

FRANCK ELLUL

---

# **MATHS LICENCE LES 150 THÉORÈMES D'ANALYSE INCONTOURNABLES**

---

**Assimilez les démonstrations  
et raisonnements par la pratique**

---

**DUNOD**

Direction et conception graphiques de la couverture : Nicolas Wiel et Pierre-André  
Gualino (Graphiste)

© Dunod, 2025  
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)  
ISBN 978-2-10-088189-5

## Avant-propos

Découvrez, à travers une série de problèmes résolus, les démonstrations des grands théorèmes et des résultats fondamentaux du programme d'analyse des premières années universitaires et des classes préparatoires.

Cet ouvrage présente les démonstrations des principaux théorèmes et résultats mathématiques sous forme d'exercices corrigés. Il offre ainsi une approche pratique et interactive de l'apprentissage des mathématiques vous faisant découvrir ou redécouvrir ces théorèmes et résultats de manière approfondie et engageante. Ainsi, ce véritable outil polyvalent propose une exploration stimulante des théorèmes et résultats essentiels, qui vous fera plonger au cœur des concepts mathématiques pour en saisir toute la profondeur. Chaque démonstration est menée de manière claire et détaillée, sous forme de problèmes résolus, permettant ainsi aux lecteurs non seulement de "faire des maths", mais aussi de comprendre les étapes cruciales des démonstrations et les conditions de leur application.

Ce livre est bien plus qu'un simple recueil d'exercices corrigés ou une compilation de démonstrations mathématiques. C'est un véritable instrument d'apprentissage, qui vous fera plonger dans le monde fascinant de l'analyse. Que ce soit pour consolider des connaissances existantes, se préparer à des examens ou à un concours, ou simplement nourrir votre curiosité mathématique, vous y trouverez dans cet ouvrage une ressource précieuse.

Il est important de noter que la sélection des théorèmes n'est pas exhaustive ni rigoureusement alignée sur les programmes en vigueur en licence ou en classes préparatoires. Le livre ne se substitue donc pas aux cours de mathématiques traditionnels, mais propose une lecture plus globale et transversale des concepts mathématiques. Cependant, il a l'ambition d'être autonome, car les théorèmes sont présentés dans une progression logique et tous sont démontrés, sauf indication contraire, les uns jouant le rôle de lemme ou de corollaire des autres.

Chaque section relative à un théorème ou à une série de résultats clés est généralement structurée selon les rubriques suivantes :

- **Prérequis et niveau mathématique** : liste des notions prérequisées et niveau de difficulté (de 1 à 4 losange(s)).
- **Contexte** : définitions et cadre théorique des concepts abordés.
- **Résultats** : énoncés du théorème et des résultats de la partie mathématique étudiée.
- **Historique** : clin d'œil historique et présentation d'un mathématicien.
- **Sujet** : problème mathématique menant à la démonstration des résultats énoncés ci-dessus
- **Correction** : solution détaillée du sujet.

**Remerciements :**

Je tiens à remercier Jean-Marie Monier pour son travail incomparable de relecture et Laetitia Jammet pour sa confiance et son écoute attentive.

Je dédie ce manuel, à ma femme Virginie, à mes trois enfants (Blanche, Jane et Mano) et à mes parents...

