

Julian Tugaut

Écoles
d'ingénieurs

Rudiments de mathématiques en traitement du signal



ellipses

Références sciences

Écoles
d'ingénieurs

Rudiments de mathématiques en traitement du signal

Julian Tugaut



Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-113732

Dépôt légal : avril 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce livre est issu des fascicules que nous avons rédigés pour les cours en traitement du signal en première année de cycle ingénieur de l'école Télécom Saint-Étienne. Les étudiants qui suivent ce cursus sont issus de différents parcours comme ceux des classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs (MPI, MP, PSI, PC, PT, TSI), de licences, de BUT (ex-DUT), de bachelors... *In fine*, les profils sont variés et il nous a vite apparu qu'il était nécessaire de tenir compte de cette hétérogénéité. De fait, les séances de travaux dirigés que nous avons données vont dans la direction suivante : créer du lien entre les trois cours différents. Néanmoins, les étudiants que nous avons n'ayant pas pour vocation à travailler sur la théorie du traitement du signal en tant que telle, certains aspects sont complètement passés sous silence de par leur technicité. Nous pensons notamment au convertisseur analogique-numérique et à l'étape de quantification. Bien que ce convertisseur soit d'un intérêt indéniable, il nous a semblé plus opportun de ne présenter que les rudiments mathématiques en traitement du signal.

Par ailleurs, l'écriture de l'ouvrage a été menée de telle manière que la lecture en est linéaire. Cependant, il nous arrive régulièrement de faire du lien vers les chapitres précédents mais aussi vers les chapitres suivants.

Ce livre s'adresse principalement aux étudiants qui n'ont pas vocation à théoriser à outrance les mathématiques mais bien à les utiliser. Par ailleurs, le livre adopte le point de vue le plus mathématique possible pour que des notions comme la TFTD ou la transformée en z soit reliée de la manière la meilleure au concept de distributions, lequel est central dans cet ouvrage. Ainsi, bien que le livre soit plutôt théorique, les étudiants en écoles d'ingénieurs (en filière initiale ou en filière par alternance) et plus généralement ceux qui se destinent à étudier le traitement du signal trouveront dans ce livre un exposé assez complet de la théorie des distributions, de la transformée de Fourier et de ses variantes puis des applications aux systèmes analogiques et numériques ainsi qu'au filtrage de signaux aléatoires.

L'intérêt de l'étude du traitement du signal basique en école d'ingénieurs ne saurait être questionné. Ceci est d'autant plus vrai dans une école du numérique comme Télécom Saint-Étienne. Nous nous contenterons de souligner que tout ou presque est signal : signal téléphonique, signal d'électroencéphalogramme, signal par fibre optique, signal mécanique... On peut aussi penser à notre propre voix. Tout n'est que signal. Et, comme certaines perturbations s'ajoutent au signal utile, il est crucial de pouvoir traiter le signal pour l'expurger de son bruit parasite.

Dans cet ouvrage, nous avons choisi de nous adosser autant que possible à la théorie des distributions. Il est certes possible de présenter l'impulsion de Dirac sans en donner le moindre contexte ou même sans expliquer le pourquoi cet objet a un sens. Il est tout aussi possible de ne présenter la transformée de Fourier des signaux qu'avec le point de vue utilitaire. Néanmoins, nous optons pour une approche mathématique où les objets sont introduits précisément et où les diverses propriétés de ceux-ci sont présentées soigneusement. Ainsi, tout le livre gravite autour de la notion de distribution, cadre adéquat au traitement du signal. Bien qu'il ne représente pas l'alpha et l'omega du traitement du signal, nous pensons qu'aborder celui-ci au moyen d'une théorie mathématique bien assise ne peut qu'être bénéfique pour appréhender les notions sous-jacentes.

Ainsi, dans un premier temps, nous construirons la théorie des distributions. Pour ce faire, nous commencerons par présenter les fonctions usuelles (fonction signe, échelon unité, fonction porte, fonction d'interpolation, signal monochromatique). Puis, nous regarderons avec une approche naïve la fonction de Dirac, laquelle ne rend pas bien compte des phénomènes. Suite à cela, nous introduirons la notion de fonction test (définition et non trivialité de l'ensemble des fonctions tests). Ensuite, nous donnerons la définition de ce qu'est une distribution, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur le précédent ensemble des fonctions tests. Les principales propriétés seront démontrées et la distribution de Dirac sera introduite. Nous verrons notamment que toute distribution est dérivable ainsi que primitivable. Puis, nous résoudrons des équations sur les distributions.

Dans un second temps, nous développerons la notion de produit de convolution. Nous le définirons d'abord pour les fonctions puis nous montrerons que celui-ci a un sens sous certaines hypothèses simples à vérifier. En particulier, nous verrons que le produit de convolution entre deux fonctions causales de carrés localement sommables existe ; et de plus, la fonction obtenue est elle-même causale. Les principales propriétés seront obtenues. Suite à cela, nous étendrons le produit de convolution aux distributions. Il sera en particulier démontré que la distribution de Dirac est l'élément neutre de ce produit. Afin de nous adosser à un ensemble adéquat, nous nous ramènerons à une algèbre de convolution et nous verrons comment utiliser celle-ci pour résoudre des équations différentielles ainsi que des équations de Lodka-Volterra.

Dans un troisième chapitre, nous fournirons la théorie sur les séries de Fourier. Nous n'entrerons pas dans les détails de la théorie de Fourier sur les caractères mais nous mentionnerons ceux-ci par moments. Également, nous présenterons la décomposition en série de Fourier comme étant une application plus ou moins directe du théorème de Pythagore (nous pensons ici à la formule de Parseval qui stipule que l'énergie d'un signal est conservée dans le domaine fréquentiel par rapport au domaine temporel et réciproquement). Nous parlerons également de l'aspect « diagonalisation » au moyen de vecteurs propres obtenus par produit de convolution cyclique. Enfin, nous esquisserons certains résultats sur le déplaisant phénomène de Gibbs ; lequel interdit la reconstruction ponctuelle du signal dans des cas généraux.

