MPSI
MP

Bertrand Beaufils
Patrick Beynet
Stéphanie Calmettes
Thierry Finot
Michel Goumi
Ivan Gozard
Marie-Laure Kaiser-Lavielle
Nicolas Nguyen
Lionel Vidal

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

FORMULAIRE

NOUVEAUX PROGRAMMES

MATHS
PHYSIQUE
CHIMIE
SII

3e édition

Les 2 années
en 1 clin d'œil

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Formulaire MPSI/MP

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE-CHIMIE

SII

3e édition

ouvrage coordonné par

Bertrand HAUCHECORNE

Bertrand BEAUFILS
professeur au lycée Paul Valéry (Paris)

Patrick BEYNET
professeur au lycée Rouvière (Toulon)

Stéphanie CALMETTES
professeure au lycée Saint-Denis (Annonay)

Thierry FINOT
professeur au lycée Lavoisier (Paris)

Michel GOUMI
professeur honoraire au lycée E. Perrier (Tulle)

Ivan GOZARD
professeur au lycée Carnot (Dijon)

Marie-Laure KAISER-LAVIELLE
professeure au lycée de la Cité des Sciences Vertes (Toulouse-Auzeville)

Nicolas NGUYEN
professeur au lycée F. Rabelais (Saint-Brieuc)

Lionel VIDAL
professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-070356
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La réussite en prépa nécessite une acquisition solide des connaissances et une capacité à les mettre en réseau ; elle exige par ailleurs d'en avoir une vision claire et de savoir les mobiliser rapidement. Les ouvrages de la collection *Prépas Sciences Maths*, *Physique-Chimie* et *Sciences industrielles de l'ingénieur (SII)*, répondent au premier besoin. Ce formulaire vous permettra de satisfaire à la deuxième exigence.

C'est en effet un mémento synthétisant le cours de manière claire et concise : définitions, lois, théorèmes, propriétés et schémas à connaître. Les formules principales sont mises en valeur par un encadrement sur une trame grisée. L'ouvrage couvre les deux années et permet de les visualiser en un clin d'œil.

Aucune démonstration n'est faite, aucun exemple n'est proposé, car l'unique objectif est de retrouver le plus vite possible la définition ou la propriété cherchée.

Ce formulaire est structuré en deux grandes parties correspondant aux programmes respectifs des deux années. Dans chacune d'elles, vous trouverez successivement les mathématiques, la physique-chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur (SII). Les notions sont présentées par thèmes dans l'ordre approximatif du programme, pour faciliter la recherche.

Un index très précis en fin d'ouvrage permettent de trouver rapidement et sans hésitation la notion cherchée. Ainsi, ce formulaire sera le compagnon idéal pour la préparation des colles, la résolution des exercices et des problèmes mais surtout pour accompagner les révisions avant les concours.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Avant-propos ... III

Première année

Mathématiques ... **3**
Raisonnement et vocabulaire ensembliste ... 3
Techniques fondamentales en algèbre et analyse ... 7
Analyse 1 ... 21
Algèbre générale ... 34
Algèbre linéaire ... 42
Analyse 2 ... 58
Dénombrement et probabilités ... 71

Physique-Chimie ... **79**
Optique géométrique ... 79
Électrocinétique ... 85
Physique des ondes ... 99
Mécanique ... 104
Thermodynamique ... 123
Électromagnétisme ... 134
Transformations de la matière ... 141
Structure de la matière et propriétés ... 146
Transformations en solution aqueuse ... 154

Sciences industrielles de l'ingénieur (SII) ... **165**
Ingénierie système ... 165
Algorithmique ... 174
Automatique ... 177
Mécanique ... 189

Deuxième année

Mathématiques ... **207**
Algèbre ... 207
Topologie ... 223
Analyse ... 233
Probabilités ... 256
Calcul différentiel ... 267

Physique-Chimie ... **279**
Mécanique ... 279
Électromagnétisme ... 284
Physique des ondes ... 297
Optique ondulatoire ... 308
Thermodynamique ... 318
Électronique ... 328
Mécanique quantique ... 330
Thermodynamique chimique ... 335
Oxydo-réduction ... 342

Sciences industrielles de l'ingénieur (SII) ... **351**
Mécanique ... 351
Automatique : SLCI ... 362
Algorithmique ... 370

Index

Mathématiques ... 379
Physique-Chimie ... 387
SII ... 397

Première année

Quelques-uns ont donné le nom de mathématiques
à la magie parce que par le moyen des mathématiques,
on fait des choses si surprenantes
que le peuple croit qu'il y a magie.

Antoine Furetière

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Logique

Assertions

*Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{V, F\}$. Une assertion $P : E \to \{V, F\}$ est aussi appelée une **propriété des éléments** de E.*

Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

P	Q	$non\ P$	$P\ ou\ Q$	$P\ et\ Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

P, Q et R trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.

- $P\ ou\ Q \iff Q\ ou\ P$
- $P\ et\ Q \iff Q\ et\ P$

La conjonction et la disjonction sont associatives.

- $(P\ ou\ Q)\ ou\ R \iff P\ ou\ (Q\ ou\ R)$
- $(P\ et\ Q)\ et\ R \iff P\ et\ (Q\ et\ R)$

La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.

- $P\ et\ (Q\ ou\ R) \iff (P\ et\ Q)\ ou\ (P\ et\ R)$
- $P\ ou\ (Q\ et\ R) \iff (P\ ou\ R)\ et\ (P\ ou\ R)$

- $P \iff non(nonP)$
- $non(P \text{ ou } Q) \iff (non\ P \text{ et } non\ Q)$
- $non(P \text{ et } Q) \iff (non\ P \text{ ou } non\ Q)$

Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :

- ***Existentiel :*** *il existe un élément de E vérifiant P. On note $\exists x \in E \;\; P(x)$.*
- ***Universel :*** *tous les éléments de E vérifient P. On note $\forall x \in E \;\; P(x)$.*

S'il existe un unique élément de E vérifiant P, on note $\exists!\ x \in E,\ P(x)$.

