

PÉDAGOGIES POUR DEMAIN

DIDACTIQUES

C

OMPRENDRE

Illustrations de PEF

DES ÉNONCÉS, RÉSoudre DES PROBLÈMES

Alain Descaves

PÉDAGOGIES POUR DEMAIN

DIDACTIQUES
1^{er} DEGRÉ

COMPRENDRE DES ÉNONCÉS, RÉSOUTDRE DES PROBLÈMES

Alain Descaves

Illustrations de PEF

 **HACHETTE**
Éducation

L'auteur

Alain Descaves est formateur à l'I.U.F.M. de Picardie à Beauvais. Il participe à des travaux de recherche dans le cadre des IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques). Membre de la COPIRELEM (Commission permanente IREM pour l'école élémentaire), il mène également une recherche sur les questions du sens lié à la production et à la compréhension de l'écrit mathématique.

ISBN 978-2-01-181635-1

Cet ouvrage a été réalisé par l'Atelier d'édition européen, 75002 Paris

Création maquette : *Insolence*

Couverture : *Studio Favre-Lhaïk*

© HACHETTE LIVRE 1992. 43, quai de Grenelle, 75905 Paris Cedex 15

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les « analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite.

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Sommaire

Partie 1 : L'activité de résolution de problèmes

Résoudre des problèmes de mathématiques appliquées	6
Comprendre l'énoncé et construire la représentation du problème	18
Mathématiser et mettre en signes	29
Mettre en œuvre des stratégies et des procédures de résolution	51

Partie 2 : Les problèmes numériques

Résoudre les problèmes à une opération	66
Résoudre les problèmes à plusieurs opérations	82
Résoudre des problèmes pour construire des savoirs	89

Partie 3 : La régulation de l'action pédagogique

Développer les interactions et le discours des élèves	100
Réguler son action pédagogique	120

Partie 4 : L'apprentissage par résolution de problèmes

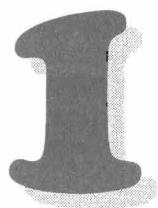
Résoudre des problèmes dans toutes les disciplines	140
Les résultats de la recherche scientifique	160
Le désir de connaître	177

Donner du sens à l'enseignement des mathématiques

Énoncés de problèmes étudiés

191





L'activité de résolution de problèmes

Résoudre des problèmes de mathématiques appliquées nécessite un questionnement sur la nature des objets mathématiques qui, à la fois, modélisent les phénomènes empiriques et conquièrent progressivement leur autonomie.

Résoudre un problème de mathématiques consiste :

- à comprendre l'énoncé et à construire une représentation ;*
- à le mathématiser et à le mettre en signes ;*
- à mettre en œuvre des stratégies et des procédures de résolution.*

Ces phases sont indissociables, mais il est possible de mettre en place des apprentissages spécifiques.

C'est dans l'alternance des activités de résolution de problèmes de différents types et des activités d'application et d'automatisation que les savoirs mathématiques des élèves s'élaborent et prennent sens.

SOMMAIRE

Résoudre des problèmes de mathématiques appliquées	6
Comprendre l'énoncé et construire la représentation du problème.....	18
Mathématiser et mettre en signes	29
Mettre en œuvre des stratégies et des procédures de résolution.....	51

Résoudre des problèmes de mathématiques appliquées

Qu'est-ce que les mathématiques appliquées ?	6
La nature des activités mathématiques	9
Le statut des mathématiques	9
Qu'est-ce que l'objet mathématique ?	10
Qu'est-ce qu'une idéalité mathématique ?	11
À quoi l'écrit mathématique renvoie-t-il ?	12
Schématisation des concepts et modélisation des phénomènes	12
La grammaire mathématique	14
Les deux manières de considérer les mathématiques	14
Comment envisager l'activité mathématique ?	15

L'opposition, que l'on retrouve souvent dans les débats pédagogiques, entre mathématiques fondamentales et appliquées, recoupe généralement des oppositions plus vagues comme :

abstrait/concret ;
théorie/pratique ;
difficile/facile.

Il est utile de clarifier cette question.

Qu'est-ce que les mathématiques appliquées ?

Le mathématicien Ivar Ekeland définit les **mathématiques appliquées** comme un champ qui consiste à apporter des solutions à des problèmes concrets. Elles nécessitent trois étapes.

1. La résolution théorique du problème ;
2. La mise au point d'un algorithme ;
3. L'exécution de l'algorithme par une machine.

Un problème de mathématiques appliquées peut présenter des difficultés lors de la résolution théorique et de la mise au point de l'algorithme. La recherche passe par une réflexion sur la nature des objets mathématiques ou sur les rapports entre mathématiques et réalité.

Cette remarque n'est pas valable uniquement pour le mathématicien professionnel. Nous donnerons deux exemples au cycle des approfondissements.

La bouteille de lait (cycle 3)

Fiche 1

Le texte suivant, de Gérard Perrot, R Charnay et S. Gorlier⁽¹⁾, a été donné aux élèves de plusieurs classes de CM.