Le quatrième chapitre est consacré à la transformée de Fourier. Nous verrons notamment celle-ci pour les fonctions sommables. Puis, nous tenterons d'étendre la transformée de Fourier à l'ensemble des distributions. Nous n'y parviendrons pas. De fait, nous verrons qu'il faut changer de paradigme et modifier l'espace des fonctions tests pour considérer toutes les fonctions à décroissance rapide. Suite à cela, les distributions sur cet espace, c'est-à-dire les distributions tempérées, seront les nouveaux objets que nous considérerons. En particulier, nous obtiendrons les transformées de la plupart des distributions classiques, qu'il s'agisse de la distribution de Dirac ou du peigne de Dirac. Nous fournirons également les principales propriétés de la très importante transformée de Fourier, notamment son comportement vis à vis de la dérivation ou du produit de convolution.

Le cinquième chapitre sera une version plus appliquée du chapitre quatre puisque nous présenterons la transformée de Fourier telle qu'elle est appliquée en pratique, que ce soit au moyen de la TFTD (transformée de Fourier à temps discret), de la TFD (transformée de Fourier discrète), de la transformée de Laplace (ici vue comme une variante de la transformée de Fourier) et de la transformée en z (le pendant discret de la transformée de Laplace). Dans ce chapitre, nous déclinons les propriétés usuelles avec ces variantes de la transformée de Fourier mais également nous verrons des études plus appliquées relatives aux variantes en question.

Le sixième chapitre sera encore plus appliqué puisque nous fournirons une étude systémique des systèmes. Les principales propriétés de ceux-ci seront données : la causalité, le caractère linéaire et invariant dans le temps, la stabilité au sens entrée bornée-sortie bornée. Par ailleurs, nous verrons l'importance de la réponse impulsionnelle, laquelle caractérise la sortie d'un système LIT via le produit de convolution. Puis, la fonction de transfert sera vue comme étant une transformée de la réponse impulsionnelle.

Le septième chapitre traitera des signaux aléatoires. En d'autres termes, nous aborderons le traitement du signal avec l'angle probabiliste et statistique. Notamment, nous verrons que sous certaines bonnes hypothèses, un bruit blanc (à savoir un signal ayant de l'énergie sur toutes les fréquences) n'est rien d'autre qu'un signal stationnaire au sens large, centré et constitué de variables aléatoires décorréliées. La notion de densité spectrale de puissance sera ainsi présentée. Et, nous verrons en particulier que cette densité spectrale de puissance est une transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation ; ce qui achèvera de démontrer l'importance de ladite transformée de Fourier en traitement du signal.

Le huitième chapitre regroupe les corrections des quarante-huit exercices que contient le livre. Il convient de noter que l'on a rédigé une page de notations. Nous terminons enfin par la bibliographie et l'index. Par ailleurs, un carré blanc a été ajouté à la fin de chacune des (nombreuses) démonstrations pour aider le lecteur à se repérer.

Les prérequis sont divers. Outre avoir un niveau solide de Terminale, il est crucial que le lecteur connaisse la trigonométrie et les nombres complexes. Il est aussi préférable qu'il dispose déjà de rudiments en algèbre linéaire et en probabilités. Par ailleurs, avoir des notions de topologie serait un vraie plus, quoique ce ne soit pas rédhibitoire. Et, par endroits, la décomposition en éléments simples est un prérequis. Enfin, nous insistons pour que l'intégration soit maîtrisée avant que l'étudiant ne s'attèle à la lecture du livre.

Listons maintenant les autres sources qui furent d'une aide plus ou moins grande dans l'écriture de cet ouvrage et qui ne sont pas dans la bibliographie : Wikipedia et Google, le polycopié du Professeur Jean-Michel Morel en licence à l'ÉNS de Cachan et les précédentes versions du polycopié par le Professeur Olivier Alata à Télécom Saint-Étienne. Ce livre a été écrit avec $\text{\LaTeX}$, via l'éditeur Texmaker. Les images ont intégralement été réalisées à partir de TikZ (encore merci à Aubin pour son aide précieuse).

Nous achevons cet avant-propos en soulignant l'importance de nous signaler toute erreur, aussi infime soit-elle.

Table des matières

1	Théorie des distributions	19
1.1	Introduction	19
1.2	Pourquoi les distributions ?	19
1.3	Fonctions usuelles	21
1.3.1	Fonction signe	21
1.3.2	Fonction de Heaviside	22
1.3.3	Fonction porte	24
1.3.4	Fonction sinus cardinal	25
1.3.5	Signal monochromatique	26
1.3.6	Fonction de Dirac	26
1.4	Espace des fonctions tests	28
1.5	Distributions	34
1.6	Propriétés	39
1.6.1	Translation	39
1.6.2	Dilatation	40
1.6.3	Support	41
1.7	Espace $\mathcal{D}'$	42
1.8	Dérivation	47
1.9	Primitivation	55
1.10	Équations de type $\alpha T = S$	58
1.11	Exercices	62
2	Convolution	65
2.1	Introduction	65
2.2	Motivation	65
2.3	Définition et interprétation	67