Franck Ellul

# Table des matières

|            |                                                                              |           |
|------------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Les suites numériques</b>                                                 | <b>3</b>  |
| 1          | L'inégalité triangulaire . . . . .                                           | 5         |
| 2          | Caractérisations de la borne supérieure . . . . .                            | 9         |
| 3          | Les grands théorèmes des suites convergentes . . . . .                       | 11        |
| 4          | Propriété d'Archimède et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ . . . . . | 18        |
| 5          | Théorèmes des suites adjacentes et des segments emboîtés . . . . .           | 20        |
| 6          | Théorème de Bolzano-Weierstrass et applications . . . . .                    | 23        |
| <br>       |                                                                              |           |
| <b>II</b>  | <b>Espaces vectoriels normés</b>                                             | <b>29</b> |
| 1          | Contexte . . . . .                                                           | 31        |
| 2          | Caractérisation séquentielle d'un fermé . . . . .                            | 36        |
| 3          | Normes sur un espace vectoriel . . . . .                                     | 39        |
| 4          | Adhérence et valeur d'adhérence . . . . .                                    | 43        |
| 5          | Théorème de Borel-Lebesgue . . . . .                                         | 48        |
| 6          | Fonctions continues sur un compact . . . . .                                 | 53        |
| 7          | Théorème de Heine . . . . .                                                  | 54        |
| 8          | Compacité en dimension finie . . . . .                                       | 56        |
| 9          | Espaces de Banach . . . . .                                                  | 60        |
| 10         | Théorème de Riesz . . . . .                                                  | 63        |
| 11         | Théorème du point fixe de Banach-Picard . . . . .                            | 66        |
| 12         | Continuité et applications linéaires . . . . .                               | 68        |
| 13         | Suites d'applications . . . . .                                              | 71        |
| 14         | Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux . . . . .            | 77        |
| <br>       |                                                                              |           |
| <b>III</b> | <b>Continuité et dérivabilité des fonctions à valeurs réelles</b>            | <b>83</b> |
| 1          | Théorème de Rolle et ses corollaires . . . . .                               | 85        |
| 2          | Théorème de Bolzano et ses corollaires . . . . .                             | 91        |
| 3          | Théorème de la bijection . . . . .                                           | 96        |
| 4          | Binôme de Newton et formule de Leibniz . . . . .                             | 100       |
| 5          | Les différentes formules de Taylor . . . . .                                 | 105       |
| 6          | Théorème de Weierstrass . . . . .                                            | 117       |

|             |                                                                 |            |
|-------------|-----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>IV</b>   | <b>Intégration sur un segment</b>                               | <b>123</b> |
| 1           | Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .        | 125        |
| 2           | Théorème fondamental de l'analyse . . . . .                     | 134        |
| 3           | Sommes de Riemann et la méthode des rectangles . . . . .        | 137        |
| 4           | Intégration par parties et changement de variable . . . . .     | 140        |
| 5           | Lemme de Riemann-Lebesgue . . . . .                             | 142        |
| 6           | Formules de la moyenne . . . . .                                | 145        |
| 7           | Intégration et dérivation d'une suite de fonctions . . . . .    | 150        |
| <b>V</b>    | <b>Intégrales généralisées</b>                                  | <b>153</b> |
| 1           | Cas des fonctions positives . . . . .                           | 155        |
| 2           | Comparaison aux intégrales de Riemann . . . . .                 | 160        |
| 3           | Critère de Cauchy et règle d'Abel pour les intégrales . . . . . | 164        |
| 4           | Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .                   | 169        |
| <b>VI</b>   | <b>Séries numériques</b>                                        | <b>175</b> |
| 1           | Généralités sur les séries numériques . . . . .                 | 177        |
| 2           | Théorèmes de convergence des séries à termes positifs . . . . . | 181        |
| 3           | Test intégral pour les séries . . . . .                         | 184        |
| 4           | Règles de Cauchy, de d'Alembert et de Raabe-Duhamel . . . . .   | 187        |
| 5           | Critère spécial des séries alternées et règle d'Abel . . . . .  | 192        |
| 6           | Produit de Cauchy - Théorème de Cauchy-Mertens . . . . .        | 197        |
| <b>VII</b>  | <b>Séries de fonctions</b>                                      | <b>203</b> |
| 1           | Les différents types de convergence . . . . .                   | 205        |
| 2           | Propriétés de la somme d'une série de fonctions . . . . .       | 209        |
| <b>VIII</b> | <b>Séries entières</b>                                          | <b>211</b> |
| 1           | Rayon de convergence . . . . .                                  | 213        |
| 2           | Propriétés de la fonction somme d'une série entière . . . . .   | 218        |
| 3           | Convergence au bord : théorèmes d'Abel et de Tauber . . . . .   | 222        |
| 4           | Fonction développable en série entière . . . . .                | 227        |
| <b>IX</b>   | <b>La fonction exponentielle et le nombre <math>\pi</math></b>  | <b>233</b> |
| 1           | La fonction exponentielle réelle . . . . .                      | 235        |
| 2           | La fonction exponentielle complexe . . . . .                    | 242        |
| 3           | Les fonctions trigonométriques . . . . .                        | 246        |
| 4           | Le nombre $\pi$ . . . . .                                       | 250        |

