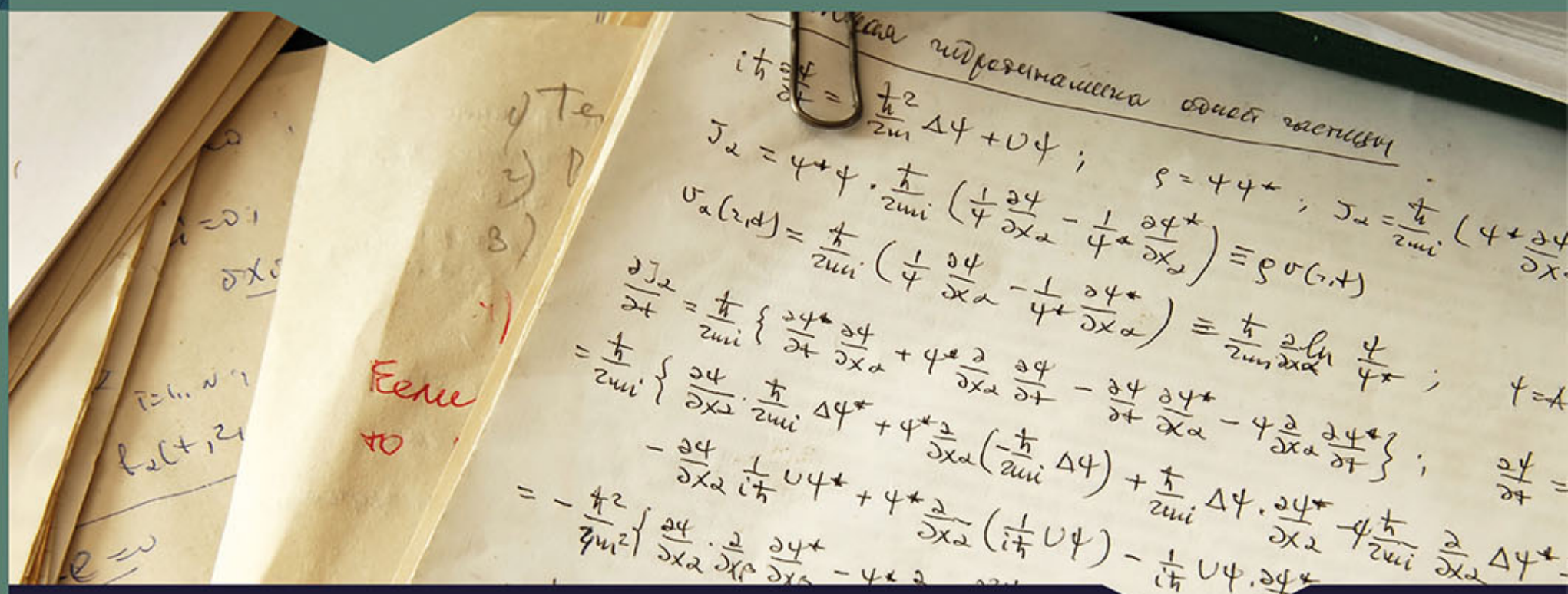
OMAR AGUILAR LORETO | JOSÉ ANTONIO MUÑOZ GÓMEZ

Ecuaciones diferenciales parciales



EDITORIAL UNIVERSITARIA

Centro Universitario de la Costa Sur

Universidad de Guadalajara

OMAR AGUILAR LORETO | JOSÉ ANTONIO MUÑOZ GÓMEZ

Ecuaciones diferenciales parciales

Colección Monografías de la Academia

OMAR AGUILAR LORETO | JOSÉ ANTONIO MUÑOZ GÓMEZ

Ecuaciones diferenciales parciales

EDITORIAL UNIVERSITARIA

Centro Universitario de la Costa Sur

Universidad de Guadalajara

Itzcóatl Tonatiuh Bravo Padilla
Rectoría General

Miguel Ángel Navarro Navarro
Vicerrectoría Ejecutiva

José Alfredo Peña Ramos
Secretaría General

Lilia Victoria Oliver Sánchez
Rectoría del Centro Universitario de la Costa Sur

José Antonio Ibarra Cervantes
Corporativo de Empresas Universitarias

Sayri Karp Mitastein
Dirección de la Editorial Universitaria

Ecuaciones diferenciales parciales / Omar Aguilar Loreto, José Antonio Muñoz Gómez. -- 1a ed. – Guadalajara, Jalisco : Editorial Universitaria: Incluye referencias bibliográficas