2.4	Existence	69
2.4.1	Si $f \in L^1$ et $g \in L^1$	69
2.4.2	Si $f \in L^2$ et $g \in L^2$	70
2.4.3	Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$	71
2.4.4	Si $f, g \in \mathcal{C}^{0,m}$ et à supports compacts	72
2.4.5	Si $f \in L^2_{\text{loc}}$ et $g \in L^2_{\text{loc}}$ et si elles sont causales	73
2.5	Propriétés	77
2.5.1	Commutativité	77
2.5.2	Distributivité	77
2.5.3	Retard	78
2.5.4	Dérivation	79
2.6	Extension aux distributions	80
2.6.1	Intuition	81
2.6.2	Produit tensoriel	81
2.6.3	Définition	82
2.6.4	Propriétés	83
2.6.4.1	Commutativité	83
2.6.4.2	Distributivité	83
2.6.4.3	Élément neutre	84
2.6.4.4	Retard	84
2.6.4.5	Dérivation	85
2.6.5	Limitation	86
2.7	Algèbre de convolution	87
2.8	Équations de convolution	89
2.9	Produit de Cauchy	93
2.9.1	Suites à supports infinis	94
2.9.2	Suites à supports finis	95
2.10	Exercices	96
3	Séries de Fourier	99
3.1	Introduction	99
3.2	Motivation	99
3.3	Concepts fondamentaux	100
3.3.1	Fonctions périodiques	101
3.3.2	Prolongement périodique	102
3.3.3	Tore $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$	103
3.3.4	Périodicité et dérivation	103
3.3.5	Polynôme trigonométrique	104
3.4	Coefficients de Fourier	104
3.5	Cas des fonctions à valeurs réelles	109
3.6	Convergence ponctuelle	112
3.7	Spectre	116
3.8	Exercices	117

4	Transformée de Fourier	119
4.1	Introduction	119
4.2	Motivation	119
4.3	Transformée de Fourier des fonctions dans L^1	121
4.3.1	Définitions	121
4.3.2	Premières propriétés	122
4.3.3	Transformée de Fourier et dérivation	124
4.3.4	Transformée de Fourier et convolution	126
4.3.5	Transformées de Fourier de fonctions usuelles	127
4.4	Transformée de Fourier inverse	129
4.5	Transformée de Fourier des distributions	131
4.5.1	Approche naïve	131
4.5.2	Espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	132
4.5.3	L'espace des distributions tempérées	134
4.5.4	Propriétés	135
4.6	Distributions périodiques	137
4.6.1	Transformée de Fourier des distributions périodiques	137
4.6.2	Lien entre transformée de Fourier et séries de Fourier	139
4.6.3	Théorème de Shannon-Whittaker	139
4.7	Transformée de Fourier dans L^2	141
4.8	Exercices	141
5	Variantes de la transformée de Fourier	143
5.1	Introduction	143
5.2	Motivation	143
5.3	Transformée de Fourier à temps discret	145
5.3.1	Vers la TFTD	145
5.3.2	Définition	145
5.3.3	Fréquence normalisée	147
5.3.4	Propriétés	147

5.4	Transformée de Fourier discrète	148
5.4.1	Intuition	149
5.4.2	Définition	150
5.4.3	Reconstruction	150
5.4.4	Transformée de Fourier rapide	151
5.5	Transformée de Laplace	151
5.5.1	Transformée de Laplace des fonctions	151
5.5.1.1	Définition	151
5.5.1.2	Exemples	152
5.5.1.3	Propriétés principales	153
5.5.2	Transformée de Laplace des distributions	155
5.5.2.1	Définition	155
5.5.2.2	Exemple	155
5.5.2.3	Propriétés principales	156
5.5.3	Transformée de Laplace unilatérale	156
5.6	Transformée en z	157
5.6.1	Définition	157
5.6.2	Exemples	158
5.6.3	Propriétés principales	159
5.6.4	Retour sur la version unilatérale	160
5.7	Exercices	160
6	Systèmes	163
6.1	Introduction	163
6.2	Motivation et définition	163
6.3	Propriétés des systèmes	164
6.3.1	Linéarité	165
6.3.2	Invariance dans le temps	166
6.3.3	Système linéaire et invariant dans le temps	166
6.3.4	Causalité	167
6.3.5	Statique ou dynamique	168
6.4	Réponses	168
6.5	Systèmes analogiques LIT	169
6.5.1	Équation temporelle	169
6.5.2	Fonction de transfert	170
6.5.3	Exemple	171
6.6	Systèmes numériques LIT	172
6.6.1	Équation temporelle	172
6.6.2	Fonction de transfert	173

6.7	Stabilité des systèmes	174
6.7.1	Définition	174
6.7.2	Cas analogique	175
6.7.3	Cas numérique	176
6.8	RIF ou RII?	178
6.8.1	Définitions et premières propriétés	178
6.8.2	Filtres RIF à phase linéaire	179
6.9	Filtrage	180
6.9.1	Filtrage temporel	180
6.9.2	Filtrage fréquentiel	180
6.10	Exercices	183
7	Signaux aléatoires	187
7.1	Introduction	187
7.2	Motivation	187
7.3	Premières définitions	188
7.4	Signaux IID	191
7.5	Signaux SSS	191
7.6	Signaux SSL	192
7.7	Bruit blanc	194
7.8	Filtrage de signaux aléatoires	195
7.9	Ergodicité	198
7.10	Exercices	199
8	Correction des exercices	203
8.1	Chapitre 1	203
8.2	Chapitre 2	209
8.3	Chapitre 3	216
8.4	Chapitre 4	224
8.5	Chapitre 5	230
8.6	Chapitre 6	237
8.7	Chapitre 7	258
	Bibliographie	283
	Index	285

