Miguel A. Pérez



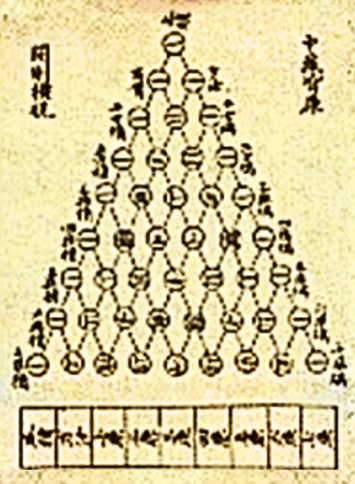




UNA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS: RETOS Y CONQUISTAS A TRAVÉS DE SUS PERSONAJES











Vision Libros

UNA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS:

RETOS Y CONQUISTAS A TRAVÉS DE SUS PERSONAJES

UNA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS:

RETOS Y CONQUISTAS A TRAVÉS DE SUS PERSONAJES

Vision Libros

UNA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS: RETOS Y CONQUISTAS A TRAVÉS DE SUS PERSONAJES.

© Miguel Ángel Pérez García
© Editorial Vision Libros
C/ San Benito 21 Local
28029 Madrid (España)
Tel:0034 91 3117696 url:www.visionlibros.com

ISBN: 978-84-9983-742-0
Descargado de: www.visionlibros.com

Printed by Publidisa

Diseño base cubierta: © Autor.

Distribuye y produce Distribución Digital.
Magnolias 35 bis 28029 Madrid (España)

Reservados todos los derechos. Esta publicación no puede ser reproducida, ni en todo, ni en parte, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información, de ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, o por fotocopia, o cualquier otro sin el permiso previo por escrito de la editorial.

PRESENTACIÓN

Desde la antigüedad las Matemáticas se han encontrado estrechamente unidas a las demás ciencias. La Astronomía, Física, Filosofía, Lógica, y, también en muchas ocasiones, la Música, la Pintura o la Escultura evolucionaron junto con ellas. Los hombres de ciencia habían de dominarlas todas de forma que la separación entre unas y otras era a veces imperceptible. Sin embargo, con el paso del tiempo se fue sufriendo una especialización que acentuó sus diferencias y las dotó de identidad propia.

Si nos preguntamos cuál es la principal cualidad que distingue a las Matemáticas de las demás ciencias y que le da su seña de identidad deberíamos acudir a la propia esencia de las Matemáticas. Al margen del rigor en sus fundamentos y en su método, apoyado en la Lógica, las Matemáticas poseen una característica singular: *La posibilidad de crear sin tener que ceñirse a una realidad que las limite*.

De una forma u otra, el resto de ciencias se encuentran encorsetadas por unos fines enfocados en la vida real. Pero curiosamente todas las ciencias dependen de las matemáticas. Sus teorías son tan abstractas y generales que tarde o temprano se les descubren sorprendentes aplicaciones a fenómenos de la realidad. Un ejemplo de ello son las nuevas geometrías no euclídeas descubiertas a principios del siglo XIX que, a pesar de su extraña apariencia, dan explicación a algunos aspectos del funcionamiento del universo, y a la vez constituyen también una herramienta fundamental en los estudios sobre óptica.

Apoyadas por el lenguaje universal de las matemáticas, la física, ingeniería, genética, economía, meteorología, medicina, criminología, etc, vinculan sus avances a la matemática o a algunas de sus vertientes como la Estadística, Teoría del Caos, Computación, Simulación Numérica, Fractales, etc.

Desde muy antiguo es conocida la influencia de las matemáticas en ámbitos más sorprendentes como la música y el arte. Ya a partir del

siglo VI a.C., los pitagóricos, asombrados por la estrecha relación entre estas disciplinas, mantenían su máxima "Todo es número", y en gran parte tenían razón. Incluso uno de sus más famosos seguidores, el filósofo Platón, afirmaba en su escuela de Atenas: "Los números gobiernan el mundo".

