

AIDE-MÉMOIRE MÉCANIQUE DES STRUCTURES

Résistance des matériaux

Arnaud Delaplace

Ingénieur de recherche Holcim, agrégé de Génie civil

Fabrice Gatuingt

Professeur des universités à l'ENS Paris-Saclay, agrégé de Génie civil

Frédéric Ragueneau

Professeur des universités à l'ENS Paris-Saclay

3^e édition

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Illustration de couverture : © Ck Keegather - Shutterstock.com

© Dunod, 2008, 2015, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084258-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Chapitre 1 • THÉORIE DES POUTRES	1
1.1 Principes de base en résistance des matériaux	1
1.1.1 La notion de contrainte	1
1.1.2 La déformation	4
1.1.3 La loi de comportement	5
1.1.4 Définitions et hypothèses en mécanique des structures	6
1.1.5 Équations d'équilibre d'un élément de poutre	9
1.2 Études des poutres sous diverses sollicitations	10
1.2.1 Lois de comportement généralisées pour les poutres	10
1.2.2 Poutre en flexion simple	15
1.2.3 Poutre en flexion déviée	16
1.2.4 Poutre en flexion composée	16
Chapitre 2 • CARACTÉRISTIQUES DES SECTIONS	18
2.1 Préambule	18
2.2 Définitions	19
2.2.1 Surface	19
2.2.2 Centre de gravité	19
2.2.3 Moment statique	19
2.2.4 Moment d'inertie	20
2.2.5 Produit d'inertie	20
2.2.6 Moment polaire	21
2.2.7 Axes principaux d'inertie	21
2.2.8 Rayon de giration	21
2.3 Théorèmes et propriétés	22
2.3.1 Théorème de Huygens	22
2.3.2 Changement de repère	22
2.3.3 Décomposition d'une surface	23
2.4 Caractéristiques des principales sections	25
2.5 Exemple : caractéristiques d'une section en T	27

Chapitre 3 • THÉORÈMES GÉNÉRAUX – MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES	30
3.1 Principe des travaux virtuels – PTV	30
3.1.1 Champ de déplacement virtuel	31
3.1.2 Définition du travail des forces dans le champ de déplacement virtuel	31
3.2 Égalité de Clapeyron	32
3.3 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	33
3.4 Théorème de Castigliano	33
3.5 Théorème de Ménabréa	34
3.6 Théorème de Müller-Breslau : formule de Mohr	34
3.7 Lignes d'influence	38
3.7.1 Effet d'un ensemble de charges	40
3.7.2 Lignes d'influence des déformations	40
Chapitre 4 • SYSTÈMES ISOSTATIQUES	41
4.1 Définitions	41
4.1.1 Systèmes isostatiques	41
4.1.2 Efforts et conditions de liaisons	41
4.1.3 Exemple	42
4.2 Poutre sur deux appuis	45
4.2.1 Cas d'une charge concentrée	45
4.2.2 Cas d'un convoi de charges ponctuelles : théorème de Barré	46
4.2.3 Cas d'une charge uniformément répartie	47
4.2.4 Cas d'une charge répartie partielle	48
4.2.5 Cas d'une charge répartie partielle proche d'un appui	49
4.2.6 Cas d'une charge triangulaire	50
4.2.7 Cas d'une charge triangulaire monotone	51
4.2.8 Cas d'une charge triangulaire antisymétrique	52
4.2.9 Cas d'une charge trapézoïdale symétrique	53
4.2.10 Cas d'une charge parabolique	54
4.2.11 Cas d'un couple en un point quelconque	55
4.2.12 Cas d'un couple à une extrémité	56
4.2.13 Cas d'un couple uniformément réparti	57
4.3 Poutre console	57
4.3.1 Cas d'une charge concentrée	57
4.3.2 Cas d'une charge uniformément répartie	58

4.3.3	Cas d'une charge triangulaire croissante	59
4.3.4	Cas d'une charge triangulaire décroissante	60
4.3.5	Cas d'un couple	60
4.4	Arc parabolique isostatique	61
4.4.1	Cas d'une charge uniformément répartie	62
4.4.2	Cas d'une charge ponctuelle horizontale	62
4.4.3	Cas d'une charge ponctuelle verticale	63
Chapitre 5	• SYSTÈMES HYPERSTATIQUES	65
5.1	Généralités	65
5.1.1	Degré d'hyperstaticité H	65
5.1.2	Méthode des forces ¹	68
5.1.3	Méthode des déplacements	75
5.2	Poutre droite à une travée	85
5.2.1	Encastrement élastique aux extrémités	85
5.2.2	Formulaire d'une poutre simplement appuyée d'un côté et encastree de l'autre	87
5.2.3	Formulaire d'une poutre bi-encastree	91
5.2.4	Formulaire d'une poutre console	94
5.3	Poutre continue	96
5.3.1	Notations et définitions	96
5.3.2	Poutre isostatique associée	96
5.3.3	Formule des trois moments	97
5.3.4	Expression des sollicitations et actions de liaison	98
5.3.5	Formulaire des rotations usuelles	99
5.3.6	Formulaire de la poutre continue à 2 travées égales	101
5.3.7	Formulaire de la poutre continue à 3 travées égales	103
5.3.8	Formulaire de la poutre continue à 4 travées égales	105
5.3.9	Formulaire de la poutre continue à 5 travées égales	106
5.3.10	Poutre continue sur appuis élastiques ponctuels	107
5.4	Systèmes de poutres croisées	108
5.4.1	Principe	108
5.4.2	Cas particulier des poutres de même inertie	109
5.4.3	Cas particulier des poutres infiniment rigides dans une direction	110

