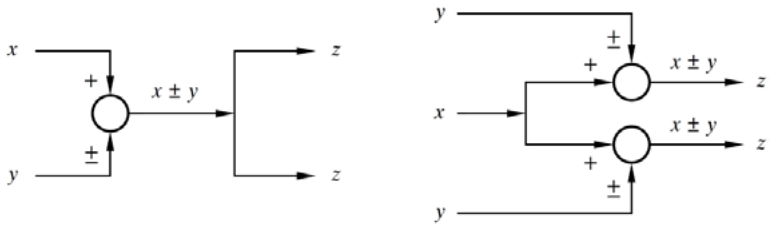
f) Desplazamiento de un bloque detrás de un punto de derivación.

$$z = Gx$$



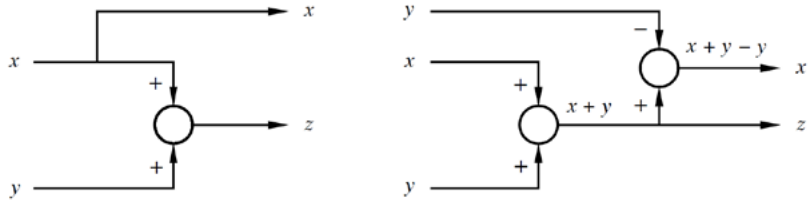
g) Desplazamiento de un punto de suma detrás de un punto de derivación.

$$z = x \pm y$$



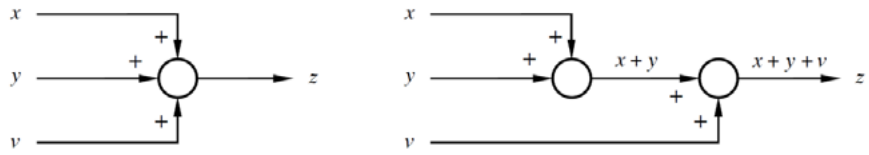
h) Desplazamiento de una derivación detrás de un punto de suma.

$$z = x + y \;\; ; \qquad x + y - y = x$$



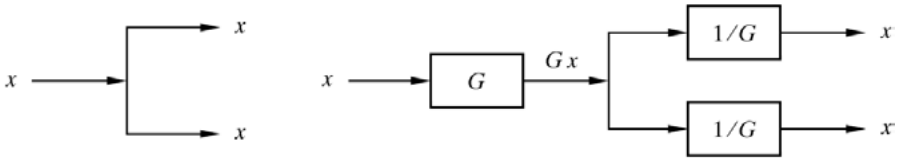
i) Desdoblamiento de puntos de suma de múltiples entradas.
Reagrupamiento de múltiples entradas en un solo punto de suma.

$$z = x + y + v$$



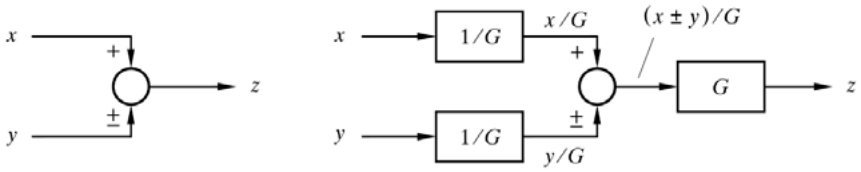
j) Inserción de un bloque delante de un punto de derivación.

$$x\, G \frac{1}{G} = x$$



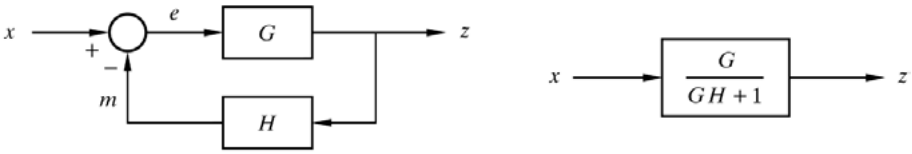
k) Inserción de un bloque detrás de un punto de suma.

$$z = x \pm y \ ; \qquad (x \pm y)/G(G) = x \pm y = z$$



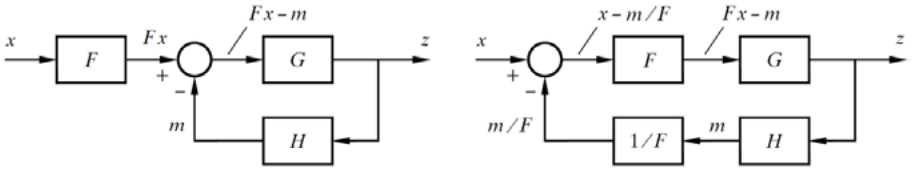
l) Transformación de un lazo sencillo de realimentación en un bloque único.