Pero como ciencia en sí misma, un teorema o teoría matemática no necesita una aplicación experimental para tener su relevancia. Igual ocurre con la filosofía. Y es que la historia matemática se ha encontrado más íntimamente ligada con la de la filosofía que con la de ninguna otra ciencia. Pitágoras, Zenón, Platón, Aristóteles, Descartes, y hasta el mismo Leibniz, uno de los padres de la "Lógica moderna", han creado teorías filosóficas entroncadas con las matemáticas haciendo que éstas estén presentes también en las concepciones que el ser humano tiene sobre sí mismo y el Universo.

Así la intención de los matemáticos de dotar a las demás ciencias de instrumentos para el estudio de la naturaleza, o para cuantificar las relaciones entre sus objetos, ha sido secundaria. La motivación principal no ha sido otra que el gusto por la creación de un nuevo teorema, una demostración, o una teoría matemática cuya perfección en sí misma satisfaga el entendimiento humano. El placer que origina dicha creación tiene mucho que ver con el que se siente cuando se compone una obra poética o musical, al igual que la inquietud y emoción interior durante el seguimiento de una demostración es muy semejante a la sensación que provoca la lectura de los versos de un bello poema. De hecho, grandes matemáticos griegos, como Eratóstenes, o matemáticos indios como Bhaskara (que escribía sus libros de matemáticas totalmente en verso), han sido considerados insignes poetas. Otros como Cardano, Tartaglia o Fermat también dedicaron su tiempo a este menester. Incluso Ada Byron, una de las más grandes matemáticas, era hija del renombrado poeta inglés Lord Byron. Ya el gran matemático Karl Weierstrass decía que un matemático que no sea también algo de poeta nunca será un matemático completo.

Llama la atención como hace más de 20 siglos, cuando escribir era costoso y lento, cuando los conflictos bélicos estaban a la orden del día, cuando no había medios ni comodidades, y sobre todo cuando las matemáticas tenían apenas un par de siglos de vida como ciencia basada en la demostración, algunas personas dedicaban su tiempo libre a descubrir teoremas, casi siempre sin aplicación práctica, simplemente por el hecho de descubrirlos y demostrarlos, alcanzando en muchos casos límites que todavía hoy no han sido superados.

En este compendio histórico hemos intentado ofrecer al lector las matemáticas bajo el punto de vista de una ciencia en sí misma haciendo un recorrido desde el escriba egipcio Ahmes, en el 1700 a.C., hasta el alemán Georg Cantor, en el siglo XIX, utilizando como vehículo las cuestiones que han sido claves en su desarrollo. Los conceptos tratados han sido presentados desde su origen, pero sin olvidar el contexto en el que los matemáticos los han afrontado según las distintas épocas, así como sus aplicaciones en la actualidad. Al mismo tiempo estas cuestiones están entrelazadas con los aspectos más curiosos de la matemática, anécdotas y leyendas que contribuyen sin duda a la amenidad de la exposición. Finalmente cada capítulo ha sido aderezado con datos biográficos de los matemáticos protagonistas.

En cuanto al nivel de los conceptos y demostraciones de los teoremas, éstos han sido seleccionados buscando la mayor sencillez y claridad, procurando que el rigor en la exposición no sobrepase los límites de los conocimientos que corresponden al Bachiller. Por ello ha sido imposible en la mayoría de las demostraciones ceñirse escrupulosamente al desarrollo utilizado en su momento por el matemático en cuestión pues haría muy dificultoso el seguimiento de la misma. Así que, sin perder de vista la demostración original, haremos uso en algunos casos de una notación y un tratamiento más moderno y simple huyendo en lo posible de los tecnicismos matemáticos.

Para destacar los teoremas o cuestiones de los que demos la demostración se resaltará el texto del enunciado en negrita y cursiva y al final de la demostración colocaremos el símbolo ◢◤ que indica que se ha llegado al final de la misma.