Table des figures

1.1	Graphe de la fonction signe	22
1.2	Graphe de la fonction de Heaviside	23
1.3	Graphe de la fonction porte	24
1.4	Graphe de la fonction sinus cardinal	25
1.5	Graphe de la fonction sinusoïdale	26
1.6	Graphe de la fonction u_5	27
1.7	Graphe de la fonction φ_1	31
1.8	Graphe de la fonction φ_2	31
1.9	Graphe de la fonction triangle	50
1.10	Graphe de la dérivée de la fonction triangle	51
1.11	Graphe de la fonction F	52
2.1	Graphe de $f * f$	73
2.2	Graphe de $f_+(t) := e^{2t}u(t)$	75
2.3	Graphe de $g_+(t) := e^{-3t}u(t)$	75
2.4	Graphe du produit de convolution de f_+ et g_+	76
2.5	Graphe du produit de convolution de f_+ et f_+	76
2.6	Signal x	98
3.1	Graphe de la fonction f	112
3.2	Graphe de la fonction $S_5(f)$	113
3.3	Graphe de la fonction f	114
3.4	Graphe de la fonction $S_5(f)$	114
3.5	Spectre d'amplitude de f	116
3.6	Spectre de phase de f	116

6.1	Un circuit électronique	171
6.2	Tracé du gain en décibels	182
6.3	Tracé de la phase	182
8.1	Graphe de la fonction porte	205
8.2	Graphe de la fonction $f(x) := e^{\lambda x} u(x)$	205
8.3	Graphe de la fonction f	206
8.4	Graphe de la fonction f'	207
8.5	Graphe de la fonction $x \mapsto u(x) \frac{\sin(\omega x)}{\omega}$	208
8.6	Graphe de la fonction f'_2	208
8.7	Graphes des fonctions f et g (Exercice 12)	210
8.8	Réponse dans le cas d'une extension avec des valeurs nulles	215
8.9	Réponse dans le cas d'une extension cyclique	215
8.10	Graphe de la fonction f avec $\alpha = 2$ (Exercice 19)	216
8.11	Graphe de la fonction f (Exercice 20)	217
8.12	Graphe de la fonction f (Exercice 21)	218
8.13	Graphe de la fonction f (Exercice 22)	219
8.14	Graphe de la fonction f (Exercice 23)	220
8.15	Spectre de f (Exercice 24)	223
8.16	Spectre de f (Exercice 25)	224
8.17	Signal x	228
8.18	Module de la transformée de Fourier avec $D = 10$	229
8.19	Module et phase de la transformée de Fourier à temps continu	230
8.20	Module et phase de la transformée de Fourier à temps discret	231
8.21	Module et phase de la transformée de Fourier à temps discret	232
8.22	Module et phase de la transformée de Fourier à temps discret	233
8.23	Spectre d'amplitude du signal bruité Y	234
8.24	Spectre d'amplitude du signal bruité échantillonné	234
8.25	Le système n'est pas invariant dans le temps	238
8.26	Gain en décibels avec $\tau = \frac{1}{2\pi}$	241
8.27	Phase de la transformée de Fourier de la RI	242
8.28	Réponse impulsionnelle dans le cas où $\alpha = 1$	243
8.29	Fonction de transfert	244
8.30	Phase de la transformée de Fourier de la RI	244
8.31	Réponse impulsionnelle	245
8.32	Module de la TFTD de la RI	246
8.33	Phase de la TFTD de la RI	246
8.34	Tracé approximatif de $t \mapsto x(t)$	247
8.35	Tracé approximatif de $u \mapsto \hat{X}(u) $	248
8.36	Tracé approximatif de la TFD de x	248
8.37	Module de la TFD de y	249
8.38	Tracé approximatif de $n \mapsto y[n]$	249
8.39	Réponse impulsionnelle	250

8.40	Module de la TFTD de la RI	250
8.41	Phase de la TFTD de la RI	251
8.42	Module de la TFD de $y^{(2)}$	251
8.43	Tracé approximatif de $n \mapsto y^{(2)}[n]$	252
8.44	Réponse impulsionnelle si $a_1 = 0,5$	253
8.45	Réponse impulsionnelle si $a_1 = -0,5$	253
8.46	Fonction de transfert si $a_1 = 0,5$	254
8.47	Fonction de transfert si $a_1 = -0,5$	255
8.48	Réponse indicielle si $a_1 = \frac{1}{2}$	256
8.49	Réponse indicielle si $a_1 = -\frac{1}{2}$	257
8.50	Densité spectrale de puissance de Y	261
8.51	Densité spectrale de puissance de Z	265
8.52	Fonction d'autocorrélation de X (avec $a = 2$, $b = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$)	266
8.53	Densité de probabilité de X_t (avec $a = 2$ et $b = 9$)	267
8.54	Fonction de répartition de X_t (avec $a = 2$ et $b = 9$)	267
8.55	Graphe de la fonction $r_{Y_1 Y_2}^s$	274
8.56	Graphe de la fonction $r_{Y_1 Y_3}^s$	275
8.57	Graphe de la fonction $r_{Y_2 Y_3}^s$	276
8.58	Réponse impulsionnelle si $b = 0$	278
8.59	Module de la fonction de transfert si $b = 0$	278
8.60	Phase si $b = 0$	279
8.61	Fonction d'autocorrélation si $\sigma_X^2 = 1$	281

Notations

- $:=$ signifie que l'on introduit une quantité ou qu'on l'implémente.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, celui des entiers relatifs et celui des rationnels.
- $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ désigne le coefficient binomial.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ celui des réels positifs, $\mathbb{R}^*$ celui des réels non nuls et $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des réels strictement positifs.
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des complexes.
- i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
- $\Re(z)$ désigne la partie réelle du complexe z tandis que $\Im(z)$ est sa partie imaginaire.
- z^* désigne le conjugué du complexe z .
- $e^x = \exp(x)$ désigne l'exponentielle de x .
- $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .
- $\log$ désigne le logarithme népérien et $\log_{10}$ désigne le logarithme décimal.
- u désigne la fonction de Heaviside : $u(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $u(x) = 0$ sinon.
- $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A : $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
- $[a, b]$ est l'ensemble des réels tels que $a \leq x \leq b$ quand $a < b$ tandis que $\llbracket a, b \rrbracket$ désigne l'intersection $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
- $\mathcal{C}^0$ est l'ensemble des fonctions continues, $\mathcal{C}^1$ celui des fonctions dérivables et de dérivées continues, $\mathcal{C}^2$ celui des fonctions deux fois dérivables et de dérivées secondes continues et enfin $\mathcal{C}^\infty$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables.
- $\text{Supp}(f)$ est le support de la fonction f .