5.5	Poutre sur appui élastique continu	110
5.5.1	Définition et paramètres	110
5.5.2	Formulaire de la poutre infinie	112
5.5.3	Formulaire de la poutre semi-infinie	113
5.5.4	Formulaire de la poutre de longueur finie	116
5.6	Portique	118
5.6.1	Portique à un seul montant et à deux extrémités articulées	119
5.6.2	Portique à un seul montant et à deux extrémités encastrees	119
5.6.3	Portique à un seul montant et à une extrémité encastree et l'autre articulée	120
5.6.4	Portique à deux montants articulés	122
5.6.5	Portique à deux montants encastres	123
5.7	Arcs hyperstatiques	125
5.7.1	Arc circulaire à deux articulations sans tirant	125
5.7.2	Arc parabolique à deux articulations sans tirant	127
Chapitre 6	• PLAQUES ET COQUES	129
6.1	Plaques	129
6.1.1	Formules générales	129
6.1.2	Méthode de résolution pour les plaques rectangulaires	131
6.1.3	Plaques rectangulaires	131
6.1.4	Plaques circulaires	133
6.1.5	Plaques annulaires	140
6.2	Coques	145
6.2.1	Cylindres verticaux	146
6.2.2	Cylindres horizontaux remplis par un liquide	148
6.2.3	Coupole sphérique fermée	149
6.2.4	Coupole sphérique ouverte	151
6.2.5	Coque sphérique	153
Chapitre 7	• FORMULATION DES ÉLÉMENTS FINIS	154
7.1	Principe des éléments finis	154
7.2	Étapes de la résolution d'un problème	156
7.3	Application à l'étude d'une poutre sollicitée en flexion	157
7.3.1	Description du problème	157
7.3.2	Construction de la matrice de raideur locale	158
7.3.3	Implantation et résolution en Python	162

7.4	Éléments finis isoparamétriques	164
7.5	Fonctions de forme des éléments finis isoparamétriques courants	166
7.5.1	Élément barre à deux nœuds	166
7.5.2	Élément barre à trois nœuds	167
7.5.3	Élément triangulaire à trois nœuds	167
7.5.4	Élément triangulaire à six nœuds	168
7.5.5	Élément quadrangulaire à quatre nœuds	168
7.5.6	Élément quadrangulaire à huit nœuds	169
7.5.7	Élément quadrangulaire à neuf nœuds	169
Chapitre 8	• INSTABILITÉ DES STRUCTURES	171
8.1	Instabilité de poutres	171
8.1.1	Poutre d'Euler	171
8.1.2	Solutions générales des poutres comprimées	172
8.1.3	Solutions particulières pour des poutres de section constante	173
8.1.4	Prise en compte d'un défaut initial	176
8.2	Calcul des moments dans une poutre comprimée fléchie	177
8.3	Déversement latéral de poutres	178
8.3.1	Déversement latéral de poutres à section rectangulaire	178
8.3.2	Déversement latéral de poutres à section en I	179
8.4	Instabilité et voilement de plaques	180
8.5	Flambement de structures non planes initialement	183
8.5.1	Flambement d'arc et d'anneaux	183
8.5.2	Flambement de tubes minces	183
Chapitre 9	• CALCUL NON LINÉAIRE, ANALYSE LIMITE, PLASTICITÉ	185
9.1	Modèles de comportement des matériaux	185
9.2	Plastification en flexion : notion de moment plastique et rotule plastique	186
9.2.1	Hypothèses	186
9.2.2	Section symétrique	186
9.3	Analyse limite d'un système de poutres	188
9.3.1	Enjeux	188
9.3.2	Théorème statique	189
9.3.3	Théorème cinématique	189