|           |                                                                       |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>X</b>  | <b>Équations différentielles linéaires</b>                            | <b>257</b> |
| 1         | Équations différentielles linéaires du premier ordre (EDL1) . . . . . | 259        |
| 2         | Théorème de Cauchy-Lipschitz (linéaire) . . . . .                     | 264        |
| 3         | Équations différentielles linéaires du second ordre (EDL2) . . . . .  | 273        |
| <br>      |                                                                       |            |
| <b>XI</b> | <b>Les grands classiques</b>                                          | <b>283</b> |
| 1         | Intégrales de Wallis et formule de Stirling . . . . .                 | 285        |
| 2         | La constante d'Euler-Mascheroni $\gamma$ . . . . .                    | 291        |
| 3         | L'intégrale de Gauss . . . . .                                        | 296        |
| 4         | L'intégrale de Dirichlet . . . . .                                    | 298        |
| 5         | Calcul de $\zeta(2)$ . . . . .                                        | 301        |
| 6         | La fonction Zêta de Riemann . . . . .                                 | 304        |
| 7         | La fonction Gamma d'Euler . . . . .                                   | 307        |
| <br>      |                                                                       |            |
|           | <b>Sources et bibliographie</b>                                       | <b>311</b> |
| <br>      |                                                                       |            |
|           | <b>Index</b>                                                          | <b>312</b> |



**Première partie**

**Les suites numériques**



## 1 L'inégalité triangulaire

◆◆◆◆ Notions prérequis : Cours de Terminale sur les nombres complexes

### 1.1 Résultats

#### 1 L'inégalité triangulaire

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . On a :

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad \text{et} \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

##### Cas d'égalité :

- Dans  $\mathbb{R}$  :  $|a + b| = |a| + |b| \iff a \text{ et } b \text{ sont de même signe.}$
- Dans  $\mathbb{C}$  :  $|a + b| = |a| + |b| \iff a = 0 \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{R}^+, b = ka.$

### 1.2 Historique

L'inégalité triangulaire est une propriété mathématique essentielle qui stipule que, dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours supérieure à la longueur du troisième côté. Cette notion remonte à l'Antiquité, avec Euclide, dans son ouvrage *Les Éléments* (vers 300 av. J.-C.), qui en fait une des propriétés fondamentales des triangles dans le Livre I, proposition 20. Au XX<sup>e</sup> siècle, l'inégalité triangulaire a été généralisée aux espaces vectoriels normés, où elle est devenue un principe clé en théorie des normes. Dans ces espaces, l'inégalité triangulaire garantit que la distance entre deux points reste positive et que la distance entre un point et lui-même est nulle. Aujourd'hui, l'inégalité triangulaire est enseignée dès le collège comme une base de la géométrie et continue à être étudiée au lycée, notamment à travers les concepts de valeur absolue et de module pour les nombres complexes.