Cuando, según la leyenda, el rey Ptolomeo I requirió de Euclides un modo rápido y fácil de instruirse en Geometría, éste le repuso que no existían caminos reales para el aprendizaje. Y es muy cierto. Sin embargo, la experiencia señala que el interés de los alumnos o aficionados a cualquier ciencia crece cuando ésta se presenta desde sus orígenes y se acompaña de la historia humana que la rodea. El hecho frecuente hoy día de enseñar conceptos abstractos aparentemente salidos de la nada o de otros conceptos igualmente abstractos (en el mejor de los casos con alguna aplicación práctica, casi siempre lejana al alumno) provoca un rechazo que en el caso de las matemáticas es por todos conocido. Presentar la matemática a través de las personas que la crearon con sus virtudes, sus defectos y sus anécdotas, acerca esta ciencia al lector aunque bien es verdad que es necesaria una cierta curiosidad de partida y un esfuerzo que sirvan de impulso para ir superando las

dificultades que se vayan presentando. Por ello se han tenido en cuenta sólo los teoremas de enunciado sencillo y asequible siempre intentando impregnar el texto de un ambiente que mantenga la atención en cada pasaje.

Consideramos por todo lo dicho que este libro puede ser útil para cualquier profesor, alumno de los cursos de Bachiller y primeros de licenciatura, o para cualquier persona con conocimientos básicos y con afición a la matemática que quiera recordar o conocer sus principales teoremas, curiosidades y aspectos históricos.

ÍNDICE CRONOLÓGICO

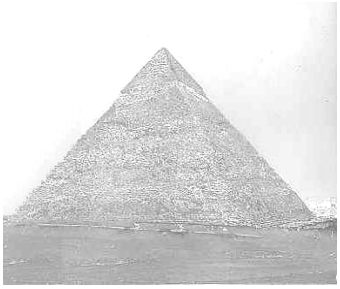
En el siguiente elenco hemos seleccionado sólo aquellos matemáticos cuya obra analizaremos con más detenimiento por ser más cercana a nuestro propósito. Las fechas que acompañan a los matemáticos griegos son siempre aproximadas pues en la mayoría de los casos no suelen existir datos fidedignos sobre las mismas. Tanto es así que en los casos con más escasa información simplemente indicaremos el siglo.

TALES	**(-640, -550)** **GRECIA**	**GEOMETRÍA** **PRIMERAS DEMOSTRACIONES**
PITÁGORAS	**(-569, -500)** **GRECIA**	**ARITMÉTICA.** **TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS** **ORDEN DE LOS PITAGÓRICOS**
PLATÓN	**(-428, -347)** **GRECIA**	**MATEMÁTICAS Y NATURALEZA** **LEYES DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA**
EUCLIDES	**(-330, -275)** **GRECIA**	**RIGOR MATEMÁTICO.** **FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA**
ARQUÍMEDES	**(-287, -212)** **GRECIA**	**ÁREAS Y VOLÚMENES.** **MECÁNICA E HIDROSTÁTICA**
ERATÓSTENES	**(-276, -194)** **GRECIA**	**MEDIDA DEL CÍRCULO TERRESTRE**
ARISTARCO	**(-310, -230)** **GRECIA**	**DISTANCIAS ENTRE ASTROS**

PTOLOMEO	**(SIGLO II D.C.)** **GRECIA**	**TRIGONOMETRÍA**
APOLONIO	**(-262, -190)** **GRECIA**	**CÓNICAS**
HERÓN	**(SIGLO I D.C.)** **GRECIA**	**ESTUDIOS SOBRE LA LUZ.** **ÁREA DE UN TRIÁNGULO**
DIOFANTO	**(170, 255)** **GRECIA**	**TEORÍA DE NÚMEROS.** **ORÍGENES DEL ÁLGEBRA**
PAPPUS	**(280, 350)** **GRECIA**	**AMPLIACIONES DE LOS CLÁSICOS.** **GEOMETRÍA**
BRAHMAGUPTA	**SIGLO VII D.C.** **INDIA**	**SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL** **TRIGONOMETRÍA**
AL-KHOWARIZMI	**(780, 850)** **IMPERIO MUSULMÁN**	**SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL** **POTENCIACIÓN DEL ÁLGEBRA**
FIBONACCI	**(1180, 1250)** **ITALIA**	**RECOGIDA DE APORTACIONES ÁRABES** **SUCESIÓN DE FIBONACCI**
TARTAGLIA	**(1500, 1557)** **ITALIA**	**ECUACIONES DE 3º GRADO**
CARDANO	**(1501, 1576)** **ITALIA**	**ECUACIONES DE 3º Y 4º GRADO** **OPERACIONES CON IMAGINARIOS**
GALILEO	**(1564, 1642)** **ITALIA**	**NUEVAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN**
DESCARTES	**(1596, 1650)** **FRANCIA**	**SISTEMAS DE COORDENADAS** **GEOMETRÍA ALGEBRAICA**
FERMAT	**(1601, 1665)** **FRANCIA**	**ORIGEN PROBABILIDAD** **CUADRATURA DE CURVAS** **ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT**
PASCAL	**(1623, 1662)** **FRANCIA**	**ORIGEN PROBABILIDAD** **CUADRATURA DE CURVAS** **PRIMERA CALCULADORA MECÁNICA**