$$z = Ge \ ; \qquad e = x - m \ ; \qquad m = Hz \ ; \qquad z = x\frac{G}{GH+1}$$



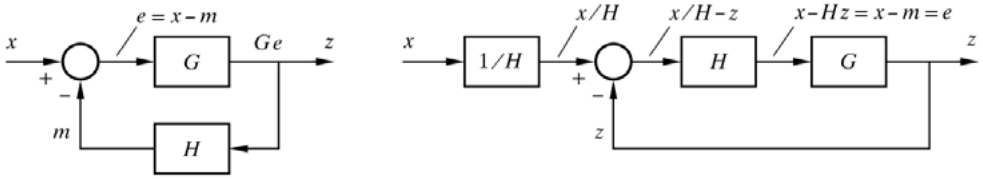
m) Traslación de un bloque dentro de un lazo de realimentación.

$$z = G(Fx - m) \ ; \qquad m = Hz \ ; \qquad z = x\frac{FG}{GH+1}$$



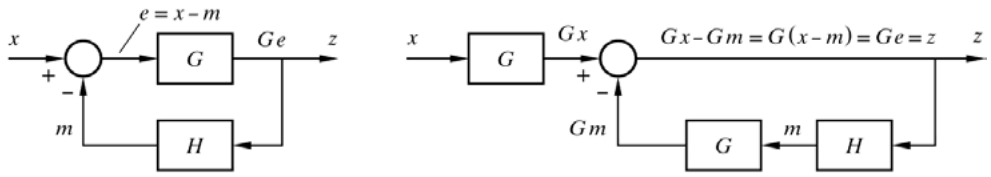
n) Extracción de un bloque de realimentación del interior de un lazo de realimentación.

$$e = x - m \ ; \qquad m = Hz \ ; \qquad z = Ge \ ; \qquad z = x\frac{G}{FH+1}$$



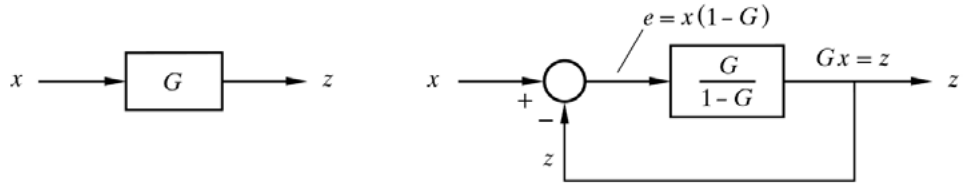
o) Extracción de un bloque de avance del interior de un lazo de realimentación.

$$e = x - m\ ; \qquad m = Hz\ ; \qquad z = Ge\ ; \qquad z = x\frac{G}{FH+1}$$



p) Transformación de un bloque en un lazo con realimentación unitaria.

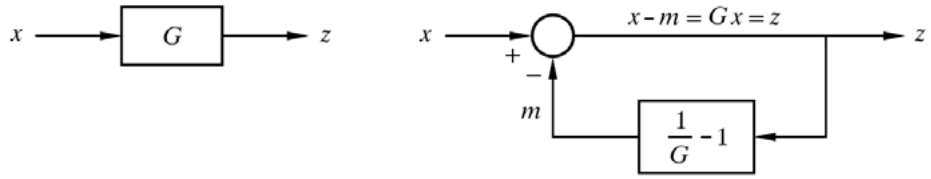
$$z = Gx\ ; \qquad e = x - z = x - Gx = x(1-G)$$



q) Transformación de un bloque en un lazo con avance unitario.

$$z = Gx\ ; \qquad m = z\left(\frac{1}{G} - 1\right)$$

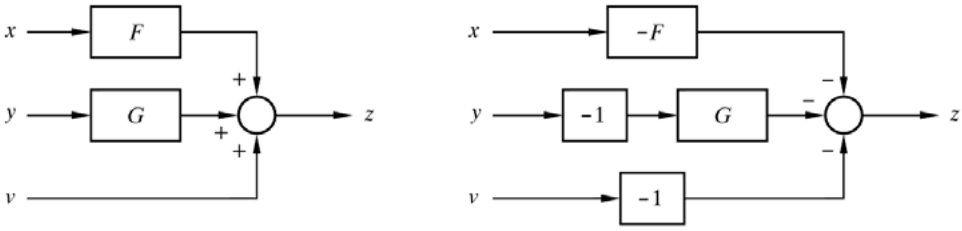
$$x - m = x - Gx\left(\frac{1}{G} - 1\right) = x - x + Gx = z$$



...

r) Cambio de signo en bloques y puntos de suma (tres ejemplos).

$$z = Fx + Gy + v = -(-F)x - (-1G)y - (-1)v$$



2

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

2.1 Qué es y para qué sirve

La *transformada de Laplace* es un artificio o *herramienta matemática* que provee un método sistemático y relativamente sencillo de resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Se trata de un *método operacional.*

Por mediación de este método, una ecuación diferencial es transformada en una ecuación algebraica, en la que la variable compleja *s* sustituye al *tiempo* como variable independiente. Resolviendo esta ecuación algebraica y llevando a cabo la *transformación inversa*, también llamada *antitransformada*, se obtiene la solución de la ecuación diferencial original. Ambas operaciones resultan ser sorprendentemente sencillas, según el lector tendrá ocasión de comprobar.