#### Zoom sur le mathématicien Euclide

Euclide est un mathématicien grec de l'Antiquité, considéré comme l'un des pères fondateurs des mathématiques en Occident. Vivant probablement autour de 300 avant notre ère, bien que peu d'informations fiables sur sa vie soient disponibles, il est surtout connu pour son œuvre monumentale *Les Éléments*. Cet ouvrage, l'un des plus anciens traités de mathématiques connus, systématise un large ensemble de théorèmes géométriques et arithmétiques, en les démontrant rigoureusement à partir d'axiomes et de postulats. De son nom dérivent des concepts fondamentaux tels que l'algorithme d'Euclide, la géométrie euclidienne, la géométrie non euclidienne, et la division euclidienne. L'approche méthodique d'Euclide a façonné la manière dont les mathématiques sont enseignées et comprises depuis plus de deux millénaires.

### 1.3 Sujet

#### Partie A - Inégalité triangulaire - Cas réel

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Simplifier l'expression  $|x|^2$ .
2. Développer l'expression  $|a + b|^2$ .
3. En déduire que :  $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$ .
4. Finalement, démontrer la première inégalité triangulaire :

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

5. Utiliser cette première inégalité pour majorer judicieusement  $|a|$ ,  $|b|$ ,  $|a| - |b|$  et  $|b| - |a|$ .
6. Pour conclure, démontrer la deuxième inégalité triangulaire :

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

#### Partie B - Égalité - Cas réel

1. Supposons que  $|a + b| = |a| + |b|$ . En s'inspirant de la démarche proposée dans la partie A, démontrer que  $a$  et  $b$  sont de même signe.
2. Supposons  $a$  et  $b$  de même signe. Démontrer que  $|a + b| = |a| + |b|$ .

#### Partie C - Inégalité triangulaire - Cas complexe

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Si  $z$  est un nombre complexe, alors on note  $\Re(z)$  sa partie réelle.

1. Démontrer que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a les propriétés suivantes :  
 $|z|^2 = z\bar{z}$ ,  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$  et  $\Re(z) \leq |z|$ .
2. En utilisant ces propriétés, majorer judicieusement  $|a + b|^2$ , puis démontrer la première inégalité triangulaire :  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .
3. En s'inspirant de la démarche proposée dans la partie A, utiliser la première inégalité triangulaire pour démontrer la deuxième inégalité triangulaire :

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

#### Partie D - Égalité - Cas complexe

1. Soit  $a = x + iy$  et  $b = x' + iy'$  tels que  $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ .  
Démontrer que :  $|a + b|^2 = (|a| + |b|)^2 \iff xx' + yy' = |a| |b|$ .
2. En se plaçant dans le plan complexe et en introduisant le produit scalaire de deux vecteurs judicieusement choisis, démontrer que :  
 $|a + b| = |a| + |b| \iff a = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{R}^+, b = ka$ .

## 1.4 Correction

### Partie A - Inégalité triangulaire - Cas réel

1. Pour  $x$  réel, on a  $|x|^2 = x^2$ .
2. D'après le résultat établi précédemment, on a :  $|a+b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .
3. Il s'ensuit l'inégalité :  $|a+b|^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$ .  
Et par conséquent, on a :

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2.$$

4. Notons que  $0 \leq |a+b|$  et  $0 \leq |a|+|b|$ . En utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur  $\mathbb{R}^+$ , on peut en déduire la première inégalité triangulaire :

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

5. D'après cette première inégalité, on en déduit :  
 $|(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$  et donc  $|a| \leq |a-b|+|b|$ .  
 De même, on a :  $|b| \leq |b-a|+|a|$ .  
 On obtient alors, d'une part  $|a|-|b| \leq |a-b|$  et d'autre part,  $|b|-|a| \leq |b-a|$ .  
 Pour conclure, on peut donc écrire la deuxième inégalité triangulaire :

$$||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

### Partie B - Égalité - Cas réel

1. Supposons que  $|a+b| = |a|+|b|$ . Il s'ensuit que  $|a+b|^2 = (|a|+|b|)^2$ .  
On en déduit rapidement que  $0 \leq |ab| = ab$  et donc que les nombres  $a$  et  $b$  sont de même signe.
2. Supposons  $a$  et  $b$  de même signe. On a donc  $0 \leq ab = |ab|$ .  
D'où  $|a+b|^2 = a^2 + 2|ab| + b^2 = (|a|+|b|)^2$ .  
En utilisant, la fonction racine carrée sur  $\mathbb{R}^+$ , on peut en déduire que :