Règles de calcul pour les quantificateurs

- $non\ \big(\exists x \in E;\ \ P(x)\big) \iff \big(\forall x \in E,\ \ non\ P(x)\big)$
- $non\ \big(\forall x \in E,\ \ P(x)\big) \iff \big(\exists x \in E;\ \ non\ P(x)\big)$
- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \iff \forall y \in F,\ \forall x \in E\ , P(x,y)$
- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \iff \exists y \in F,\ \exists x \in E\ , P(x,y)$

Stratégies pour une implication

- $P \Rightarrow Q$
- $(non\ P)\ ou\ Q$
- $non\ Q \Rightarrow non\ P$
- $non\big[P \text{ et } non\ Q\big]$.

Ces équivalences sont utiles pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ou par l'absurde.

Théorème de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n) \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geqslant n_0),\ \big(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big) \end{array} \right.$$

Théorème de récurrence double

$$\forall n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n) \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ (\forall n \geqslant n_0),\ \big(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)\big) \end{array} \right.$$

Théorème de récurrence forte

$$\forall n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n) \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geqslant n_0),\ \big(\mathcal{P}(n_0) \textbf{ et } \cdots \textbf{ et } \mathcal{P}(n)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{array} \right.$$

Ensembles

Parties d'un ensemble

E un ensemble, A, B, C des parties de E. On dit que

- *A est **inclus** dans B ($A \subset B$) si tout élément de A appartient à B.*
- *A et B sont **égaux** ($A = B$), lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.*

Opérations élémentaires sur les parties

- $A \cup B = \{x \in E |\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$ *est la* ***réunion*** *de* A *et* B.
- $A \cap B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \in B\}$ *est l'****intersection*** *de* A *et* B.
- $\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$, *est le* ***complémentaire*** *de* A *dans* E.
- $A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$ *est la* ***différence*** *de* A *et* B.

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Lois de Morgan

Fonction indicatrice d'une partie

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} .$$

$\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}$ *est la fonction indicatrice de* A

- $\mathbf{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \, \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A \, (1 - \mathbf{1}_B)$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \, \mathbf{1}_B$

Produit cartésien de deux ensembles

Soit E, F deux ensembles, le ***produit cartésien*** *de E et F est l'ensemble défini par* $E \times F = \{(x,y)\ ;\ x \in E, y \in F\}$. *L'égalité de deux couples* (x,y) *et* (x',y') *est définie par* $(x,y) = (x',y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Applications

Application injective, surjective

Une application $f : E \to F$ *est dite :*

- ***injective*** *si* $\big(\forall (x,x') \in E \times E\big),\ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$;
- ***surjective*** *si* $(\forall y \in F),\ (\exists x \in E)\ ;\ \ y = f(x)$.

Composée d'applications et injectivité, surjectivité

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Application bijective

*Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, i.e.* $(\forall y \in F),\ (\exists!\, x \in E)\ ;\ \ y = f(x)$.

Application réciproque d'une bijection

*Soit $f : E \to F$ une **bijection**. On définit une application $f^{-1} : F \to E$, appelée **application réciproque** de f, par*

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$f \text{ bijective} \iff \exists g : F \to E \ \begin{matrix} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{matrix}$$

En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f.

Composée de bijections

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

$$f \text{ et } g \text{ bijectives} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective}$$

et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E,\ B \subset F$.

- *L'**image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par*
$$f(A) = \{f(x)\,;\ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\}.$$
- *L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par*
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Relations

*Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une propriété vraie pour certains couples (x,y) de E et fausse pour les autres. Lorsque le couple (x,y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$.*

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que :

- *$\mathcal{R}$ est **réflexive** si, pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$;*
- *$\mathcal{R}$ est **symétrique** si, pour tous $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;*
- *$\mathcal{R}$ est **transitive** si, pour tous $x, y, z \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$;*
- *$\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si, pour tous $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.*

*On appelle **relation d'équivalence** sur un ensemble toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.*

*Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et x un élément de E. On appelle **classe d'équivalence** de x pour la relation $\mathcal{R}$ et on note $Cl(x)$ le sous-ensemble de E constitués des éléments en relation avec x. Autrement dit, $Cl(x) = \{y \in E,\ y\mathcal{R}x\}$.*

*On appelle **relation d'ordre** sur un ensemble toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.*

Techniques fondamentales en algèbre et analyse

Compléments de calcul algébrique

Sommes et produits finis

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On note

$$S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} x_k \text{ la somme des } x_k$$

$$P_n = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{k\in\{0,\ldots,n\}} x_k \text{ le produit des } x_k.$$

Les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition se généralisent aux sommes et produits finis.

$$\sum_{k=0}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{n+1} - a_0$$

Somme télescopique
$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

La somme des n premiers (resp. carrés, cubes d') entiers est donnée par :

$$\bullet \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \bullet \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \bullet \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Coefficients binomiaux

Le produit des n premiers entiers est la **factorielle de** n. On note $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.
On convient que $0! = 1$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Coefficients du binôme où $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$.

Les coefficients du binôme sont des entiers naturels qui vérifient les propriétés suvantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (a, b) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Identité géométrique

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k \, b^{n-k}$$

Avec $b = 1$, on obtient la somme des premiers termes de la suite géométrique de raison a.

Systèmes d'équations linéaires

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système de n équations linéaires à p inconnues (S) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

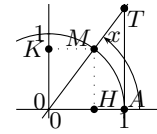
- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j, $\quad (L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbb{K}^\star$, $\quad (L_i \leftarrow \lambda_i \, L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre L_j $(i \neq j)$, $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

Trigonométrie circulaire

Le cercle trigonométrique

$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$

- $\cos(x) = \overline{OH}$, $\sin(x) = \overline{OK}$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Propriétés de symétrie

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\tan(2a) = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a + b) + \cos(a - b)\big]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a - b) - \cos(a + b)\big]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a + b) + \sin(a - b)\big]$
- $\cos^2 a = \frac{1}{2}\big[1 + \cos(2a)\big]$
- $\sin^2 a = \frac{1}{2}\big[1 - \cos(2a)\big]$

Formules de factorisation

- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

Nombres complexes

Notation algébrique des nombres complexes

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = x + iy$$

$x = \mathfrak{Re}\,(z)$ est la **partie réelle**
$y = \mathfrak{Im}\,(z)$ est la **partie imaginaire** de z.