ISBN 978 607 742 578 6

1. Ecuaciones diferenciales parciales-Estudio y enseñanza I. Muñoz Gómez, José Antonio, autor II. t. III. Serie

515.35 .A28 DD21
QA377 .A28 LC

La publicación de este libro se financió con recursos del PROFOCIE 2014

Primera edición electrónica, 2016

D.R. © 2016, Universidad de Guadalajara

Textos
© Omar Aguilar Loreto,
José Antonio Muñoz Gómez

Coordinación Editorial
Sol Ortega Ruelas

Cuidado editorial
Editorial Universitaria

Diagramación
Paola E. Vázquez Murillo

Editorial Universitaria
José Bonifacio Andrada 2679
Colonia Lomas de Guevara
44657 Guadalajara, Jalisco

01 800 834 54276
www.editorial.udg.mx

ISBN 978 607 742 578 6

Julio de 2016

Hecho en México
Made in Mexico

Se prohíbe la reproducción, el registro o la transmisión parcial o total de esta obra por cualquier sistema de recuperación de información, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, existente o por existir, sin el permiso por escrito del titular de los derechos correspondientes.

En la formación de este libro se utilizaron las familias tipográficas Minion Pro, diseñada por Robert Slimbach, y Ronnia, diseñada por Veronika Burian y José Scaglione.

Índice

7 Prefacio

9 Capítulo 1.
Funciones

18 Capítulo 2.
Ecuaciones diferenciales parciales

41 Capítulo 3.
Ecuaciones de primer orden

111 Capítulo 4.
Ecuaciones de segundo orden

141 Bibliografía

Prefacio

Uno de los grandes anhelos de la humanidad es comprender y predecir el comportamiento de la naturaleza. Esto lo hemos venido desarrollando mediante la formulación de modelos matemáticos que representan una abstracción del fenómeno de estudio. Dichos modelos por lo general conllevan al planteamiento de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Dada la complejidad creciente de las EDP, en las últimas décadas se han desarrollado los modelos computacionales que nos permiten resolver numéricamente las EDP y con ello poder comprender a mayor profundidad la propia naturaleza.

El presente libro aborda una primera introducción a la teoría y aplicaciones de las Ecuaciones en Derivadas Parciales. El texto es apropiado para cualquier curso básico sobre EDP, teniendo un mayor énfasis en cursos de ingeniería, estudiantes de matemáticas aplicadas y posiblemente para un primer año de maestría en ciencias.

El texto no intenta ser un tratado exhaustivo. La amplitud de los temas y la experiencia de los autores ha impedido abordarlos con la minuciosidad deseada. Sin embargo, constituye un primer acercamiento que presenta una visión general en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales.

El texto contiene cuatro capítulos, los cuales están organizados de la siguiente manera: en el capítulo uno mostramos la definición clásica de función y abordamos la clasificación de funciones considerando el número de elementos del dominio y codominio. En el capítulo dos estudiamos los conceptos básicos de ecuaciones diferenciales parciales e indicamos los tipos de ecuaciones en sus formas lineales y cuasilineales. Aunado a ello, se muestra el concepto de solución. Posteriormente, en el capítulo tres se describen las ecuaciones lineales de primer orden desde un punto de vista geométrico, la solución general y el problema de Cauchy. Finalmente, en el capítulo cuatro se abordan las ecuaciones de segundo orden, en particular se describe la categoría de funciones de tipo hiperbólica, parabólica y elíptica. Se abordan diversos ejemplos que permiten una mejor comprensión del tema.