$$|a+b| = |a|+|b|.$$

Pour conclure, on a donc démontré :

$$|a+b| = |a|+|b| \iff a \text{ et } b \text{ sont de même signe.}$$

### Partie C - Inégalité triangulaire - Cas complexe

1. (a) Soit  $z = x + iy$  tel que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a, d'une part,  $|z|^2 = x^2 + y^2$ , et d'autre part,  $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$ .  
Par conséquent, on a l'égalité :  $|z|^2 = z\bar{z}$ .

- (b) De façon triviale,  $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\Re(z)$ .  
 (c) Par définition, on a  $(\Re(z))^2 = x^2$ . Or,  $x^2 \leq x^2 + y^2$  et donc  $(\Re(z))^2 \leq |z|^2$ .  
 D'où, la dernière inégalité demandée :  $\Re(z) \leq |\Re(z)| \leq |z|$ .

2. Remarquons que :

$$|a + b|^2 = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) = a\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{b} + \bar{a}b = |a|^2 + |b|^2 + 2\Re(a\bar{b}).$$

Or, on a :  $\Re(a\bar{b}) \leq |a\bar{b}| = |a||b|$ . Il s'ensuit, par ricochets :

$$|a + b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|, \text{ et donc } |a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2.$$

En utilisant à nouveau la fonction racine carrée, nous obtenons la première inégalité triangulaire dans le cas complexe :

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

3. D'après cette première inégalité, on a :

$$|(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \text{ et donc } |a| \leq |a - b| + |b|.$$

De même, on peut écrire :  $|b| \leq |b - a| + |a|$ .

On obtient alors, d'une part,  $|a| - |b| \leq |a - b|$  et, d'autre part :

$$|b| - |a| \leq |b - a| \text{ et donc pour finir :}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

## Partie D - Égalité - Cas complexe

1. On a, d'une part :  $|a + b|^2 = |a|^2 + a\bar{b} + b\bar{a} + |b|^2$ , et d'autre part :

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2.$$

$$\text{Ainsi, } |a + b|^2 = (|a| + |b|)^2 \iff a\bar{b} + b\bar{a} = 2|a||b|.$$

Remarquons que :  $a\bar{b} + b\bar{a} = 2(xx' + yy')$ .

Par conséquent :

$$|a + b|^2 = (|a| + |b|)^2 \iff xx' + yy' = |a||b|.$$

2. Introduisons, dans le plan complexe, les vecteurs  $\vec{u}(a)$  et  $\vec{v}(b)$ . Leur produit scalaire est donné analytiquement par l'égalité suivante :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

Or, d'autre part, on a l'égalité faisant intervenir l'angle formé par les deux vecteurs introduits :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |a||b| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .

Il s'ensuit que  $|a + b|^2 = (|a| + |b|)^2 \iff a = 0$  ou  $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \pmod{2\pi}$ .

On en conclut que

$$|a + b| = |a| + |b| \iff a = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{R}^+, b = ka.$$

## 2 Caractérisations de la borne supérieure

◆◆◆ Notions prérequis : Inégalité triangulaire

### 2.1 Contexte

#### Définition - Suite convergente vers une limite $\ell$

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels **converge** vers le réel  $\ell$   
 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n_0 \leq n \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$

**Remarque :** On peut remplacer, si besoin, l'inégalité large  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$  par l'inégalité stricte  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ .

#### Définition - Borne inférieure et borne supérieure d'un ensemble

Soit  $A$  un sous-ensemble majoré de  $\mathbb{R}$ .