Puesto que existe una abundante bibliografía que trata a fondo este tema, nos limitaremos a dar una visión, o repaso, fundamentalmente práctico del mismo.

En Instrumentación, la ventaja de trabajar con las transformaciones de Laplace es que existen tablas de conversión muy extensas que cubren prácticamente la totalidad de las funciones que puedan surgir al analizar los sistemas controlados. En el apéndice 1 se da una tabla de pares de conversión de Laplace de las funciones más usuales en Instrumentación. La respuesta de un sistema puede, de este modo, ser obtenida fácilmente sin más que consultar dichas tablas y con un pequeño trabajo adicional algebraico.

Otra importante razón para utilizar la transformada de Laplace es que la respuesta de frecuencia de un sistema se obtiene directamente de la función de transferencia (transmitancia) del mismo.

Existen todavía otras ventajas: las entradas discontinuas y los tiempos muertos se manejan fácilmente. Se obtienen simultáneamente las componentes permanente y transitoria de la respuesta temporal (véase el apéndice 3). Las condiciones iniciales se manejan con facilidad.

En general, las expresiones

$$£\left[f(t)\right] = F(s)\ ; \qquad £^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$$

significan que $F(s)$ es la función *transformada de Laplace* de la función temporal $f(t)$, donde el símbolo £ es el operador que denota la *transformación*; mientras que $£^{-1}$ es el símbolo de la *transformación inversa* (también llamada *antitransformada*), por lo que la expresión $£^{-1}[F(s)]$ denota la transformación inversa de $F(s)$, la cual equivale a $f(t)$.

La función de transferencia o transmitancia de un sistema puede ahora ser expresada utilizando la transformada de Laplace, y se denomina *función de transferencia operacional* o *transmitancia operacional*, del mismo modo que se hizo con funciones temporales; solamente que ahora se obtendrá como la razón *algebraica* entre la función transformada de la salida y la función transformada de la entrada. En el apartado 2.3 se desarrolla este concepto.

2.2 Propiedades y teoremas de la transformada de Laplace

Existen una serie de propiedades de las transformadas de Laplace, algunas de ellas enunciadas como teoremas, las cuales son de gran utilidad para la resolución de ecuaciones, así como para operar con diagramas de bloques, especialmente si se conjugan con las reglas del Álgebra de bloques, vistas en el apartado 1.10.1 (pág. 10).

En los siguientes enunciados se asumirá que

$$£\left[f(t)\right] = F(s)$$

y, por lo tanto

$$£^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$$

2.2.1 Enumeración de las propiedades y teoremas

1. Linealidad

Si K es una constante, entonces

$$£\left[K\,f(t)\right] = K\,£\left[f(t)\right] = K\,F(s)$$

La laplaciana del producto de una constante por una función temporal es igual al producto de la constante por la transformada de la función.

2. Superposición

$$£\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = £\left[f_1(t)\right] \pm £\left[f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$£^{-1}\left[F_1(s) \pm F_2(s)\right] = £^{-1}\left[F_1(s)\right] \pm £^{-1}\left[F_2(s)\right] = f_1(t) \pm f_2(t)$$

La transformada de la suma de dos funciones temporales es igual a la suma de las transformadas de las funciones.

La antitransformada de la suma de dos funciones laplacianas es la suma de las transformadas inversas de dichas funciones.

3. Multiplicación por *t*. Derivación compleja

Llamada también *multiplicación potencial.*

$$£\left[t\,f(t)\right] = -\frac{d}{ds}F(s) = -F'(s)$$

La transformada del producto del *tiempo* por una función temporal equivale a la derivada de la función transformada con signo cambiado.

En general, para n entero se tiene

$$£\left[t^n\,f(t)\right] = (-1)^n\,\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n\,F^{(n)}(s)$$

donde $F^{(n)}(s)$ es la n-ésima derivada de $F(s)$.

4. División por *t*. Integración compleja

$$£\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

La transformada de una función dividida por el *tiempo* equivale a la integración respecto a s en la función transformada.

5. Traslación en el tiempo o *tiempo muerto*

Si a es un número real positivo, que significa un *tiempo*, entonces

$$£\big[f(t-a)\big] = e^{-as}F(s)$$

La transformada de una función temporal trasladada en la dirección positiva del tiempo, en una magnitud a, es igual a la transformada de la función multiplicada por la exponencial e^{-as}.

De aquí que un bloque del tipo *tiempo muerto* se represente por la función de transferencia e^{-as}.

Se asume que para $t < a$, entonces $f(t-a) = 0$, es decir, que la función que realmente se transforma habría que escribirla como $u(t-a)\,f(t-a)$. El producto por la función escalón unitario, desplazado en $t = a$, anula cualquier valor de la función previo a este tiempo.