- φ et ψ désignent des fonctions tests. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions tests.
- S , T et U désignent des distributions.
- $\delta = \delta_0$ désigne la distribution de Dirac en 0 et δ_a est celle au point a .
- $\langle T; \varphi \rangle$ est le scalaire obtenu en appliquant T à φ .
- $\|f\|_\infty$ est la norme infinie de f c'est-à-dire $\sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $\|f\|_{\infty, \Omega}$ est la norme infinie de f sur le compact Ω .
- $\mathcal{D}'$ est l'ensemble des distributions et $\mathcal{D}'_+$ celui des distributions causales.
- L^1 est l'ensemble des fonctions f sommables. Ainsi, il s'agit de l'ensemble des fonctions f telles que $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$ et pour tout réel $p \geq 1$, L^p est l'ensemble des fonctions f telles que $\int_{\mathbb{R}} |f|^p < \infty$.
- L^1_{loc} est l'ensemble des fonctions f localement sommables c'est-à-dire telles que pour tout $R > 0$, on a $\int_{-R}^R |f(x)| dx < \infty$ et L^2_{loc} est l'ensemble des fonctions f telles que $|f|^2 \in L^1_{\text{loc}}$.
- T_f désigne la distribution régulière associée à $f \in L^1_{\text{loc}}$.
- $*$ désigne le produit de convolution.
- $\mathcal{C}^{0,m}$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux et $\mathcal{C}_T^{0,m}$ est celui des fonctions continues par morceaux et T -périodiques.
- Pour toutes les fonctions f et g dans $\mathcal{C}_T^{0,m}$, $(f | g)$ désigne leur produit hermitien c'est-à-dire : $(f | g) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)^* dt$.
- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des fonctions à décroissance rapide et $\mathcal{S}'$ est celui des distributions tempérées.
- $x[n]$ désigne le n -ième terme d'une suite x .
- La réponse impulsionnelle d'un système LIT est notée h et sa fonction de transfert est notée H .
- $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{E}\{Z\}$ désignent l'espérance de la variable aléatoire Z et $\text{Var}(Z)$, $\text{Var}[Z]$ ainsi que $\text{Var}\{Z\}$ en désignent la variance.
- La fonction d'autocorrélation du signal X est $r_{XX}(t_1, t_2) := \mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2}^*]$ et sa fonction d'autocorrélation stationnaire est $\tau \mapsto r_{XX}^s(\tau) := r_{XX}(0, \tau)$ où l'on a posé $\tau := t_2 - t_1$.
- L'autocovariance de X est $c_{XX}(t_1, t_2) := r_{XX}(t_1, t_2) - \mathbb{E}[X_{t_1}]\mathbb{E}[X_{t_2}]^*$ et sa fonction d'autocovariance stationnaire est $\tau \mapsto c_{XX}^s(\tau) := c_{XX}(0, \tau)$.
- La densité spectrale de puissance du signal X est notée S_X ou $\widehat{R_{XX}^s}$.

Théorie des distributions

1.1 Introduction

Les prérequis à ce chapitre sont l'intégration (avec notamment une facilité concernant l'intégration par parties et le changement de variables), des bases d'algèbre linéaire mais aussi des notions élémentaires de topologie pour les suites de fonctions.

L'objectif principal du chapitre est la découverte de la notion de distribution ; ce qui passe par une section sur les fonctions tests ainsi qu'une section sur les fonctions usuelles en mathématiques des signaux. Les propriétés principales des distributions sont données. Puis, nous verrons comment dériver et primitiver une distribution avant d'étudier des équations impliquant des distributions. Une dernière section d'exercices vient conclure le chapitre.

Idéalement, à l'issue de la lecture attentive de ce chapitre, il faudrait être en mesure de pouvoir résoudre chacun de ses exercices.

1.2 Pourquoi les distributions ?

Avant de se plonger dans la théorie des distributions et son cortège de lemmes, de propositions, de théorèmes et d'exemples, nous souhaitons démontrer son intérêt aussi bien théorique que pratique, voire philosophique. Bien plus qu'un simple caprice de mathématiciens, la notion de distribution émerge naturellement dès que l'on considère certaines expériences physiques où la modélisation habituelle en termes de fonctions échoue à rendre compte de la réalité physique. À dire vrai, les sciences physiques regorgent de situations pratiques voire expérimentales de ce genre. Listons-en quelques unes dans ce paragraphe. On peut penser au choc de solides durs pour lesquels la mécanique classique de Newton entraîne un changement brusque de comportement. Par exemple, un coup de poing sur un front est un contact dur entre solides. Autre exemple : un bouliste qui tire sur la boule d'un adversaire. Dans tous les cas, il s'agit d'une répulsion des champs d'électrons des deux objets.

On peut penser à la réfraction en optique géométrique quand la lumière se retrouve déviée au contact d'un dioptré qui sépare l'eau et l'air. Ledit dioptré est-il infiniment fin ? La lumière décide-t-elle de suivre les lois de Descartes automatiquement ? Peu crédible. On peut penser à la frontière entre liquide et gazeux à la surface d'un lac. A-t-on le gaz pur au-dessus et le liquide pur en-dessous ? Non, il y a dans la frontière entre les deux phases un continuum. Mais, *in fine*, nous n'observons pas tant de détails à l'échelle macroscopique. On peut penser à l'interrupteur que l'on allume et instantanément, la lumière apparaît. On peut penser à l'ouverture d'un robinet d'eau et instantanément, l'eau coule. On peut penser à un homme qui pousse une armoire qui demeure immobile et finit finalement par bouger tout d'un coup.