NEWTON	**(1642, 1727)** **INGLATERRA**	**POTENCIA DE UN BINOMIO** **CÁLCULO INFINITESIMAL** **LEY DE GRAVITACIÓN**
LEIBNIZ	**(1646, 1716)** **ALEMANIA**	**CÁLCULO INFINITESIMAL** **LÓGICA MATEMÁTICA**
BERNOULLI (JAKOB)	**(1654, 1705)** **SUIZA**	**CÁLCULO INFINITESIMAL** **ECUACIONES DIFERENCIALES** **LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.**
BERNOULLI (JOHANN)	**(1667, 1748)** **SUIZA**	**CÁLCULO INFINITESIMAL.** **ECUACIONES DIFERENCIALES** **ESTUDIOS SOBRE CURVAS**
EULER	**(1707, 1783)** **SUIZA**	**SERIES NUMÉRICAS.** **IRRACIONALIDAD DE 'e'.** **NÚMEROS COMPLEJOS**
LAPLACE	**(1749, 1827)** **FRANCIA**	**PROBABILIDAD.** **ECUACIONES DIFERENCIALES**
CAUCHY	**(1789, 1857)** **FRANCIA**	**LÍMITES DE SUCESIONES.** **ANÁLISIS COMPLEJO**
GAÜSS	**(1777, 1855)** **ALEMANIA**	**TEORÍA DE NÚMEROS.** **TEOREMA FUNDAMENTAL ÁLGEBRA.** **GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS**
CANTOR	**(1845, 1918)** **ALEMANIA**	**TEORÍA DE CONJUNTOS INFINITOS**

1. LAS PRIMERAS MATEMÁTICAS



Desde los albores de la raza humana los hombres han tenido en alguna manera la idea de número y han usado diferentes sistemas de signos para representar cantidades. La necesidad de medir el paso del tiempo y de llevar un registro de las cosechas, del ganado y de las transacciones comerciales fueron los detonantes para el desarrollo de esta idea. Los métodos más antiguos que se conocen consistían simplemente en contar con los dedos de las manos. Si la cantidad era demasiado grande entonces utilizaban bolsas con piedras que se correspondían con el conjunto de objetos que se quería cuantificar como ovejas de un rebaño, objetos de un ajuar valioso (normalmente las piedras solían también agruparse en grupos de cinco o de diez piedras manteniendo en cierta forma el método de los dedos). Un ejemplo que atestigua que en algunas regiones aún se usaba no hace mucho este método es el descubrimiento durante unas excavaciones arqueológicas en la región de Nuzi, situada en Irak, de un recipiente de arcilla sobre el que se había inscrito lo siguiente:

21 ovejas que han parido corderos
6 ovejas
8 carneros
4 corderos
6 cabras
1 macho cabrío
2 cabritos

Cuando se rompió el sello del recipiente aparecieron 48 bolitas que se correspondían con los 48 animales de la inscripción. Al parecer el dueño había escrito en la bolsa de arcilla (para su propia contabilidad) los animales que dejaba a cargo de algún pastor que posiblemente no sabía leer ni escribir y que, por tanto, necesitaba llevar la cuenta de animales asociando una bolita por animal. Aún hoy puede uno encontrarse este caso en algunas tribus de África, Asia o Sudamérica.