6. Cambio de escala de tiempos

Si a es una constante real positiva

$$£\big[f(a\,t)\big] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

o también

$$£\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a\,F(a\,s)$$

Esta propiedad es muy útil cuando se desea normalizar la escala de tiempos a efectos de comparar distintos sistemas, pero con funciones matemáticas equivalentes. Por ejemplo, un circuito electrónico y un dispositivo mecá-

nico con propiedades (formulación matemática) análogas, el primero de ellos operando en la escala de milisegundos, mientras que el mecánico en la de los segundos. Otro ejemplo sería el tratamiento de modelos a escala.

7. Amortiguación

Es el llamado *teorema de traslación compleja* o *traslación en el campo s*.

$$£\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a)$$

La multiplicación de una función temporal por la función *extinción exponencial* o *amortiguación*, e^{-at}, tiene por efecto reemplazar la variable s por $(s+a)$ en la función transformada.

8. Teorema de la derivación real

$$£\left[f'(t)\right] = £\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s\,F(s) - f(0+)$$

El término $f(0+)$ es el valor de la función $f(t)$ evaluada en $t=0$, pero teniendo en cuenta que cuando la función tiene una discontinuidad en este punto (por ejemplo, un escalón), debe tomarse el valor de la función en el lado positivo del tiempo. Este valor corresponde a las *condiciones iniciales* del sistema.

La transformada de la segunda derivada es

$$£\left[f''(t)\right] = s^2 F(s) - s\,f(0+) - f'(0+)$$

en donde $f'(0+)$ es el valor de la primera derivada de $f(t)$ evaluada en el instante $t=0$, en el lado positivo del tiempo, que corresponde igualmente a las condiciones iniciales del sistema.

La transformada de la derivada n-ésima de una función es

$$£\left[f^{(n)}(t)\right] = £\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} \frac{d}{dt} f(0+) -$$

$$- s^{n-3} \frac{d^2}{dt^2} f(0+) - \ldots - s \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} f(0+) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0+)$$

o, en forma más compacta

$$£\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f^{(2)}(0) - \ldots$$

$$\ldots - s^{n-i} f^{(i-1)}(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

en donde son contemplados los valores de la función y de sus sucesivas derivadas para $t=0$, evaluados en el lado positivo del tiempo, y que, otra vez más, corresponden a las *condiciones iniciales* del sistema.

9. Teorema de la integración real

$$£\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0+)}{s}$$

donde $f^{(-1)}(0+)$ es la integral de $f(t)dt$ calculada en $t=0$, es decir, la constante de integración o condición inicial.

La transformada de la integral de orden n será

$$£\left[f^{(-n)}(t)\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s^n} + \frac{f^{(-2)}(0)}{s^{n-1}} + \ \ldots\ + \frac{f^{(-n)}(0)}{s}$$

10. Teorema del valor final

Si $f(t)$ tiende a un valor definido cuando $t \to \infty$, entonces

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Este teorema establece que el valor de $f(t)$ en régimen permanente o estado estacionario (tiempo infinito o, prácticamente, tiempos grandes) es igual al producto $sF(s)$ en la proximidad de $s=0$.

Nótese que este teorema no puede aplicarse a funciones tales como las de tipo senoidal, que carecen de límite para $t \to \infty$.

11. Teorema del valor inicial

$$f(0+) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

Este teorema permite calcular el valor de $f(t)$ para $t=0$, en el lado positivo del tiempo, directamente de la función transformada.

Las propiedades descritas por este teorema, juntamente con las del *teorema del valor final*, son de gran utilidad porque permiten predecir ciertos aspectos fundamentales de la respuesta del sistema (cálculo del valor de arranque y del valor en estado estacionario, respectivamente), sin necesidad de calcular la transformada inversa de la solución. Por otra parte, facilitan un medio para verificar que la solución obtenida en el dominio temporal (la antitransformada) ha sido "muy probablemente" bien calculada.

12. Función periódica

Toda función periódica satisface la condición $f(t+nT)=f(t)$, donde n es un número entero positivo y T el periodo.

Si se representa a la función del primer periodo aislado por $\theta(t)$, el cual queda definido entre los tiempos 0 y T, y si, por otra parte, se conoce la transformada de esta función, esto es

$$£\left[\theta(t)\right] = \Phi(s)$$

entonces

$$F(s) = £\left[f(t)\right] = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}\,\theta(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\,\Phi(s)$$

2.2.2 Aplicación del teorema de la derivación real

Las funciones laplacianas del tipo fracción impropia

$$F(s) = \frac{s^n}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

en las que el numerador y el denominador son del mismo grado, no suelen estar comprendidas en las tablas de pares de transformadas de Laplace. La solución temporal de este tipo de expresiones tiene la peculiaridad de incluir siempre un impulso en $t = 0$.

Sin embargo, es fácil resolverlas aplicando el *teorema de la derivación real*, visto más atrás.