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, z' \\ \mathfrak{Im}\, z = \mathfrak{Im}\, z' \end{cases}$$

z, z' sont deux nombres complexes.

- *Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est le **conjugué** de z.*
- *Le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le **module** de z.*

Nombres complexes de module 1

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ *est l'**exponentielle imaginaire (pure)** d'angle* θ.

- Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
- Pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ de réels, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$

Règle de calcul pour l'exponentielle imaginaire

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$ $\quad (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$

Formules d'Euler et de Moivre

- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\quad$ • $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ — **Formules d'Euler**

- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin n(\theta)$ — **Formules de Moivre**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

- $e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$
- $e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$

— **Factorisation de somme d'exponentielles**

Notation exponentielle d'un complexe non nul

$\forall z \in \mathbb{C}^\star,\ \exists(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R},\ z = \rho e^{i\theta}$

Forme exponentielle du nombre complexe non nul z.

Si $z \in \mathbb{C}^\star$ *s'écrit* $z = \rho e^{i\theta}$ *alors* ρ *est le **module** de* z *et* θ *est appelé un **argument** de* z. *On note* $\arg(z)$ *un argument quelconque de* z.

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi] \end{cases} \qquad (z, z') \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$$

Exponentielle d'un complexe quelconque

Soit $z = x + iy$ *un complexe présenté en notation algébrique. On définit*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right).$$

$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$ $\quad (z, z') \in \mathbb{C}^2$

Racines n-ièmes du nombre complexe 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *On note* $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

ω_n *est l'exponentielle imaginaire d'angle* $\dfrac{2\pi}{n}$.

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_n^k ; k \in \mathbb{Z}\} = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$$

$\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

$$1+\omega_n+\omega_n^2+\cdots+\omega_n^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^k=0$$

La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Racines n-ièmes d'un complexe

L'ensemble des n racines n-ièmes de $a\in\mathbb{C}^\star$ est :

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \{\zeta_0\,\omega_n^k;\ k\in\mathbb{Z}\}=\{\zeta_0,\ \zeta_0\,\omega_n,\ \zeta_0\,\omega_n^2,\ldots,\ \zeta_0\,\omega_n^{n-1}\}\\ &= \{\sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\arg a}{n}},\ \sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\arg a+2\pi}{n}},\ldots,\ \sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\arg a+2(n-1)\pi}{n}}\}\end{aligned}$$

où ζ_0 est une solution *particulière* de $z^n=a$, par exemple $\zeta_0=\sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\arg a}{n}}$.

Équations polynomiales de degré 2

$$az^2+bz+c=0\iff z=\frac{-b\pm\delta}{2a}$$

$(a,b,c)\in\mathbb{C}^\star\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, δ est l'une des racines carrées (complexes) de $\Delta=b^2-4ac$.

Système somme-produit

Soit $(\sigma,\rho)\in\mathbb{C}^2$. Alors le couple (z_1,z_2) est solution du système $\left\{\begin{array}{l} z_1+z_2=\sigma\\ z_1\times z_2=\rho\end{array}\right.$ si et seulement si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2-\sigma z+\rho=0$.

Interprétation géométrique des nombres complexes

Soit $\mathcal{R}=(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct.

- *Au point $M\binom{x}{y}_{\mathcal{R}}$, on associe son **affixe**, le nombre complexe $z=x+iy$.*
- *À $z=x+iy$, on associe son **image** dans le plan, le point $M\binom{x}{y}_{\mathcal{R}}$.*

- L'application $z\mapsto z+u$ correspond à la translation du vecteur d'affixe u.
- L'application $z\mapsto\bar{z}$ correspond à la réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
- L'application $z\mapsto az+b$, avec $a\neq 1$ correspond à la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega=\dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

Généralités sur les fonctions numériques

Symétries

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et $f:I\to\mathbb{R}$. On dit que f est

- ***paire** lorsque pour tout $x\in I,\ f(-x)=f(x)$;*
- ***impaire** lorsque pour tout $x\in I,\ f(-x)=-f(x)$.*

*Soit $T\in\mathbb{R}^{+\star}$, une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ est dite **périodique de période** T lorsque pour tout $x\in\mathbb{R}, x+T\in I$ et $f(x+T)=f(x)$.*

Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On dit que f est

- ***majorée*** *lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f \leqslant M$;*
- ***minorée*** *lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f \geqslant m$;*
- ***bornée*** *lorsque f est majorée et minorée.*

Fonctions monotones

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est

- ***croissante*** *sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$;*
- ***décroissante*** *sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$;*
- ***strictement croissante*** *sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;*
- ***strictement décroissante*** *sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.*

*Une fonction est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante sur I. Elle est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

Dérivée d'une fonction à valeurs réelles

*La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable** en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. En ce cas, on note $f'(a)$ ce réel.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intevalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- *On dit que f est dérivable dans I si elle est dérivable en tout point de I. On note $f' : I \to \mathbb{R}$ sa fonction dérivée.*
- *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans I si de plus $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue.*

Fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout réel $x \in I$, $f(x)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

où u et v sont deux fonctions réelles définies sur I.

Les fonctions u et v sont appelées parties réelle et imaginaire de f. On note $u = \mathfrak{Re}\, f$ et $v = \mathfrak{Im}\, f$.

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

*Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite **dérivable au point** $a \in I$ si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont. En ce cas $f'(a) = u'(a) + iv'(a)$ est appelé le nombre [1] dérivée de f en a.*

1. Complexe.

*Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite dérivable dans I (resp. de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I) si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont.*

Soit $\alpha \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $f : I \to \mathbb{C}$ est définie par $x \mapsto e^{\alpha(x)}$.

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \alpha'(x)e^{\alpha(x)}$$ f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans I.

Lien entre intégrales et primitives

Pour la commodité du lecteur, ce chapitre est regroupé avec les autres chapitres d'intégration, p.63.

Fonctions usuelles : définitions et propriétés

Fonctions logarithmes

$\ln$ *est l'unique primitive de* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}^{+\star}$ *s'annulant en* 1.