Posteriormente utilizaron también las muescas en piedras o maderas. La más antigua, de aproximadamente el 35.000 a.C., es un hueso de

babuino encontrado en las montañas de Swazilandia, sobre el que hay señaladas 29 muescas que podrían corresponder al número de piezas cazadas usando ese arma. Otro hallazgo posterior en la hasta hace poco llamada Checoslovaquia corresponde a un hueso de lobo de hace 30.000 años con una hilera de 25 muescas, dos marcas mayores (de separación) y otras 30 muescas, pero lo más curioso es que las 55 marcas se encuentran agrupadas de cinco en cinco. A juzgar por los restos que rodeaban al hueso parece que pertenecía a una tribu más avanzada que la anterior.

Hoy día se pueden encontrar en las selvas del Amazonas, en África y Australia, tribus que en su numeración sólo tienen palabras para designar las cantidades "uno", "dos" y "muchos". Esto no es un caso raro sino que parece que las tribus que menos evolucionaron, o que simplemente no necesitaban más, no llegaron al uso de sistemas más avanzados, ni siquiera al manejo de los dedos como guía en los recuentos. Hay indicios de que en su origen muchas de las civilizaciones más primitivas usaban un rudimentario sistema en base 2. En casi todos los idiomas se tienen palabras para designar el "primero" y el "segundo" totalmente independientes de las que se usan para designar al "uno" y al "dos". Sin embargo, para el "tercero", "cuarto", ..., son derivadas de "tres", "cuatro", etc. Esto parece indicar que las individualidades se tenían en los dos primeros números consecuencia tal vez de ideas primarias o del uso frecuente de la agrupación en parejas. Existe el extremo contrario con otras tribus que no sólo asignan números a cada dedo de la mano sino también a otras partes del cuerpo como los dedos de los pies, rodillas codos, hombros, caderas, etc, llegando hasta el 33.

Poco a poco, con la mejora en las condiciones de vida de las primitivas civilizaciones fueron surgiendo, en las más avanzadas, sistemas mucho más sofisticados que dejaban atrás los anteriores métodos. Se comenzaron a aplicar signos de escritura a los números más sencillos y a introducir las primeras expresiones para números mayores. Todas las antiguas civilizaciones (egipcia, babilónica, china, maya, griega, romana, etc.) desarrollaron sistemas de numeración, entendiendo por ello un conjunto de signos y reglas que permitan representar cantidades, sobre los que elaboraron una aritmética elemental. La manejabilidad de los sistemas de numeración trajeron consigo un avance en las matemáticas que en la civilización egipcia corresponde al intervalo (3000 a.C., 1600 a.C.), en la mesopotámica, al (1800 a.C., 300 a.C.) y en la griega desde el VII a.C. al IV d.C.. Finalmente y con origen en la civilización india surgiría el sistema decimal que usamos hoy día.

1.1 EGIPTO, CÁLCULOS FARAÓNICOS

Al margen de la escritura jeroglífica tallada en la piedra de sus templos, el legado científico escrito de los egipcios que ha llegado hasta nosotros es bastante escaso debido al uso de papiros que suelen ser de conservación bastante débil. El papiro se obtenía de plantas de los márgenes del Nilo, cuyo tallo trabajado se transformaba en unas extensiones flexibles donde tras aplicar un barniz se podía escribir con una punta de junco y una tinta producida por la mezcla pigmentos minerales con el agua.

Las matemáticas en Egipto surgieron y se desarrollaron ante diversas necesidades. Había que plasmar para la posteridad la gloria del faraón grabando en los lugares más significativos los botines de sus conquistas. La burocracia empleada en la administración había de llevar un registro del número de hombres disponibles para el trabajo o las campañas militares elaborando un censo, además del control de los impuestos. Realizar un estudio del grano disponible y de la capacidad de los graneros para almacenarlo requería también del uso del número y de algunos cálculos. Otra importante fuente de matemáticas era el reparto equitativo de tierras entre los campesinos así como las reparcelaciones provocadas por la pérdida de las tierras arrastradas durante las crecidas del Nilo. La elaboración de calendarios fiables para la plantación y recogida de las cosechas precisaba del manejo de mediciones astronómicas. Por supuesto, también para la construcción de las grandes edificaciones faraónicas como las pirámides era fundamental el uso de técnicas trigonométricas.