Este teorema establece que si

$$£\left[f(t)\right] = F(s)$$

entonces la transformada de la derivada de la función es

$$£\left[f'(t)\right] = s\,F(s) - f(0+)$$

y de aquí podemos escribir

$$s\,F(s) = £\left[f'(t)\right] + f(0+)$$

Tomando la antitransformada de cada miembro de esta igualdad tenemos

$$£^{-1}\left[s\,F(s)\right] = £^{-1}\left[£\left[f'(t)\right]\right] + £^{-1}\left[f(0+)\right]$$

pero como la antitransformada de la transformada de una función es ella misma, es decir,

$$£^{-1}\left[£\left[f'(t)\right]\right] = f'(t)$$

queda finalmente una importante identidad, valiosa por su aplicación práctica:

$$£^{-1}\left[s\,F(s)\right] = f'(t) + £^{-1}\left[f(0+)\right]$$

en donde el último término, $£^{-1}[f(0+)]$, una vez hecha la transformación, será un impulso de magnitud $f(0+)$, es decir, del valor que tiene la función $f(t)$ para $t = 0$ en el lado positivo del tiempo. Recuérdese que $£^{-1}[A] = A\delta(t)$. La función $f(t)$ será normalmente una función auxiliar en el proceso de cálculo.

Ello nos sirve para hallar la antitransformada de las funciones del tipo fracción impropia, que se indicaban más atrás, según los siguientes dos ejemplos:

- Supongamos que queremos hallar

$$y(t) = £^{-1}\left[\frac{s^2}{s^2 + \omega^2}\right]$$

La técnica consiste en seguir los siguientes pasos:

a) Descomponer la expresión dentro del corchete en dos factores, de tal manera que el primero de ellos sea la variable s, y el segundo sea, obviamente, el resultado de dividir la expresión por s. Al segundo factor le llamamos $F(s)$. En nuestro ejemplo tendremos

$$y(t) = \pounds^{-1}\left[s \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = \pounds^{-1}\left[s\, F(s) \right]$$

b) Se define la función auxiliar $f(t) = \pounds^{-1}[F(s)]$, y la resolvemos directamente de las tablas, esto es,

$$f(t) = \pounds^{-1}\left[F(s) \right] = \pounds^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = \cos \omega t$$

c) Recordar la identidad, demostrada más atrás

$$\pounds^{-1}\left[s\, F(s) \right] = f'(t) + \pounds^{-1}\left[f(0+) \right]$$

d) Identificándola con el problema, resolver cada uno de los dos términos de la derecha, teniendo en cuenta que $f(t) = \cos \omega t$

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$\pounds^{-1}\left[f(0+) \right] = \pounds^{-1}\left[\cos 0 \right] = \pounds^{-1}\left[1 \right] = \delta(t)$$

e) Obtener, por simple sustitución, el resultado buscado

$$y = \pounds^{-1}\left[s\, F(s) \right] = f'(t) + \pounds^{-1}\left[f(0+) \right] = -\omega \operatorname{sen} \omega t + \delta(t)$$

el cual contiene un impulso unitario en $t = 0$.

- Otro ejemplo de sumo interés, que nos hará falta tener resuelto más adelante, es hallar la ecuación temporal

$$y(t) = \pounds^{-1}\left[\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \right]$$

Primeramente haremos la descomposición necesaria para tener dos fracciones con un solo término en el numerador (ver apdo. 2.2.3 en la pág. siguiente).

$$\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = s\, T_1 \frac{1}{T_2 s + 1} + \frac{1}{T_2 s + 1}$$

en donde la antitransformada del último término se halla directamente de las tablas, mientras que la del primero la resolveremos según se ha indicado más atrás, para lo cual definimos la función auxiliar $f(t) = \pounds^{-1}[F(s)]$:

$$f(t) = \pounds^{-1}\left[F(s)\right] = \pounds^{-1}\left[T_1 \frac{1}{T_2\, s + 1}\right] = \frac{T_1}{T_2} \mathrm{e}^{-t/T_2}$$

en la que haciendo $t = 0$, obtenemos $f(0+)$

$$f(0+) = \frac{T_1}{T_2}$$

y su antitransformada

$$\pounds^{-1}\left[f(0+)\right] = \pounds^{-1}\left[\frac{T_1}{T_2}\right] = \frac{T_1}{T_2}\delta(t)$$

Entonces, la solución del primer término resulta

$$\pounds^{-1}\left[s\,F(s)\right] = f'(t) + \pounds^{-1}\left[f(0+)\right] = \frac{d}{dt}\frac{T_1}{T_2}\mathrm{e}^{-t/T_2} + \frac{T_1}{T_2}\delta(t) =$$

$$= \frac{T_1}{T_2}\mathrm{e}^{-t/T_2}\,\frac{-1}{T_2} + \frac{T_1}{T_2}\delta(t) = -\frac{T_1}{T_2^2}\mathrm{e}^{-t/T_2} + \frac{T_1}{T_2}\delta(t)$$

Ahora, incorporando el último término, la solución buscada es

$$y = -\frac{T_1}{T_2^2}\mathrm{e}^{-t/T_2} + \frac{T_1}{T_2}\delta(t) + \frac{1}{T_2}\mathrm{e}^{-t/T_2} = \frac{1}{T_2}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)\mathrm{e}^{-t/T_2} + \frac{T_1}{T_2}\delta(t)$$

la cual contiene, en $t = 0$, un impulso de magnitud T_1 / T_2.