$\ln$ est donc dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on a donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$,

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$ **Règle de calcul**

*Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on appelle **logarithme de base a** la fonction $\log_a : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ par $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$.*

Fonctions exponentielles

La fonction $\ln$ *est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+\star}$ sur $\mathbb{R}$. Son application réciproque, notée* $\exp$ *est appelée fonction **exponentielle**. Il s'agit donc d'une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Elle vérifie pour tout couple (x, y) de réels :*

$$x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \exp(x) \iff y \in \mathbb{R}^{+\star}, \text{ et } x = \ln(y)$$

La fonction $\exp$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp(x)$. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$ **Règle de calcul**

*Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on appelle **exponentielle de base a** la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star}$ réciproque de $\log_a$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}$ on a $y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y)$.*

Fonctions puissances

*Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle **puissance d'exposant** α la fonction $p_\alpha : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ définie pour tout $x > 0$, par $p_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.*

p_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Règles de calcul

- $\ln\left(x^\alpha\right) = \alpha \ln(x)$
- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $x^\alpha \times y^\alpha = \left(x \times y\right)^\alpha$
- $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \exp(x)$. De même, si $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $\exp_a(x) = \exp(x \ln a) = a^x$.

Fonctions hyperboliques

Les fonctions ***cosinus***, ***sinus*** *et* ***tangente hyperboliques*** *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

- $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

On a les relations $e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$, $e^{-x} = \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$.

- $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, dérivable et $\forall x, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$.
- $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, dérivable et $\forall x, \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.
- $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, dérivable et $\forall x, \operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$.

Trigonométrie hyperbolique

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

Relations fondamentales de trigo hyperbolique

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1 \text{ et } 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$$

Les formules de trigonométrie hyperbolique se déduisent des formules de trigonométrie circulaire en changeant les signes des produits de deux sinus.

Fonctions circulaires

- cos est 2π-périodique, paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- sin est 2π-périodique, impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.
- tan est π-périodique, impaire dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ et
$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Trigonométrie circulaire

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

Relations fondamentales de trigo circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Les formules de trigonométrie circulaire sont rappelées à la page 8.

Fonctions circulaires réciproques

• *La fonction restreinte* $\sin_{|} : [-\pi/2;\pi/2] \to [-1;1]$ *est une bijection strictement croissante et continue. Son application réciproque* $\mathrm{Arcsin} : [-1;1] \to [-\pi/2;\pi/2]$ *vérifie, pour tout couple* (x,t) *de réels*

$$t \in [-\pi/2;\pi/2] \ et\ x = \sin(t) \iff x \in [-1,1] \ et\ t = \mathrm{Arcsin}\,(x)$$

La fonction Arcsin est strictement croissante et impaire. Elle est continue sur $[-1,1]$ et dérivable dans $]-1,1[$, et $\forall x \in]-1,1[, \mathrm{Arcsin}\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

• *La fonction restreinte* $\cos_{|} : [0;\pi] \to [-1;1]$ *est une bijection strictement décroissante et continue. Son application réciproque* $\mathrm{Arccos} : [-1;1] \to [0;\pi]$ *vérifie pour tout couple* (x,t) *de réels*

$$t \in [0,\pi] \ et\ x = \cos(t) \iff x \in [-1,1] \ et\ t = \mathrm{Arccos}\,(x)$$

La fonction Arccos est strictement décroissante. Elle est continue sur $[-1,1]$, dérivable dans $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{Arccos}\,'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\forall x \in [-1,1],\ \mathrm{Arcsin}\,(x) + \mathrm{Arccos}\,(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

• *La fonction restreinte* $\tan_{|} :]-\pi/2;\pi/2[\to \mathbb{R}$ *est une bijection strictement croissante et continue. Son application réciproque* $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\pi/2;\pi/2[$ *vérifie pour tout couple* (x,t) *de réels*

$$t \in]-\pi/2,\pi/2[\ et\ x = \tan(t) \iff x \in \mathbb{R} \ et\ t = \mathrm{Arctan}\,(x).$$

La fonction Arctan est strictement croissante et impaire. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}\,'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arctan}\,(1/x) = \pi/2$.

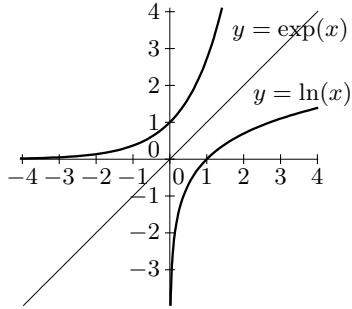
• $\forall x \in \mathbb{R}^{-\star},\ \mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arctan}\,(1/x) = -\pi/2$.

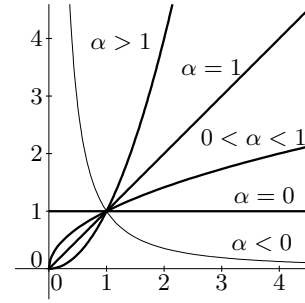
Nous devons plutôt nous fier
au calcul algébrique qu'à notre jugement.

Leonhard Euler

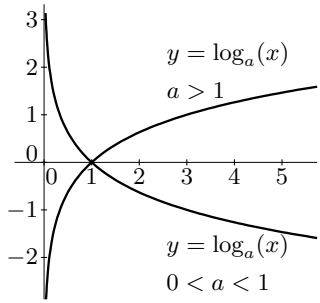
Fonctions usuelles : graphes

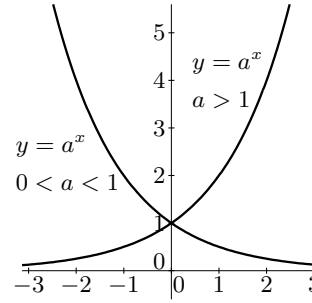
Fonctions ln, exp et puissances



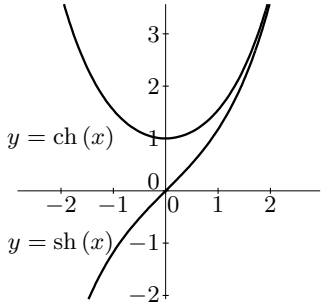


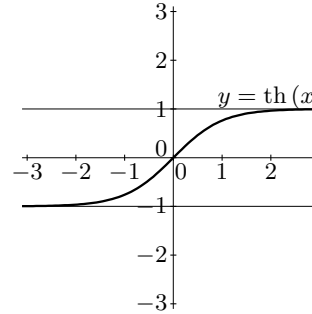
Fonctions logarithmes et exponentielles de base *a*