Le point commun entre ces différentes situations est le suivant. Il y a dans un intervalle de temps très bref (à tel point qu'on ne semble pas en mesure de le voir autrement que comme un instant) une bifurcation de comportement. De fait, comme ce qui est infiniment petit nous échappe, la modélisation classique en terme de fonctions qui à tout point x (que ce soit $\mathbb{R}$ pour le temps, $\mathbb{R}^3$ pour l'espace, $\mathbb{R}^4$ pour l'espace-temps) associe une quantité $f(x) \in \mathbb{R}$ semble peu judicieuse.

Il existe encore bien d'autres situations où les physiciens et les mathématiciens ont ressenti un besoin de formalisme quant à la théorie des distributions. Ainsi, la notion de fonction peut être inadaptée aux besoins pour la modélisation ou pour les calculs. Notamment, aucune fonction ne saurait rendre compte de ce qu'est une masse volumique ponctuelle, une charge électrostatique ponctuelle, la température précise en un point donné, un dipôle électrique dont les deux pôles sont infiniment proches... La physique quantique nous enseigne par exemple que la distance de Planck est inviolable et donc que la limite vers 0 de la distance (ou du temps) est parfois peu judicieuse. Heureusement, on se contente alors de regarder certaines observables ; comme en dynamique moléculaire. Ici, les observables voient leur rôle tenu par les fonctions tests tandis que les distributions seront des fonctionnelles sur un espace commode d'observables. En fait, la seule et unique question qu'il faille se poser est celui de l'adéquation des outils mathématiques aux besoins des physiciens pour expliquer le monde qui nous entoure. Le monde de l'infiniment petit nous échappe. Nous ne saurons jamais ce qu'il se passe réellement et il nous faut l'accepter. La seule chose qui compte : les théories mises au point sont-elles en accord avec ce que l'on observe dans le monde macroscopique ? Vu que les distributions sont encore enseignées de nos jours, on se doute de la réponse. Certes, il y a changement de paradigme et l'on ne regarde plus seulement la valeur de la fonction en un point (ce qui n'était déjà plus le cas avec la théorie de l'intégration de Lebesgue pour laquelle la valeur précise sur un ensemble de mesure nulle n'affecte pas l'intégrale de ladite fonction). Mais cela nous offrira un formalisme général pratique pour l'étude mathématique comme l'étude physique.

Il y a encore bien d'autres raisons pour considérer la notion de distribution comme donner un sens rigoureux à la fonction de Dirac, nulle partout sauf en 0 et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1. Notamment, cette distribution a le bon goût d'être l'élément neutre pour le produit de convolution, voir Chapitre 2. Et, il est intéressant de noter qu'aucune fonction ne peut assumer ce rôle d'élément neutre.

Enfin, mentionnons les équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont omniprésentes comme les équations de Maxwell pour la propagation des ondes, l'équation de la chaleur et ses variantes (en dynamique des populations, en physique des plasmas, en chimiotaxie...) et beaucoup d'autres. Il est simple d'en résoudre certaines quand on suppose que les conditions initiales sont suffisamment régulières. Néanmoins, à la moindre singularité, il devient impossible de donner du sens aux solutions dites fortes (celles que l'on se représente comme des fonctions). C'est pourquoi il est nécessaire d'adopter un point de vue original pour traiter de la notion de solution. C'est ce qui a abouti au concept de solutions faibles, lesquelles sont vues comme des distributions.

1.3 Fonctions usuelles

Dans cette section, nous présentons des fonctions que nous serons amenés à rencontrer régulièrement dans le cadre des mathématiques des signaux et des systèmes. Pour commencer, nous présentons la fonction Sign (qui renvoie le signe d'un réel) et la fonction de Heaviside. Cette dernière est d'un intérêt crucial puisque tout signal causal (la définition est donnée subséquentement) est le produit d'une fonction et de la fonction de Heaviside.

Puis, nous parlons des fonctions portes, lesquelles sont essentielles dès que l'on manipule la transformée de Fourier (voir le Chapitre 4) dans des cas réels (c'est-à-dire si l'on suppose que l'acquisition du signal se fait sur une durée déterminée). Nous passons ensuite à la fonction sinus cardinal ; laquelle correspond justement à la transformée de Fourier d'une fonction porte symétrique.

Par la suite, nous abordons les signaux dits monochromatiques (ou de manière moins cryptique, les fonctions sinusoïdales). Enfin, nous terminons cette section par l'étude de la « fonction de Dirac » ; ce qui est en soit un abus de langage puisque cette fonction n'existe pas à proprement parler.

1.3.1 Fonction signe

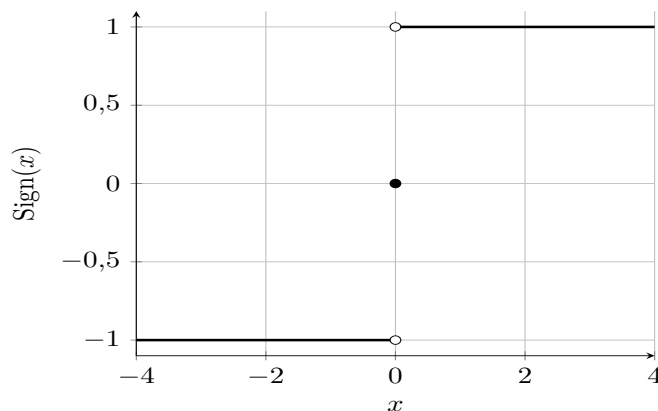
La fonction signe vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$, -1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et prend n'importe quelle valeur finie en 0. En effet, la valeur en un point précis n'a pas de sens profond pour peu que l'on se place dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Par convention, on choisit généralement de lui donner la valeur 0. Ainsi, la fonction signe est dite équilibrée ; c'est-à-dire qu'en tout point x_0 de $\mathbb{R}$, on dispose de l'égalité $f(x_0) = \frac{1}{2} \left(f(x_0^+) + f(x_0^-) \right)$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\text{Sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Voici le graphe de la fonction Sign :

FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction signe



Remarque 1.3.1. Cette fonction n'est pas continue en 0 et bien qu'elle soit constante par morceaux, a fortiori elle n'est pas dérivable. Toutefois, nous verrons par la suite que la dérivée de cette fonction a un sens si on prend un angle d'attaque original : celui des distributions.

1.3.2 Fonction de Heaviside

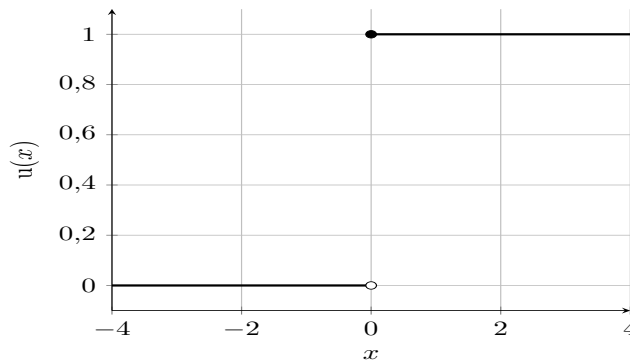
La fonction de Heaviside, notée u , est définie ainsi :

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

On remarque que la valeur 1 a été choisie pour $u(0)$. Il est important de rappeler que la valeur précise en un point n'a aucun impact pour l'intégration au sens de Lebesgue (avec la mesure de Lebesgue). Ainsi, quelle que soit la valeur choisie, les deux fonctions sont presque partout égales et de fait, les distributions qui en dérivent sont égales. Il s'ensuit que l'on choisit de poser $u(0) := 1$ pour simplifier. Cela dit, la fonction u n'est alors pas équilibrée. Notons que la fonction de Heaviside porte aussi le nom d'échelon unité.

Voici le graphe de la fonction u :

FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction de Heaviside



Remarque 1.3.2. La fonction de Heaviside est parfois notée H plutôt que u . En effet, la première lettre de « Heaviside » est bien un « H ». Se pose alors la question suivante : pourquoi la noter u ? Il s'avère en fait que dans cet ouvrage, nous allons travailler sur les signaux mais aussi sur les systèmes. Et, pour peu que le système soit linéaire et invariant dans le temps (LIT), il est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle. La transformée de Fourier de celle-ci ou sa transformée de Laplace voire sa transformée en z , que l'on nomme « fonction de transfert », se note généralement H . Ceci explique donc le choix que nous avons effectué pour désigner la fonction de Heaviside dans ce livre.

Remarque 1.3.3. On peut observer : $u(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{Sign}(x))$ pour tout $x \neq 0$. Les deux fonctions sont donc presque partout égales.

Remarque 1.3.4. À nouveau, cette fonction n'est pas continue et donc elle n'est pas non plus dérivable. Au sens classique du moins...

1.3.3 Fonction porte

La fonction porte sur l'intervalle fermé $[a, b]$ avec $a < b$, est définie de façon similaire aux deux précédentes :

$$\Pi(x; a, b) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}.$$

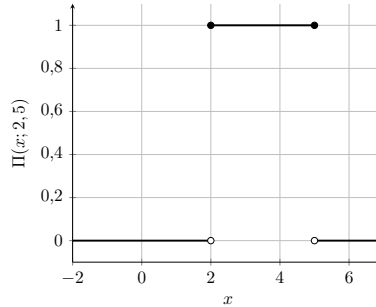
Ainsi, on peut aussi écrire

$$\Pi(x; a, b) = \mathbf{1}_{[a, b]}(x).$$

Remarque 1.3.5. La fonction porte est parfois notée $\Pi_{[a, b]}$.

Cette fonction porte est aussi appelée « signal rectangle » ou « créneau ». Voici le graphe de la fonction porte lorsque $a = 2$ et $b = 5$:

FIGURE 1.3 – Graphe de la fonction porte



Proposition 1.3.6. Pour tous les réels a et b tels que $a < b$, on observe :

$$\Pi(x; a, b) = u(x - a) - u(x - b), \quad (1.1)$$

pour tout $x \notin \{a; b\}$; c'est-à-dire pour presque tout x réel.

Démonstration. Pour tout $x < a$, on a $x - a < 0$ et $x - b < 0$.

Ainsi, on a $u(x - a) = u(x - b) = 0$ et l'égalité (1.1) s'ensuit pour $x < a$. De même, si $x > b$, alors $x - a > 0$ et $x - b > 0$ et donc $u(x - a) = u(x - b) = 1$ d'où $u(x - a) - u(x - b) = 1 - 1 = 0 = \Pi(x; a, b)$. Enfin, si $a < x < b$, alors $x - a > 0$ et $x - b < 0$ d'où $u(x - a) - u(x - b) = 1 - 0 = 1 = \Pi(x; a, b)$.