2.2.3 Antitransformada de fracciones impropias

No obstante lo visto en los dos ejemplos que se acaban de resolver, el lector debe saber que dispone de otros métodos para hallar la antitransformada de las funciones basadas en una fracción impropia, es decir, aquella en la que el grado del numerador es mayor o igual al del denominador. En estas fracciones es posible efectuar la división polinómica entre ambos (reducción), de tal manera que resultará un polinomio

en s, más una fracción propia (numerador con menor grado que el denominador, en este caso un grado menos), la cual podrá resolverse sin ninguna dificultad. Veamos un ejemplo. Tratemos de resolver

$$y(t) = £^{-1}\left[\frac{3s^2 + 13s + 6}{3s + 1}\right]$$

Al reducir la fracción, mediante una división polinómica entre numerador y denominador, resulta

$$y(t) = £^{-1}\left[s + 4 + \frac{2}{3s + 1}\right]$$

en donde las transformadas de cada término las obtenemos directamente de las tablas, y nos queda

$$y(t) = \delta'(t) + 4\,\delta(t) + \frac{2}{3}e^{-t/3}$$

2.3 Transmitancia operacional

Habíamos anticipado que la *transmitancia operacional* de un bloque o sistema es la *relación algebraica* entre la función transformada de la entrada y la función transformada de la salida.

Así, para un determinado bloque, escribiremos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

donde:

$G(s)$ = Función de transferencia o transmitancia operacional.
$X(s) = £[x(t)]$ = Transformada de la función de entrada.
$Y(s) = £[y(t)]$ = Transformada de la función de salida.

Por tanto, una vez conocidas la transmitancia de un bloque y su señal de entrada, la salida la calcularemos haciendo

$$y(t) = £^{-1}\left[Y(s)\right]$$

es decir,

$$y(t) = \pounds^{-1}\left[G(s)\ X(s)\right]$$

o bien

$$y(t) = \pounds^{-1}\left[G(s)\ \pounds\left[x(t)\right]\right]$$

Es preciso aclarar que la definición dada de transmitancia asume unas condiciones iniciales del bloque o sistema nulas, es decir, que para $t = 0$, todas sus variables, sus derivadas sucesivas y las constantes de integración valen cero. Veamos esto con más detalle, apoyándonos en un ejemplo.

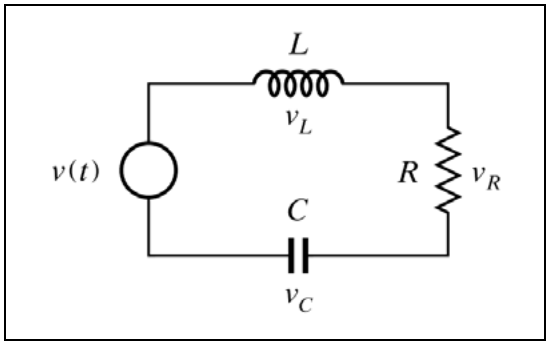


Fig. 2.1 Circuito R-L-C

Supongamos un circuito eléctrico R-L-C serie que tenga conectada una fuente de tensión $v(t)$ en sus extremos, tal como se muestra en la figura 2.1. Vamos a considerar como variable de entrada la tensión $v(t)$ y como variable de salida la intensidad $i(t)$ en el circuito. Para mayor comodidad, obviaremos aquí las notaciones (t) y (s). La ecuación diferencial que define su comportamiento es, por la segunda ley de Kirchoff

$$v = v_R + v_L + v_C$$

esto es,

$$v = R\,i + L\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

Tomemos ahora laplacianas en ambos miembros de la igualdad, para lo cual debemos transformar cada uno de los términos

$$£[v] = V$$

$$£[Ri] = RI$$

$$£\left[L\frac{di}{dt}\right] = LsI - Li(0+)$$

$$£\left[\frac{1}{C}\int i\,dt\right] = \frac{I}{Cs} + \frac{i^{(-1)}(0+)}{Cs}$$

en donde, según los teoremas de la derivación y de la integración, vistos anteriormente, se contemplan las siguientes condiciones iniciales:

$i(0+)$: Intensidad en $t = 0$, a la que llamaremos i_0.

$i^{(-1)}(0+)$: Valor de la integral en $t = 0$, es decir, la constante de integración, que en nuestro ejemplo sería la carga inicial del condensador a la que llamaremos q_0.

Estas proposiciones no deberían extrañar, puesto que nada impide que por causa de la propia fuente, entre otras, existieran una intensidad y una carga presentes, previas al momento que hemos llamado $t = 0$; sería lo que podríamos llamar un "resumen de la historia" del circuito (véase el apéndice 3).