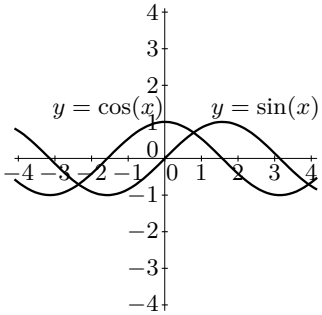


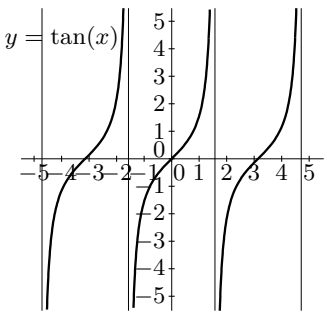
Fonctions hyperboliques directes



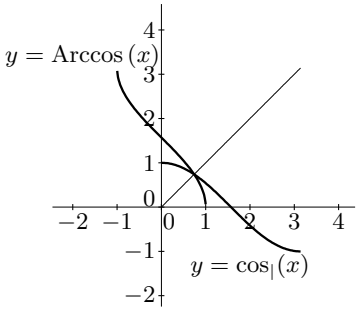


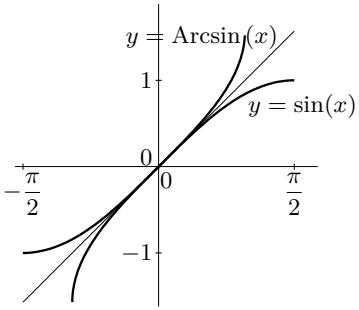
Fonctions circulaires directes



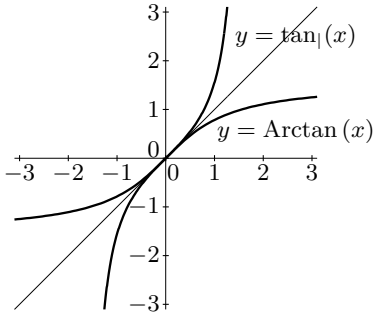


Fonctions Arccos et Arcsin





Fonction Tan et Arctan



Primitives et équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires d'ordre n

Soit $a_0, a_1, \dots, a_n, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considére les équations différentielles linéaires (EDL) :

$$\begin{array}{lrcl} (E_n) & y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y & = & b(t) \\ (H_n) & y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y & = & 0 \end{array}$$

Principe de superposition

Soit $f_1, f_2 : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

- f_1 est solution de $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b_1(t)$,
- f_2 est solution de $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b_2(t)$,

alors f_1+f_2 est solution de $y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_0(t)y = b_1(t)+b_2(t)$.

Les solutions de (E_n) sont les fonctions de la forme $f = f_0 + h$, où f_0 est une solution particulière de (E_n) et h est une solution quelconque de (H_n).

EDL d'ordre 1 coefficient continu

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues sur I. On note

- $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a.
- $c : I \to \mathbb{K}$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I.

On résout (E_1) $y' + a(t)y = b(t)$ et (H_1) $y' + a(t)y = 0$.

Résolution de l'équation homogène

Les solutions de (H_1) sont les fonctions définies sur I par $h(t) = Ce^{-A(t)}$, où $C \in \mathbb{K}$.

Méthode de la variation de la constante

La fonction $f_0 : I \to \mathbb{K}$ définie sur I par $f_0(t) = c(t)e^{-A(t)}$ est solution de (E_1).

Si $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, la fonction définie par $f(t) = \left[y_0 e^{A(t_0)} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}\, du\right] e^{-A(t)}$ est l'unique solution du **problème de Cauchy** $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $c : I \to \mathbb{K}$ continue. On note (EC) $r^2+ar+b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E_2) $y'' + ay' + by = c(t)$ et (H_2) $y'' + ay' + by = 0$. On résout (H_2) en distinguant deux cas ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On note Δ le discriminant de (EC). **Les solutions à valeurs complexes de** (H_2) sont les fonctions définies sur I par

- si $\Delta \neq 0$, $h(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$, où $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$;
- si $\Delta = 0$, $h(t) = (C_1 + C_2t)e^{r_0t}$, où $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$;

en notant (r_1, r_2) ou r_0, les racines distinctes ou confondues de (EC).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note Δ le discriminant de (EC). **Les solutions à valeurs réelles de** (H_2) sont les fonctions définies sur I par

- si $\Delta > 0$, $h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$;
- si $\Delta = 0$, $h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$;
- si $\Delta < 0$, $h(t) = e^{rt}\big[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\big]$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$;

en notant respectivement (r_1, r_2) les racines réelles distinctes, r_0 la racine réelle double, $r \pm i\omega$ les racines complexes et conjuguées de (EC).

En ce qui concerne l'équation complète (E_2), elle admet toujours des solutions. On trouve une **solution particulière** en imitant le second membre c :

- si $c(t) = P_m(t)$, (E_2) a une solution de la forme $Q_m(t)$ lorsque $b \neq 0$, de la forme $t\,Q_m(t)$ si $a \neq 0$ et $b = 0$, de la forme $t^2 Q_m(t)$ sinon ;
- si $c(t) = P_m(t)\, e^{\alpha t}$, (E_2) a une solution de la forme $Q_m(t)\, e^{\alpha t}$ si α n'est pas racine de (EC), de la forme $t\,Q_m(t)\, e^{\alpha t}$ si α est racine simple de (EC) et de la forme $t^2 Q_m(t)\, e^{\alpha t}$ sinon ;
- si $c(t) = P_m(t)\cos(\omega t)$ ou $c(t) = P_m(t)\sin(\omega t)$, une solution à valeurs réelles de (E_2) est obtenue en prenant la partie réelle (ou imaginaire) d'une solution de $(\tilde{E}_2)$ $y'' + ay' + by = P_m(t)\, e^{i\omega t}$;

en notant ici $P_m(t)$ et $Q_m(t)$ désignent des polynômes de degré m.

Le problème de Cauchy d'ordre 2

(S) $\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$

possède une unique solution.