Los egipcios tenían dos sistemas de numeración, el jeroglífico que utiliza jeroglíficos y el hierático que utiliza símbolos cursivos y que sería el que desembocará en el siglo VIII a.C. en el sistema demótico o sistema del pueblo. En el sistema jeroglífico tenían signos para el 1, el 10, el 100....., hasta las seis primeras potencias de 10 y escribían con un sistema aditivo en el que cada número se expresaba como suma de los signos que lo formaban. No tenían símbolo para el cero que no surgiría hasta el siglo VIII en la civilización india. El orden en que escribían las cantidades solía ser siempre de derecha a izquierda y además de mayor a menor aunque a veces lo hicieran en otro orden, sobre todo en sus inscripciones en los templos por razones estéticas. Es, por tanto, un sistema decimal, aditivo pero no posicional pues cada signo vale lo mismo ocupe el lugar que ocupe.

El lenguaje jeroglífico era de difícil ejecución limitándose desde los primeros tiempos de la historia egipcia a los textos sagrados, ofrendas

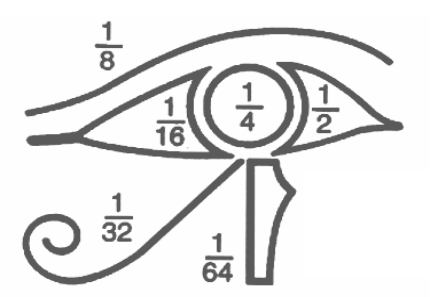
e invocaciones propias del culto. La naturaleza de estos escritos, fundamentalmente religiosa, se asociaba al elemento sobre el que escribir: las paredes de piedra de los templos y las tumbas, así como las estelas. Sin embargo, el uso administrativo común requería de una mayor facilidad de realización de escritos. La utilización de papiros permitió un trazado flexible y cursivo de los símbolos mucho más cómodo que los jeroglíficos. Este hecho dio paso, desde los primeros tiempos dinásticos, a la escritura hierática. Dentro de ella se conformaron unos símbolos numéricos y un sistema que fundamentalmente respondía al sistema jeroglífico. Tenía algunas diferencias. Por ejemplo, para designar el cuatro se conservan tantos trazos rectos como indica la cantidad pero para el cinco introduce, no otros tantos trazos rectos, sino uno largo y dos cortos. Algo semejante pasará en otras cantidades como el siete, el ocho o el nueve. También ocurría lo mismo para designar 5 o más decenas. Así se eludía en la práctica el trazado exhaustivo de tantos elementos como cantidades hubiera en un orden determinado. Este método tenía como defecto que multiplicaba el número de símbolos que el escriba tenía que aprender. Para escribir un número de cuatro cifras, el escriba debía memorizar cuatro símbolos diferentes en jeroglífico que se transformaban en 36 en el hierático (9 símbolos diferentes para cada orden de unidades).

Respecto a las fracciones, parece ser que el concepto de la fracción como número nunca fue generalizado. Salvo el 2/3, sólo manejaban las unitarias de la forma 1/n. Esto hacia que su método para hacer los repartos fuera ciertamente complicado. Por ejemplo, si habían de repartir dos panes entre 5 personas, podían partir cada pan en tres partes. Sobraría una parte que habrían de dividir en cinco y que cada una representaría 1/15. Por ello a cada persona le correspondería 1/3+1/15, es decir, 2/5. En otros casos no era tan sencillo. Por ejemplo, 2/17 =1/12+1/51+1/68. Para hacerlo habían de partir cada pan en tres trozos. Después cada uno de los cinco primeros tercios en cuatro partes de los que cada persona tomaba uno, es decir, 1/12. Sobraban 3/12, que es 1/4, y 1/3 entero. Dividían después cada uno de estos trozos en 17 partes con lo que obtenían 1/68 y 1/51 respectivamente para cada persona. El proceso carece de una sistematización clara por lo que los estudiosos del tema tienen serias dudas acerca de que éste fuera el método.

Las fracciones unitarias habían de ser necesariamente distintas. Hasta el momento todavía no se tienen explicaciones claras de por qué esto era así. Respecto a la fracción no unitaria 2/3 puede ser debido a los cambios de unidades de capacidad. La unidad de longitud de los egipcios era el codo, que equivale a 52’3 centímetros. Al calcular el volumen de un gra-

nero podían utilizar el codo cúbico, pero lo importante era traducir este volumen en cabida de grano. La unidad de capacidad que media la cantidad de grano era el khar, siendo un khar igual a 2/3 de codo cúbico. Posiblemente la frecuencia de estos cambios dio identidad propia a esta fracción.