«Le lait est excellent pour la santé des enfants. C'est pour cela que dans certaines écoles, en France et en Angleterre, on sert à chaque écolier un grand verre de lait, à la récréation du matin. Mais parfois, cela pose des problèmes ; il ne faut pas gaspiller de lait en ouvrant trop de bouteilles, car le lait tourne.

Dans une école, les élèves de la classe de CM1 ont constaté qu'avec une bouteille on remplit 8 verres et qu'il reste un fond. Avec 5 fonds on remplit exactement un verre.»

Pour des élèves qui n'ont encore qu'une connaissance sommaire des fractions (par exemple la connaissance, liée à des pratiques sociales, du *demi* et du *quart*, qu'ils savent souvent écrire $1/2$ et $1/4$), le problème consiste à *faire être* un nouveau nombre, dont la propriété caractéristique est que son produit par 5 est égal à 1.

Sachant que :

$$1/2 + 1/2 = 1$$

Par généralisation inductive, les élèves peuvent nommer, donc *faire être* le nombre $1/5$ qui modélise cette situation. Ce nombre est tel que :

$$1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 = 1$$

ou

$$1/5 \times 5 = 1$$

Donc, sans savoir comment s'écrit ce nombre dans le système de numération décimale, ni même s'il est décimal, il est possible de commencer à l'étudier en tant qu'objet et de s'en servir en tant qu'outil.

Nous avons observé que des élèves cherchant combien de verres on peut remplir avec 4 bouteilles écrivent :

$$(8 + 1/5) \times 4 = (8 \times 4) + (1/5 \times 4) = 32 + 4/5$$

ou bien encore avec 5 bouteilles :

$$(8 + 1/5) \times 5 = (8 \times 5) + (1/5 \times 5) = 40 + 5/5 = 40 + 1 = 41$$

et développent ainsi une activité de production d'écrits mathématiques.

D'autre part, nous avons observé que des élèves font le lien avec le décimal 0,2, écrivent $1/5 = 0,20$ (5 fois 20 centimes font 1 franc), et passent de l'écriture *fractionnaire* à l'écriture *décimale*. Notons au passage que la fraction est ontologiquement antérieure au décimal, principe nié malheureusement par de nombreux manuels scolaires.

1. *Math Hebdo CM1*, Hachette Écoles, 1984.

L'exemple de la fiche 1 montre qu'il n'est pas possible de séparer les mathématiques appliquées des mathématiques fondamentales.

Les mathématiques fondamentales s'occupent plus particulièrement des propriétés et de la nature des symboles mathématiques, des règles qui agissent sur ces symboles, et de celles des objets et des structures mathématiques.

Par contre la difficulté, dans la résolution du problème de la fiche 2, se situe au niveau de la phase 2 de la définition d'Ivar Ekeland, c'est-à-dire de la mise au point d'un algorithme, alors que dans le premier exemple elle se situe au niveau de la phase 1.

À partir de deux exemples (fiche 1 et fiche 2), il est possible de faire la distinction entre **mathématiques existentielles** et **mathématiques algorithmiques**. Pour résoudre le premier il faut faire exister un nouvel objet mathématique $1/5$, et il n'est pas forcément utile de connaître son écriture décimale; on peut donc parler de mathématiques *existentielles*. Pour le second, il faut mettre au point un algorithme permettant de calculer son écriture décimale; il s'agit ici de mathématiques *algorithmiques*.

Fiche 2

Les Vingt-quatre heures (cycle 3)

Ce second texte d'Atout Math CM1 a été donné à des élèves de CM1 en début d'année et à des élèves de CE2 en milieu d'année.

«Le vainqueur de la célèbre course automobile les Vingt-Quatre Heures sur la piste a parcouru la distance de 4 312 km, sur un circuit qui mesure comme chacun sait 14 km.»

Ces élèves, qui, au mieux, connaissaient la technique opératoire de la division sous forme de puissance, avec un seul chiffre au diviseur, ont été amenés à rechercher le nombre de tours à partir de procédures plus *archaïques*, notamment en ajoutant autant de fois qu'il convient le nombre 14 à lui-même, ou en procédant par essais successifs, c'est-à-dire en multipliant 14 par des nombres jusqu'à l'obtention d'un produit se rapprochant le plus possible de 4 312.

C'est en développant, en combinant et en réorganisant trois types de procédures, basées respectivement sur des additions successives, des soustractions successives et des multiplications, et notamment par construction des tables de 14, 10×14 et 100×14 , que les élèves construisent un algorithme de la division, et donnent du sens à la technique de la *puissance*.

Un problème complet de mathématiques *appliquées* comporte ces deux aspects, et on ne saurait confondre mathématiques appliquées et mathématiques algorithmiques.

Ainsi pouvoir postuler l'existence du nombre $1/3$ comme solution de l'équation $3 \times x = 1$ ou $3 \times . = 1$, et rechercher un algorithme donnant ses décimales (0,333...) dans le système de numération décimale, sont deux problèmes complémentaires, la résolution du premier étant nécessaire à celle du second.