$(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $c : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, $t_0 \in I$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$

Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer.

Victor Hugo

Fonction	**Primitives**	**Intervalle de validité**
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$I \subset \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbb{R}^{-\star}$ si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ $I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbb{R}^{-\star}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + C$	$I \subset \mathbb{R}^{+\star}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos x\rvert) + C$	$I \subset \mathcal{D}_{\tan}$
e^x	$e^x + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$\mathrm{sh}\,(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\,(x)$	$\mathrm{ch}\,(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\mathrm{th}\,(x)$	$\ln(\mathrm{ch}\,x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\,(x) + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\,(x) + C$	$I \subset]-1, 1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln(\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert) + C$	$I \subset]-\infty, -1[$ ou $I \subset]1, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$	$I \subset \mathbb{R}$

Analyse 1

Nombres réels et suites numériques

$\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné

La relation $\leqslant$ vérifie les propriétés suivantes :

- **réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$
- **antisymétrie** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow x = y$
- **transitivité** : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$.

*On dit que $\leqslant$ est une **relation d'ordre** dans $\mathbb{R}$.* De plus, cet ordre est total car

- **ordre total** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)$.

On note $x < y$ la relation $x \leqslant y \text{ et } x \neq y$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, x + t < y + t$ et $\forall t \in \mathbb{R}^{+\star}, x\,t < y\,t$.

Inégalités triangulaires

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x + y| \leqslant |x| + |y|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$

Parties majorées, minorées, bornées

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que :

- *x est un **majorant** de A si $\forall a \in A, a \leqslant x$;*
- *x est un **minorant** de A si $\forall a \in A, a \geqslant x$;*
- *x est le **plus grand élément** de A($\max(A)$) s'il est élément et majorant de A ;*
- *x est le **plus petit élément** de A ($\min(A)$) s'il est élément et minorant de A.*

- *A est **majorée** si elle a un majorant : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \leqslant M$.*
- *A est **minorée** si elle a un minorant : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \geqslant m$.*
- *A est **bornée** si elle est minorée et majorée : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, |a| \leqslant M$.*

On note $\mathrm{Maj}\,(A)$ et $\mathrm{Min}\,(A)$ les ensembles de majorants et de minorants de A.

Bornes supérieure, inférieure

- *S'il existe, le plus petit majorant de A est appelé la **borne supérieure** de A.*
- *S'il existe, le plus grand minorant de A est appelé la **borne inférieure** de A.*

Si ces bornes existent, on note $\sup A = \min \mathrm{Maj}\,(A)$ *et* $\inf A = \max \mathrm{Min}\,(A)$.

Propriétés des bornes supérieure et inférieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.
- A a une borne supérieure si A est majorée.
- A a une borne inférieure si A est minorée.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Caractérisation de la borne supérieure

$$\alpha = \sup A \iff \begin{array}{l} \forall a \in A,\ \alpha \geqslant a \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a \leqslant \alpha \end{array}$$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Caractérisation de la borne inférieure

$$\alpha = \inf A \iff \begin{array}{l} \forall a \in A,\ \alpha \leqslant a \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \alpha \leqslant a < \alpha + \varepsilon \end{array}$$

Conséquences de la propriété de la borne supérieure

*Une partie C de $\mathbb{R}$ est dite **convexe** si* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b) \in C^2 \Rightarrow [a,b] \subset C$.

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Propriété d'Archimède

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon > a$$

Partie entière d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, on le note $\lfloor x \rfloor$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

Densité des rationnels et des irrationnels

- $\exists r \in \mathbb{Q},\ x < r < y.$
- $\exists \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x < \xi < y.$

Suites réelles et ordre

*Une **suite de réels** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. L'image de n est notée plutôt u_n. L'ensemble des suites de réels est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

- *u est **croissante** si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$.
- *u est **strictement croissante** si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
- *u est décroissante (resp. strictement décroissante) si $-u$ est croissante (resp. strictement croissante).*
- *u est **minorée**, majorée ou bornée si l'ensemble $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est.*
- *Si u est majorée (resp. minorée), on note* $\sup u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, *resp.* $\inf u_n = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Limites de suites de réels

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

- u ***converge vers*** ℓ *si* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$.
- u ***diverge vers*** $+\infty$ *si* $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow (u_n \geqslant A)\big)$.
- u ***diverge vers*** $-\infty$ *si* $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow (u_n \leqslant A)\big)$.

On note ces relations $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
En outre, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* u_n *est strictement positif à partir d'un certain rang.* On note $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $(\ell, \ell') \in \bar{\mathbb{R}}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \bullet\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell' \end{array}\right) \Rightarrow \ell = \ell'$$

Unicité de la limite

Compatibilité limites et inégalités

$u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est dite* ***convergente*** *si elle converge vers un réel et divergente sinon.*
Soit u et v deux suites de réels convergentes.

- Si $\lim u_n < \lim v_n$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, u_n < v_n$.
- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

En particulier, toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^\star$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda \cdot u_n = \lambda.\ell$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \ell \times \ell'$
- Si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/u_n = 1/\ell$
- Si $\ell = 0^+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/u_n = +\infty$

pourvu que les opérations ci-dessus soient bien définies dans $\bar{\mathbb{R}}$.

$\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ ne sont pas définies.

Formes indéterminées

Limites des suites extraites

Soit u, v deux suites de réels. On dit que $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite extraite*** *de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Si u a pour limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u a pour limite ℓ.

Existence de limite par comparaison, encadrement

Soit u, v, w des suites de réels, ℓ un réel.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leqslant |u_n| \end{cases}$ alors v converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \end{cases}$ alors v converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant u_n \end{cases}$ alors v diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **monotone**. Alors

u est convergente $\iff$ u est bornée.

Lorsque u n'est pas monotone, l'implication $\Rightarrow$ subsiste.

- Soit u une suite **croissante** de nombres réels.
  - Si u est majorée, alors u est convergente et $\lim u_n = \sup_n u_n$.
  - Si u n'est pas majorée alors u est divergente vers $+\infty$: $\lim u_n = +\infty$.
- Soit u une suite **décroissante** de nombres réels.
  - Si u est minorée, alors u est convergente et $\lim u_n = \inf_n u_n$.
  - Si u n'est pas minorée alors u est divergente vers $-\infty$: $\lim u_n = -\infty$.