Entonces podemos escribir la función transformada

$$V = RI + LsI - Li_0 + \frac{I}{Cs} + \frac{q_0}{Cs}$$

o, reagrupando términos

$$V = I\left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right) - Li_0 + \frac{q_0}{Cs}$$

y de aquí

$$I = \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}V + \frac{Li_0 - \frac{q_0}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}$$

$$I = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}V + \frac{LCsi_0 - q_0}{LCs^2 + RCs + 1}$$

en donde al resolver la antitransformada del miembro de la derecha, el primer término nos daría la parte de la respuesta debida a la fuente y el segundo la parte debida a las condiciones iniciales.

El coeficiente de la variable V en la ecuación anterior es la *función de transferencia operacional*, llamada también *función de transferencia* o *transmitancia operacional*, o, simplemente, *transmitancia.* Es evidente que no contempla las condiciones iniciales del sistema, las cuales vienen representadas, según se ha dicho, por el último término de la ecuación.

La *transmitancia* de este sistema la escribiríamos, por tanto, así

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{C\,s}{L\,C\,s^2 + R\,C\,s + 1}$$

Nótese que en el caso de que la ecuación temporal hubiera tenido algún término conteniendo la segunda derivada, tal como

$$A\,\frac{d^2 i}{dt^2}$$

al transformar aparecería un componente del tipo

$$A\,s^2 I - A\,s\,i(0+) - A\,i'(0+)$$

donde recordemos que $i'(0+)$ es el valor de la derivada de la variable i, para $t = 0$, a la que llamaríamos i'_0, y entonces el segundo y tercero de estos términos corresponderían a las condiciones iniciales.

2.4 Transformación de ecuaciones diferenciales

Existe una forma muy cómoda de efectuar la transformación de ecuaciones diferenciales, a efectos de obtener la transmitancia de un sistema.

Si $v(t)$ es una variable temporal, es lícito escribir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v; \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}v; \quad \ldots \quad \frac{d^nv}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}v$$

El procedimiento consiste en sustituir el cociente diferencial *d/dt*, que en realidad es un operador matemático aplicado a la variable $v(t)$, por el operador laplaciano s, y sustituir la variable en sí misma, $v(t)$, por su expresión transformada $V(s)$.

Lo que expresaremos así

$$v(t) \Rightarrow V(s)\,; \quad \frac{d}{dt} \Rightarrow s; \quad \frac{d^2}{dt^2} \Rightarrow s^2\,; \quad \ldots \quad \frac{d^n}{dt^n} \Rightarrow s^n$$

Y, por tanto, las sustituciones serán

$$v(t) \Rightarrow V(s)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) \Rightarrow sV(s)\,; \quad \frac{d^2}{dt^2}v(t) \Rightarrow s^2V(s)\,; \quad \ldots \quad \frac{d^n}{dt^n}v(t) \Rightarrow s^nV(s)$$

Asimismo, puesto que la función inversa de la diferenciación es la integración, la operación integral deberá ser sustituida por $1/s$, es decir,

$$\int dt \Rightarrow \frac{1}{s} \quad \text{y, por tanto,} \quad \int v(t)\,dt \Rightarrow \frac{1}{s}V(s)$$

Así, en nuestro ejemplo visto en el apartado anterior (fig. 2.1, pág. 28), que recordemos era

$$v = R\,i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

tendremos, obviando las notaciones (t) y (s), las siguientes transformaciones:

$$v \Rightarrow V$$
$$i \Rightarrow I$$
$$\frac{di}{dt} \Rightarrow sI$$
$$\int_0^t i\,dt \Rightarrow \frac{I}{s}$$

con lo que, sustituyéndolas en la ecuación temporal, obtendremos

$$V = R\,I + L\,s\,I + \frac{I}{C\,s} = I\left(R + L\,s + \frac{1}{C\,s}\right)$$

de donde la transmitancia será

$$G = \frac{I}{V} = \frac{1}{R + L\,s + \dfrac{1}{C\,s}} = \frac{C\,s}{L\,C\,s^2 + R\,C\,s + 1}$$

en coincidencia con la que se había obtenido.

Más adelante el lector verá que estas ecuaciones, y en particular su denominador, se simplifican notablemente al introducir los conceptos de *constante de tiempo* y *factor de amortiguación*, cuestiones que serán estudiadas extensamente.

Veamos otro ejemplo sobre el cálculo de la transmitancia del bloque representado en la figura 2.2, compuesto por una inductancia y un resistor.

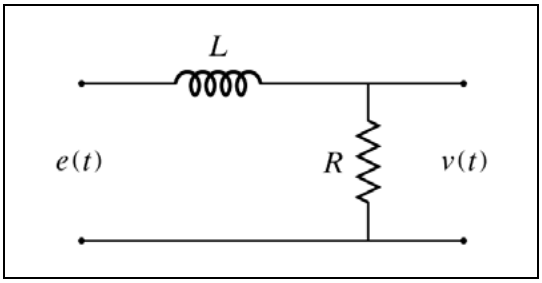


Fig. 2.2 Circuito R-L

Asumiremos que la tensión $e(t)$ es la entrada del bloque, y que la caída de tensión $v_R(t) = v(t)$ en la resistencia es la salida. Obviaremos la notación (t).