□

Remarque 1.3.7. *Comme pour la fonction signe et pour celle de Heaviside, cette fonction est constante par morceaux mais elle n'est pas continue et on ne peut donc pas la dériver au sens des fonctions.*

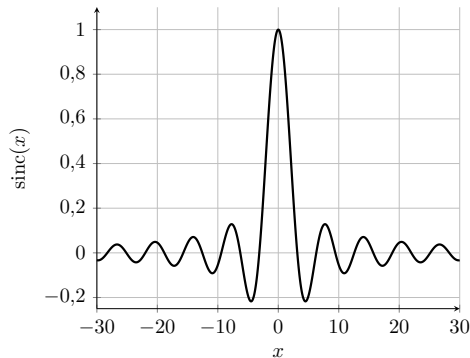
1.3.4 Fonction sinus cardinal

La fonction sinus cardinal est définie comme étant presque partout le quotient de la fonction sinus par la fonction identité. Cette fonction peut être définie par continuité en 0 ; la valeur étant alors prise comme étant égale à 1. On l'appelle également « fonction d'interpolation », voir le théorème 4.6.3 à la page 139. Ainsi, on a l'égalité suivante :

$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}.$$

Voici le graphe de la fonction sinc :

FIGURE 1.4 – Graphe de la fonction sinus cardinal



On observe que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\text{sinc}(\pi k) = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = 0$ mais aussi

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \text{sinc}(x) = 0.$$

Ainsi, cette fonction se dissipe au cours du temps mais l'on observe des rebonds réguliers ; lesquels causeront des soucis quand on prendra la transformée de Fourier d'un signal acquis sur un intervalle de temps borné, voir la page 128.

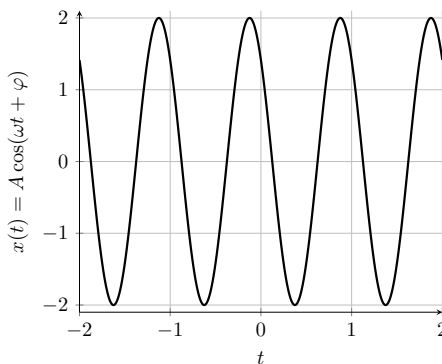
1.3.5 Signal monochromatique

Un signal x monochromatique est un signal qui n'admet qu'une seule fréquence. Il s'agit en fait d'une fonction sinusoïdale : $x(t) := A \cos(\omega t + \varphi)$ où $A > 0$ est l'amplitude du signal, ω sa pulsation et φ sa phase initiale. Notons que la quantité $2A$ porte le nom d'amplitude crête à crête. On rappelle enfin que l'on peut écrire x sous forme d'exponentielles complexes en utilisant la formule d'Euler :

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{i\varphi} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{-i\omega t}.$$

Donnons maintenant une représentation graphique d'un tel signal avec $A = 2$, $\omega = 2\pi$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

FIGURE 1.5 – Graphe de la fonction sinusoïdale



1.3.6 Fonction de Dirac

Parler de fonction de Dirac est un abus de langage. Ainsi, une telle fonction n'existe pas réellement. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons prendre quelques libertés avec la rigueur mathématique. De fait, il est crucial de bien comprendre que ce qui suit est une élaboration intuitive menant dans un paragraphe subséquent à la définition sérieuse de la *distribution* de Dirac.

Définition 1.3.8. *La distribution de Dirac est la dérivée de la fonction u .*

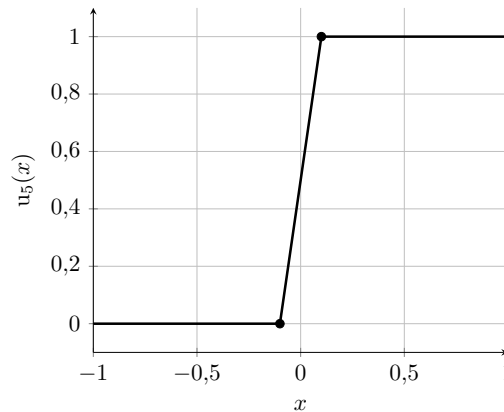
Cependant, la notion de distribution de même que la notion de dérivation de fonctions discontinues n'ont pas encore été abordées.

C'est pourquoi l'on va approximer la fonction de Heaviside par le procédé suivant. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrairement grand. Alors, on pose

$$u_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2} + nx & \text{si } -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases} .$$

Cette fonction est bien continue sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable presque partout, comme on peut le constater sur le graphe ci-après avec $n = 5$.

FIGURE 1.6 – Graphe de la fonction u_5



Sa dérivée au sens usuel existe donc bien et il s'agit de la fonction suivante :

$$u'_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2n} \\ n & \text{si } -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2n} \end{cases} .$$

On observe : $u'_n(x) = n\Pi\left(x; -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)$ où Π est introduite à la page 24.

Également, la fonction u_n converge simplement vers u c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x) - u(x)| = 0.$$

Et, on peut même remarquer que la convergence est uniforme sur tout compact qui ne contient pas 0. On constate par ailleurs que $u'_n(x)$ tend vers 0 pour tout $x \neq 0$ tandis que $u'_n(0) \rightarrow +\infty$. Toutefois, on dispose de l'invariance de son intégrale sur tout $\mathbb{R}$. En d'autres termes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'_n(x) dx = 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On serait donc tenté de dire que la fonction de Dirac est la limite quand n tend vers l'infini de u'_n . Cette limite - que l'on note δ - est bien une fonction et on la définit comme suit :

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Toutefois, bien que cette fonction de Dirac admette une intégrale au sens de Lebesgue, cette intégrale est égale à

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 0.$$

On est ainsi face à un problème et il nous faudra le pallier.

1.4 Espace des fonctions tests

L'espace des distributions n'étant rien de moins que le dual topologique (notion que l'on n'aborde pas ici) de l'espace des fonctions tests, on commence par introduire ce dernier espace.

Définition 1.4.1. *Un espace fonctionnel $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel tel que tous ses éléments sont des fonctions.*

Ces fonctions peuvent être à valeurs réelles ou complexes. Elles peuvent aussi être multi-dimensionnelles.