Chapitre 10 • DYNAMIQUE ET VIBRATIONS	194
10.1 Système à 1 degré de liberté	194
10.1.1 Équation du mouvement	195
10.1.2 Le régime libre	196
10.1.3 Le régime forcé sinusoïdal	198
10.1.4 Régime permanent sous une charge périodique quelconque	199
10.1.5 Réponse à une charge arbitraire	201
10.1.6 Réponse à des chargements impulsionnels simples	203
10.2 Système à N degrés de liberté	204
10.2.1 Équations du mouvement	204
10.2.2 Signification des modes propres et fréquences propres	204
10.2.3 Détermination des fréquences propres de vibration	205
10.2.4 Détermination des modes propres de vibration	206
10.2.5 Propriété d'orthogonalité des modes	206
10.2.6 Normalisation des vecteurs modes de vibration	206
10.2.7 Équations modales du mouvement – Superposition des modes	207
10.3 Vibration des systèmes continus	209
10.3.1 Vibration axiale des barres	209
10.3.2 Vibration transversale des poutres	210
10.3.3 Détermination du mode fondamental de vibration : méthode de Rayleigh	211
10.3.4 Modes propres de vibration des poutres	212
10.3.5 Modes propres de vibration des plaques	212
Index	215

Chapitre 1

Théorie des poutres

L'objectif de ce premier chapitre est de mettre en place et de définir toutes les notions de base en mécanique des milieux continus permettant d'aborder dans les chapitres suivants la Résistance des Matériaux (RDM). La RDM est une des branches de la mécanique qui permet l'étude des contraintes et des déformations. Les contraintes mécaniques peuvent être vues comme des « efforts de cohésion » de la matière et sont homogènes à une pression (généralement exprimée en méga-Pascal ou MPa). Les déformations d'un objet physique s'observent par un changement de forme de celui-ci et/ou de variation dans ses dimensions. Les déformations sont sans unités.

1.1 PRINCIPES DE BASE EN RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

1.1.1 La notion de contrainte

Si un solide est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, de couples et de liaisons, ce dernier se déformera et sera soumis à des « efforts » internes. La contrainte est l'objet mathématique permettant de quantifier ces « efforts » internes à la matière. Pour définir la notion de contrainte, il suffit de procéder par la méthode des coupures virtuelles du solide étudié.

En un point M, isolons une partie du solide, défini par un plan de coupure orienté par le vecteur normal sortant au solide $\vec{n}$ (voir figure 1.1).



Figure 1.1

En chaque point M de la surface de coupe, il faut remplacer la partie du solide manquant par une densité surfacique d'effort sur la coupe représentant l'action de ce dernier sur le solide isolé. Cette densité d'effort, définie localement en un point M et orientée par une normale sortante $\vec{n}$ est appelée le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$. Le vecteur contrainte dépend linéairement du vecteur unitaire $\vec{n}$. Il existe donc localement un opérateur linéaire reliant le vecteur contrainte sur un plan à sa normale, c'est le tenseur des contraintes σ , symétrique du second ordre. Il vient ainsi,

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma(M) \cdot \vec{n}$$

La matrice du tenseur des contraintes, relative à une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ prend la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Il est usuel de représenter graphiquement le tenseur des contraintes dans le plan de Mohr, permettant de séparer les contraintes normales des contraintes de cisaillement. Si on désigne par τ la contrainte de cisaillement (portée par un vecteur $\vec{t}$ orthogonal à $\vec{n}$) et σ_n la contrainte normale, on peut décomposer le vecteur contrainte en deux contributions :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau \vec{t}$$

Il existe un repère particulier dans lequel le tenseur des contraintes est diagonal, c'est le repère principal des contraintes. En notant σ_1 , σ_2 et σ_3 les 3 contraintes principales, avec $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, le domaine d'admissibilité du

vecteur contrainte est défini par les 3 inéquations suivantes, définissant un ensemble de cercles.

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \leq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0$$

Dans le plan de Mohr, l'admissibilité de la contrainte est visualisée par la zone grisée ci-après.

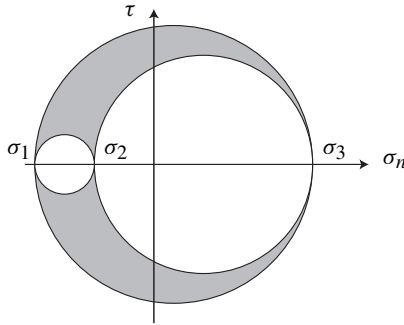


Figure 1.2

Pour un état plan de contrainte, si on désigne par θ , l'angle entre le repère principal des contraintes et le repère dans lequel la matrice du tenseur des contraintes est exprimée, la relation entre les contraintes principales et les différents termes du tenseur des contraintes est

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cdot \cos(2\theta)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cdot \cos(2\theta)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cdot \sin(2\theta)$$

ce qui donne la représentation graphique de la figure 1.3.