En distintas etapas de la escritura de esta obra, varias personas proporcionaron valiosos comentarios. Los autores están agradecidos por su ayuda y cooperación a todos aquellos que contribuyeron en diversas maneras para esclarecer algunos pasajes oscuros, así como proporcionarnos una retroalimentación constructiva. En particular, expresamos nuestra gratitud a Sotero Ordoñes Nogales y Abimael Jiménez Pérez por su tiempo dedicado a la revisión general de la misma. De igual manera, queremos expresar nuestro agradecimiento a la Universidad de Guadalajara (campus CUCSUR) por las facilidades otorgadas a los autores para la elaboración de este libro.

O. Aguilar Loreto
J. A. Muñoz Gómez

Junio 2016

Capítulo 1

Funciones

1.1. Definición clásica

El concepto de función se ha generalizado mucho desde el desarrollo inicial del Cálculo efectuado por Leibniz y Newton [1]. Actualmente la palabra *función* se usa en un sentido amplio para significar cualquier correspondencia determinada entre dos clases de objetos.

En nuestro caso, consideraremos funciones que son correspondencias entre conjuntos de números reales. A este tipo de funciones se les llama funciones reales de una variable real. El primer conjunto de números se conoce como dominio de la función, el cual consiste en todo el conjunto de valores que puede tomar la función, claro que tomando en consideración las restricciones comunes que surgen en funciones de valor real, como división por cero, el dominio de funciones logarítmicas y raíces cuadradas de números reales positivos principalmente. El segundo conjunto, formado por los valores que toma la función, se llama recorrido o imagen. Una vez especificado el dominio, al cual se le llamará D, la función queda definida

tan pronto como se da una regla específica de correspondencia que asigna a cada número de D algún número correspondiente en el recorrido. Si x es un símbolo usado para denotar a cualquier miembro de D, se dice que x es la variable independiente de la función. Si a cada valor de x le corresponde exactamente un número del recorrido, se tiene una función univaluada, que es propiamente lo que significa el término función [2]. En lo sucesivo se supondrá siempre que todas las funciones a las que se haga referencia son univaluadas, a menos que se especifique lo contrario. Con ánimos de ser metódicos, decimos que una función consta de lo siguiente [3]:

- Un conjunto D, llamado dominio de la función.
- Un conjunto I, llamado codominio o imagen de la función.
- Una relación (o correspondencia) f, que asocia a cada elemento x de D un solo elemento $f(x)$ en I.

La combinación de (D, I, f) es lo que conforma a una función. En la figura 1.1 describimos gráficamente el concepto de función como una regla de asociación entre conjunto de números reales. En el lado izquierdo de la figura 1.1 se muestra el dominio de la función, en el lado derecho se indica la imagen de la función. Observe que f exclusivamente no es la función, lo cual es un error que comúnmente se comete al definir funciones. Lo que representa f es la regla de asociación o de correspondencia entre D e I.

En general, el proceso de evaluar una función en un punto dado x_0 consiste en, al menos, dos pasos:

- Transforma la función $f(x)$ de la forma algebraica a una expresión aritmética.
- Realizar las operaciones aritméticas necesarias para obtener finalmente el resultado (un número).

En la forma original la función $f(x)$ es una expresión algebraica (por ejemplo $f(x) = 2x + 1$) que contiene operaciones aritméticas con una variable o literal denotada por lo general por x. Al momento de reemplazar

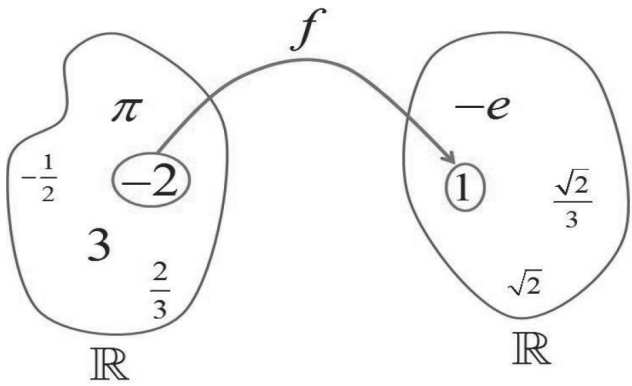


Figura 1.1: Representación gráfica de una función.

la variable x por un número dado x_0, lo que estamos haciendo es transformar una forma algebraica en una forma aritmética. El segundo paso, consiste en simplificar o evaluar la expresión aritmética del paso anterior, para poder tener finalmente el resultado de la evaluación buscada.