Convergence des suites adjacentes

*Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. Les suites u et v sont dites **adjacentes** si*

- *l'une est croissante et l'autre décroissante,*
- *$(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.*

Deux suites adjacentes u et v sont convergentes et ont même limite.

Si $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$ de limite commune ℓ, alors

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_p$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une **suite bornée** de nombres réels. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une application strictement croissante, telles que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{\varphi(k)} = \ell$.

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Traductions séquentielles

A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}};\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$

Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $q_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes de limite commune x. En conséquence, les ensembles $\mathbb{D}$ des nombres décimaux et $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.

Traduction séquentielle de la borne supérieure d'une partie non vide et majorée

Il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup(A)$.

Suites de référence

Suites géométriques

*Soit u la **suite géométrique** de raison q de premier terme u_0 : $u_n = u_0 q^n$.*

$$(u_n) \text{ est convergente } \iff |q| < 1 \text{ ou } q = 1.$$

La **suite des sommes partielles** (S_n) est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(S_n) est convergente $\iff |q| < 1$ et dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$.

Suites arithmético-géométriques

*Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $b \neq 0$. La suite u la suite donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ est une suite **arithmético-géométrique**.*

Soit r tel que $r = ar + b$. La suite $(v_n) = (u_n - r)$ est géométrique de raison a.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

*Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$. Une suite (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** (RL2).*

Soit u une suite RL2. On note Δ le discriminant de l'**équation caractéristique** (EC) :

$$r^2 - ar - b = 0$$

- Si $\Delta > 0$, (EC) a deux racines réelles distinctes, notées r_1, r_2.
$$\exists\,!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
- Si $\Delta = 0$, (EC) a une racine réelle double, notée r_0.
$$\exists\,!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_0^n + n\,\mu r_0^n$$
- Si $\Delta < 0$, (EC) a deux racines complexes conjuguées, notées $r = \rho e^{\pm i\theta}$.
$$\exists\,!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$$

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Étant donné une fonction $f : I \to I$, définie sur un intervalle I à valeurs dans ce même intervalle I, et $a \in I$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, unique telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

De plus, $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I.

- On suppose que $f - id : I \to \mathbb{R}$ est de signe constant sur I.

► Si $f - id$ est positive sur I, alors (u_n) est croissante.

► Si $f - id$ est négative sur I, alors (u_n) est décroissante.

• On suppose que f est monotone.

► Si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone.

► Si f est décroissante sur I alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

• On suppose que f est continue. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, alors ℓ est une extrémité ouverte de I ou bien une solution dans I de l'équation : $f(x) = x$.

• On suppose que f est lipschitzienne de constante $k \in]0,1[$, ℓ un point fixe de f. Alors (u_n) est convergente de limite ℓ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \ell\right| \leqslant k^n \left|u_0 - \ell\right|$.

Limites de fonctions

Notions de limites de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note :

- $a \in \overset{\circ}{I}$*, si a est un point de I, mais pas une extrémité de I ;*
- $a \in \bar{I}$*, si a est un élément de I ou une extrémité réelle de I ;*
- $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ *si a est un point ou une extrémité éventuellement infinie de I.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *si* $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ (|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *si* $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ (x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *si* $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ (x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A)$.

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ *si* $\lim\limits_{x\to a} f_|(x) = \ell$*, où* $f_| = f_{|I\cap]-\infty,a[}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell.$$

Propriétés des fonctions possédant une limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \end{array} \right. \Rightarrow \ \ell = \ell'.$$

Unicité de la limite

Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\Updownarrow \begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \\ \bullet \forall u \in I^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell \end{array}$$

Caractérisation séquentielle de la limite

Compatibilité limite et inégalités

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, alors $f < g$ dans un voisinage de a.
- Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Opérations sur les limites

- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$
- $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda\, \ell$
- $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x) = \ell \times \ell'$
- si $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} 1/f(x) = 1/\ell$
- si $\ell = 0^+$, $\lim\limits_{x\to a} 1/f(x) = +\infty$

Pourvu que ces opérations aient un sens dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Encadrement, comparaison

- Si $\begin{cases} \forall x \in I,\ |g(x)| \leqslant |f(x)| \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0.$
- Si $\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty.$
- Si $\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell.$

Changement de variable

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x\to a} g \circ f(x) = \ell.$$

Cas des fonctions monotones

Soit $(a, b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application **monotone**. Alors

- Si f est **croissante**, alors
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en a et $\lim\limits_{a} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$,
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en b et $\lim\limits_{b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.
- Si f est **décroissante**, alors
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en a et $\lim\limits_{a} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$,
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ en b et $\lim\limits_{b} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

De plus f admet des limites finies à gauche et à droite en tout point $c \in]a, b[$:

- Si f est **croissante**, alors $\lim\limits_{c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{c^+} f(x)$.
- Si f est **décroissante**, alors $\lim\limits_{c^+} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{c^-} f(x)$.

Limites usuelles

Limites des fonctions usuelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} p_\alpha(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} p_\alpha(x) = +\infty$

Croissances comparées des fonctions usuelles

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta (|\ln x|)^\alpha = 0$

Autres limites usuelles

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$

Fonctions continues sur un intervalle

Notions de continuité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que

- *f est **continue au point** a si $\lim_a f(x) = f(a)$;*
- *f est **continue à gauche** en a si $\lim_{a^-} f(x) = f(a)$;*
- *f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.*

*Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** au point a si f admet une limite finie ℓ en a.Le **prolongement continu** de f en a est la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall x \in I,\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}$$

Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}, h : J \to \mathbb{R}$. On suppose que h (resp. f, g) est continue sur J (resp. I) et que $f(I) \subset J$. Alors les fonctions λf, $f + g$, $f \times g$ et $h \circ f$ sont continues sur I. Si de plus f ne s'annule pas, alors $1/f$ est continue sur I.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout couple $(a, b) \in I^2$, f atteint toute valeur γ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\Big(\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \gamma \in \mathbb{R}\Big), \quad \Big(\gamma \in [f(a), f(b)] \Rightarrow\ \exists\, c \in I, \quad f(c) = \gamma.\Big)$$

Si de plus f est strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour toute valeur γ, intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique élément $c \in I$ tel que $f(c) = \gamma$.