Aplicando la segunda ley de Kirchoff, resulta

$$e = v_L + v_R$$

Si i es la intensidad que circula por L y R

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

y puesto que $i = v/R$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

Por tanto, efectuando las debidas sustituciones, y teniendo en cuenta que $v = v_R$, la ecuación diferencial que relaciona las variables de entrada y salida será

$$e = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + v$$

Efectuando ahora las sustituciones de transformación, según el método indicado, obtendremos

$$E = \frac{L}{R} s V + V = V\left(\frac{L}{R} s + 1\right)$$

de donde

$$G = \frac{V}{E} = \frac{1}{\frac{L}{R} s + 1}$$

Y llamando T a la relación L/R, que más adelante veremos que es la *constante de tiempo*, se obtiene finalmente la transmitancia

$$G = \frac{1}{T s + 1}$$

2.5 Ejemplos de cálculo

Obténgase la salida $v(t)$ del circuito de la figura 2.2, visto últimamente, al ser excitado con señal de entrada $e(t)$, en forma de escalón, de amplitud A. Ello equivaldría, en la práctica, a conectar bruscamente en sus bornas de entrada una fuente de tensión continua de magnitud A.

Diremos

$$V(s) = E(s)\, G(s)$$

en donde

$$E(s) = £\left[e(t)\right]$$

y, por otra parte, en el apartado anterior acabamos de calcular que

$$G(s) = \frac{1}{T s + 1}$$

A continuación hallaremos la antitransformada

$$v(t) = £^{-1}\left[V(s)\right]$$

que nos proporcionará la respuesta buscada.

La función de la entrada es un escalón de amplitud A, esto es

$$e(t) = Au(t)$$

y, por tanto, de las tablas de transformadas, y sin olvidar que A es una constante, obtenemos

$$E(s) = \pounds\left[e(t)\right] = \pounds\left[Au(t)\right] = \frac{A}{s}$$

Prescindiendo de la notación (s), y sustituyendo en la primera ecuación

$$V = \frac{A}{s}\frac{1}{Ts+1} = A\frac{1}{s(Ts+1)}$$

Y de las tablas de conversión obtenemos la respuesta buscada

$$v = \pounds^{-1}\left[V\right] = A\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

que corresponde a una función exponencial creciente, de amplitud A, según vamos a demostrar.

Primeramente calculemos el valor de esta función para tiempo cero y para tiempo infinito.

Para $t=0$ $\qquad v(0) = A(1-1) = 0$

Para $t\to\infty$ $\qquad v(\infty) = A(1-0) = A$

Sin embargo, estos valores podían haber sido calculados sin necesidad de resolver la ecuación. Simplemente aplicando los teoremas sobre la transformación de Laplace, números 10 y 11 (teorema del valor final y teorema del valor inicial, págs. 22 y 23). Ello resulta muy útil en ocasiones, ya sea para verificar que la solución ha sido probablemente bien calculada, o bien porque, con frecuencia, sólo interesa conocer estos dos valores de la función, que corresponden al valor de arranque (para $t = 0+$) y al valor en estado estacionario (para $t\to\infty$) de la solución. Veamos estos cálculos aplicando los mencionados teoremas.

Para $t=0$

$$v(0) = \lim_{t\to 0} v(t) = \lim_{s\to\infty} sV(s) = \lim_{s\to\infty} A\frac{s}{s(Ts+1)} = 0$$

Para $t \to \infty$

$$v(\infty) = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} sV(s) = \lim_{s\to 0} A\frac{s}{s(Ts+1)} = A$$

que coinciden con los calculados anteriormente.

2.5.1 Cálculo con condiciones iniciales

El lector podrá preguntarse cómo se contemplaría el hecho de que el circuito estuviera sometido a unas condiciones iniciales, no nulas, tal como sucedería si hubiera estado conectado permanentemente a una fuente de tensión continua de magnitud A_0 y, repentinamente, ésta aumentara en escalón hasta alcanzar un valor A. Es evidente que en estas condiciones, antes de producirse el escalón se tendría una intensidad en el circuito y, en consecuencia, una tensión en la salida.

Es fácil calcular estos valores iniciales, asumiendo que el circuito se encuentra en estado estacionario, lo que se desprende del anunciado anterior, cuando se ha dicho "conectado permanentemente". La totalidad de la tensión de la fuente A_0 podrá medirse en bornas de la resistencia y, por tanto,

$$v_0 = A_0$$

Ahora debemos reconsiderar la transformación laplaciana de la ecuación temporal de equilibrio

$$e = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + v$$

tomando la transformada de cada término, pero teniendo en cuenta la existencia de condiciones iniciales.

En general hay que atenerse a lo indicado en los teoremas de la derivación real y de la integración real, vistos en el apartado 2.2 de este mismo capítulo (págs. 21 y 22), en lo referente a condiciones iniciales.

Entonces se tiene

$$E = \frac{L}{R}sV - \frac{L}{R}v(0+) + V$$

y puesto que