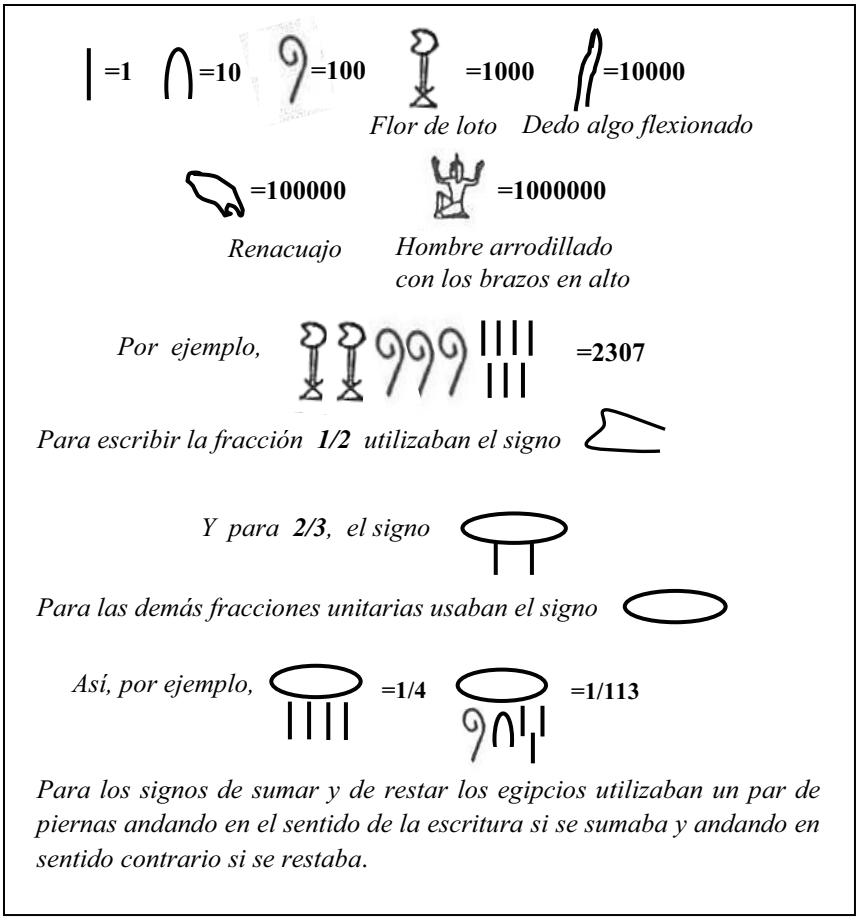
Dada la importancia del grano los egipcios crearon unidades para las subdivisiones del khar. Si el 'khar' se dividía en veinte partes iguales se obtenía otra de las unidades más utilizadas, el 'heqat' que equivalía a 4’784 litros aproximadamente. Incluso se consideraban fracciones más pequeñas de ‘heqat’ necesarias para la determinación de lo que correspondía, por ejemplo, a un trabajador por día. Estas fracciones se buscaban de forma que fueran fácilmente operables después. Así se constituyen las fracciones del tipo 1/2n (1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64). La importancia de la medida de los volúmenes y de las fracciones que se utilizaban para ello tuvo siempre un carácter muy especial y esotérico para los egipcios. Tanto que les asignaron unas representaciones jeroglíficas especiales con la particularidad de poder reunirse de un modo determinado para formar en conjunto la representación del llamado 'ojo de Horus'. Las cejas equivalían a 1/8, el 1/4 se representaba con un círculo y era la pupila, el 1/2 se simbolizaba con una forma que era la parte izquierda de la pupila, 1/16 era la parte derecha de la pupila, la parte inferior diagonal bajo el ojo era 1/32 y la parte inferior vertical del ojo representaba 1/64.