Théorème des bornes atteintes

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Plus précisément, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

Théorème de la bijection bicontinue

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue et strictement monotone** sur I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur J. De plus :

- $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.
- $f^{-1} : J \to I$ est continue de J sur I.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue et injective**. Alors f est strictement monotone.

Continuité uniforme

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que

- *f **est lipschitzienne de constante** k, si $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$.*
- *f **est uniformément continue sur** I (UCI) si :*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

f lipschitzienne $\Rightarrow$ f UCI $\Rightarrow$ f continue sur I Les réciproques sont fausses !

Théorème de Heine

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Dérivation

Dérivabilité

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est **dérivable** en a si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie en a. En ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \neq a \\ x \to a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le **nombre dérivé** de f en a.*

Si f est dérivable au point a, **alors**
$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$

Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable au point $a \in I$, alors f est continue au point a.

La réciproque est fausse !

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable dans $]a,b]$. Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} = \ell$.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I. Alors

- $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est dérivable et $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot f' + \mu \cdot g'$;
- $f \times g$ est dérivable et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$;
- si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.

Si f est dérivable dans I, g est dérivable dans J et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable et

$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$

Règle de dérivation en chaîne

Soit $f : I \to J$ une bijection continue de l'intervalle I sur l'intervalle J. Si f est dérivable si f' ne s'annule pas dans I, alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et

$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Dérivée d'une bijection réciproque

Extremums locaux d'une fonction dérivable

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f présente un

- ***max local*** *en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $\forall x \in \mathcal{V}, f(x) \leqslant f(a)$,*
- ***min local*** *en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $\forall x \in \mathcal{V}, f(x) \geqslant f(a)$,*
- ***extremum local*** *en a si elle possède un maximum ou un minimum local en a.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, et $a \in \overset{\circ}{I}$.

Si f a un extremum local en a, alors $f'(a)$=0.

Condition nécessaire d'extrémalité

*Lorsque $f'(a) = 0$, on dit que a est un **point critique** de f.*

Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorèmes des accroissements finis (TAF)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$.

$\exists c \in]a,b[, \text{ tel que } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Égalité des AF

Si $\forall x \in]a,b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors
$m \cdot (b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M \cdot (b-a)$

Inégalité des AF

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable dans I et s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne.

Limite de la dérivée

Si $\lim\limits_{\substack{x\neq a\\ x\to a}} f'(x)=\ell$, **alors** $\lim\limits_{\substack{x\neq a\\ x\to a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$.

$f : I \to \mathbb{R}$ continue dans I, dérivable dans $I \setminus \{a\}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x\neq a\\ x\to a}} f'(x) = \ell$.

Fonctions monotones dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I.

- f croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$. Elle est strictement croissante si de plus f' ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I.
- f décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$. Elle est strictement décroissante si de plus f' ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on définit les ***dérivées d'ordre 0,1,...,n,...*** *de f lorsqu'elles existent par $f^{(0)} = f$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable dans I, on pose $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.*
Si f admet une dérivée $n^{ième}$ continue dans I, on dit que f ***est de classe*** *$\mathcal{C}^n$. On note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}, h : J \to \mathbb{R}$. On suppose que h (resp. f, g) est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J (resp I) et que $f(I) \subset J$. Alors les fonctions λf, $f+g$, $f \times g$, $1/f$ (si f ne s'annule pas) et $h \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Si de plus $f : I \to J$ est bijective et f' ne s'annule pas dans I, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

$$\left(f \times g\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Formule de Leibniz

Dérivées des fonctions usuelles

En notant p_α la fonction puissance α-ième ($x \mapsto x^\alpha$), nous avons :

Dérivée	**Intervalle**	**Paramètres**
$\exp'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^{+\star}$	
$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in]0, +\infty[$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\sin'(x) = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$\cos'(x) = -\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$	$x \in \mathbb{R}$	
$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\mathrm{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$	
$\mathrm{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$	
$\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$	

Convexité

Définition et caractérisations

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

*On dit que f est **convexe** sur I si :*

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

*f est dite **concave** sur I si $-f$ est convexe.*

Caractérisations des fonctions convexes

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est convexe sur I *ssi* $f' : I \to \mathbb{R}$ est croissante sur I.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, f est convexe sur I *ssi* $f'' : I \to \mathbb{R}$ est positive sur I

Inégalités de convexité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors

$$f\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$$

Inégalité de Jensen

Si plus $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\forall (a, x) \in I^2,\ f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a)$$

Inégalité des tangentes le graphe de f est situé au-dessus de ses tangentes.

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.

Georg Cantor

Algèbre générale

Entiers relatifs, arithmétique

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

- $a = bq + r$
- $0 \leqslant r < b$

q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

PGCD, PPCM de deux entiers

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ un couple d'entiers relatifs.

• *Si $(a, b) \neq (0, 0)$, on note $a \wedge b$ le plus grand diviseur commun à a et b. On convient que $0 \wedge 0 = 0$.*

• *Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on note $a \vee b$ le plus petit entier strictement positif, multiple commun de a et b. Si $a = 0$ ou $b = 0$, on convient que $a \vee b = 0$.*

Entiers premiers entre eux, théorème de Bezout

*Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. a et b sont dits **premiers entre eux** si $PGCD(a, b) = 1$.*

$$a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux } \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1.$$

*Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers non tous nuls. L'ensemble des diviseurs communs à a_1, a_2, …, a_n admet un plus grand élément, appelé **plus grand commun diviseur** et noté $PGCD(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $d = PGCD(a_1, \ldots, a_n)$. Alors il existe des entiers $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tels que $d = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$.

Théorème de Gauss

- $a \mid bc$
- $a \wedge b = 1$

$\Big) \Rightarrow a \mid c.$ $\quad (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$

Nombres premiers

*On appelle **nombre premier** tout entier naturel $p \geqslant 2$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p lui-même. Un entier naturel $n \geqslant 2$ qui n'est pas premier est dit **composé**. On note $\mathfrak{P}$ l'ensemble des nombres premiers.*