1.2. Función de una variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Quizá uno de los conceptos de mayor importancia en matemáticas sea el concepto de función. La palabra función es sinónimo de relación, la relación que existe entre dos cantidades, ideas u objetos en general. En matemáticas normalmente esos dos objetos son conjuntos de números, letras, funciones mismas o formas mas abstractas de las matemáticas.

Pensemos en algunos ejemplos cotidianos de funciones. La temperatura de un objeto depende de la cantidad de calor suministrado al mismo, es decir, a mayor calor suministrado mayor será la temperatura en el objeto, en este sentido el calor se relaciona de manera directa con la temperatura.

La intensidad del campo eléctrico depende de la magnitud de la carga eléctrica que genera el campo, si hay más carga el campo eléctrico es más intenso, si la carga disminuye el campo eléctrico es menos intenso. El campo eléctrico se relaciona directamente con la carga eléctrica, en términos más precisos, el campo eléctrico está en función de la carga eléctrica. Por último, la aceleración que se le imprima a un objeto depende de la fuerza aplicada al mismo, en otras palabras, la aceleración está en función de la fuerza aplicada a un objeto.

Notemos que en todos los casos existen dos cantidades que están relacionadas de alguna manera, y en la medida que alteremos una cantidad la otra también se modifica, podemos enunciarlo como: la cantidad y está en función de la cantidad x, donde a x se le conoce como variable independiente, y la cantidad y se conoce como variable dependiente

$$y = f(x).$$

Esta es una forma tradicional de definir a una función pero existe otra definición formal más moderna. Sea un conjunto de objetos al que llamaremos conjunto A y sea otra colección de objetos al que llamaremos conjunto B, existe una regla de correspondencia a la que llamaremos f que nos relaciona ambos conjuntos. Estos tres objetos, el conjunto A, el conjunto B y la regla de correspondencia f, conforman lo que se conoce como función y se expresa como:

$$f : A \to B$$

Analícemos otro ejemplo para mayor claridad. Al estudiar el movimiento de un objeto, la fuerza que se imprima al móvil será proporcional a la aceleración; cuánta mayor fuerza sea aplicada, la aceleración del objeto es mayor.

La relación anterior la podemos expresar en notación matemática como: $a = f(F)$, donde F es la fuerza aplicada al objeto y a es la aceleración que se le imprima. Aquí encontramos toda una gama de valores para la fuerza en virtud del mecanismo que genere la fuente de energía, asimismo los valores de la aceleración dependerán de los valores de la fuerza correspondiente. Isaac Newton [1] dedujo una expresión explícita para relacionar

ambas cantidades matemáticamente

$$F = ma$$

donde m es la masa del objeto. En este caso podemos establecer de manera específica la regla de correspondencia entre ambas cantidades. Observemos que en este ejemplo sencillo la relación es en proporción directa, basta multiplicar por el inverso de m a F para encontrar la aceleración

$$a(F) = \frac{1}{m}F \tag{1.1}$$

siendo la aceleración función que depende sólamente de F. Hemos considerado a la masa del objeto como una cantidad fija.

1.3. Función de varias variables

Anteriormente habíamos considerado que la aceleración que se le imprima al objeto depende únicamente de la fuerza aplicada. Sin embargo, la masa también puede ser modificada.

De la experiencia sabemos que al aumentar la masa del objeto, (manteniendo la fuerza constante) la aceleración se reduce; si la disminuimos, la aceleración será mayor, es decir, la aceleración que adquiere el objeto también depende de la cantidad de masa involucrada, por lo tanto, se puede escribir la función (1.1) como

$$a(m, F) = \frac{F}{m}$$

podemos concluir que la aceleración depende de dos cantidades, tanto la masa como la fuerza.

De esta forma, la segunda ley de Newton se puede interpretar como una función de dos variables, es decir, la aceleración producida en el objeto, no sólo depende de la fuerza aplicada al objeto, sino también depende de la cantidad de masa que se requiera mover.