1. La **borne supérieure** de  $A$ , notée  $\sup(A)$ , est, s'il existe, le plus petit des majorants de  $A$ .
2. La **borne inférieure** de  $A$ , notée  $\inf(A)$ , est, s'il existe, le plus grand des minorants de  $A$ .

#### Axiome de la borne supérieure

- Tout sous-ensemble  $A$ , non vide et majoré de  $\mathbb{R}$ , admet une borne supérieure.
- Tout sous-ensemble  $A$ , non vide et minoré de  $\mathbb{R}$ , admet une borne inférieure.

### 2.2 Résultats

#### 2 Caractérisation formelle de la borne supérieure

Soit  $A$  un sous-ensemble majoré et non vide de  $\mathbb{R}$ , et  $M$  un majorant de  $A$ .  
 On a :  $M = \sup(A) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x$ .

#### 3 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soit  $A$  un sous-ensemble majoré non vide de  $\mathbb{R}$ , et  $M$  un majorant de  $A$ .  
 $M = \sup(A)$  si, et seulement si, il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ .

## 2.3 Historique

Historiquement, le concept de borne supérieure est né de la nécessité de structurer rigoureusement l'ensemble des nombres réels. La notion a été formalisée au XIX<sup>e</sup> siècle, une période marquée par une révision profonde des fondements des mathématiques. C'est notamment grâce à Bernard Bolzano, que cette idée a commencé à prendre forme, dans ses travaux sur la continuité des fonctions. Cependant, pour une formalisation rigoureuse du concept, il a fallu attendre les travaux de mathématiciens tels que Weierstrass, Cauchy, Dedekind et Cantor.

### Zoom sur le mathématicien Bolzano

Bernard Bolzano, né en 1781 à Prague, est un mathématicien, logicien et philosophe. Après des études en mathématiques, physique, philosophie, il devient prêtre en 1805 et enseigne la théologie à l'Université de Prague. Il publie en 1817, son premier ouvrage *Rein analytischer Beweis*, dans lequel il démontre le théorème des valeurs intermédiaires sans utiliser d'approche géométrique comme on le faisait avant. Bolzano prône des idées pacifistes et critique le régime de l'empire austro-hongrois, ce qui lui vaut d'être démis de ses fonctions d'enseignant en 1820. Réfugié chez des amis, il se consacre à ses recherches en mathématiques et en philosophie malgré une santé fragile. Ses travaux influencent les générations ultérieures malgré leur reconnaissance tardive. Il décède en 1848 des suites de la tuberculose.

## 2.4 Sujet

Soit  $A$  un sous-ensemble majoré non vide de  $\mathbb{R}$ , et  $M$  un majorant de  $A$ .

1. Démontrer que :  $M = \sup(A) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x$ .
2. En déduire que :  $M = \sup(A)$  si, et seulement si, il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ .

## 2.5 Correction

1. Travaillons par double implication.
  - Supposons  $M = \sup(A)$ . Le réel  $M$  est le plus petit des majorants de  $A$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On sait que  $M - \varepsilon < M$ , et ainsi le nombre  $M - \varepsilon$  ne peut donc pas être un majorant de  $A$ . Car dans le cas contraire, on aurait trouvé un majorant de  $A$ , plus petit que le plus petit des majorants, contradiction. Par conséquent, il existe donc un élément  $x \in A$  tel que  $M - \varepsilon < x$ .
  - Réciproquement, raisonnons par l'absurde et pour cela, supposons que d'une part, on a :  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$  tel que  $M - \varepsilon < x$ , et d'autre part que  $M$  n'est pas le plus petit des majorants.  
Soit  $a_0$  le plus petit des majorants de  $A$ . On a  $a_0 < M$ .  
Posons  $\varepsilon = M - a_0 > 0$ . Il existe donc  $x \in A$  tel que  $M - (M - a_0) < x \leq a_0$ .  
Il s'ensuit que  $a_0 < a_0$ , contradiction. On en déduit que  $M = \sup(A)$ .