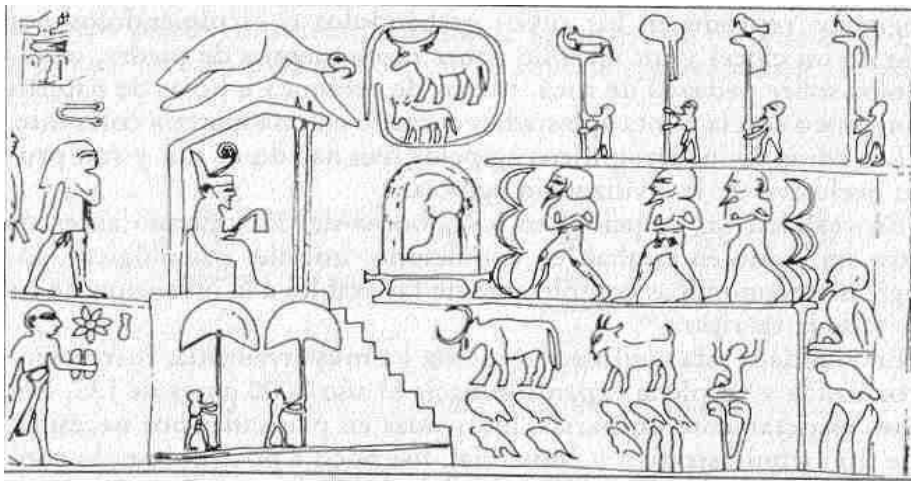
Horus, hijo de Osiris e Isis, desafió a su tío Seth para vengar la muerte de su padre a manos de éste. Durante la pelea Seth le arrancó un ojo a Horus, lo cortó en seis pedazos y lo esparció por todo Egipto. Según se relata en el Libro de los Muertos los dioses le encargaron a Toth, maestro supremo de la aritmética, la palabra, la escritura y los escribas, reunir las partes y reconstruir con ellas el ojo completo. Así lo hizo y formó el Oudja, ojo humano y de halcón que fue considerado símbolo de la integridad física, el conocimiento, la visión total y la fertilidad.

Los principales signos de la escritura jeroglífica usados por los egipcios vienen señalados en el siguiente cuadro:



Posiblemente la maza del rey Narmer sea el más antiguo testimonio numérico en la historia egipcia. Este soberano, que unificó el Alto y bajo Egipto hacia el año 2900 a. C., hizo grabar en su maza representaciones numéricas del botín conseguido en sus victoriosas expediciones. En la parte inferior de la maza aparecen algunos animales con símbolos numéricos bajo ellos. Así, al toro le acompañan las figuras de cuatro renacuajos mientras que bajo una cabra se muestran cuatro figuras como las anteriores junto a dos dedos flexionados, un hombre extendiendo los brazos y dos flores de loto. A continuación aparece la figura de un prisionero y bajo él un renacuajo y dos dedos

flexionados. En otras palabras y, según el cuadro anterior, 400.000 toros, 1.422.000 cabras y 120.000 prisioneros.



Grabado en la maza del rey Narmer

1.2 EL PAPIRO AHMES

Hasta nosotros han llegado escasos documentos en forma de papiro con los que los investigadores hayan podido indagar sobre las principales nociones de las matemáticas egipcias, pero la conclusión general es que aún siendo ciertamente adelantadas no poseen ese carácter científico que las leyendas sobre sus hazañas arquitectónicas les conceden. El de Kahun, el de Berlín, Reisner o el de Akhmin son algunos de estos papiros. Pero los dos más relevantes son el papiro Ahmes y el papiro de Moscú a los que dedicaremos un estudio más detallado.

El **papiro Ahmes**, también llamado papiro Rhind, según nos refiramos al escriba que lo copió sobre el 1650 a.C. o al abogado escocés que lo encontró en un anticuario en 1858, se encuentra en el Museo Británico. Fue escrito bajo el reinado de Apofis I (1585 a.C., 1542 a.C.), rey perteneciente a la dinastía de los hicsos, pueblo invasor que dominó Egipto durante más de un siglo. Los escribas egipcios habían de dominar la lectura y la escritura en sus dos formas habituales: la jeroglífica, reservada para las inscripciones en piedra y el culto religioso, y la hierática o cursi-

va, que es la que predominaba en los papiros. El papiro Ahmes, de más de cinco metros de longitud y de 0'33 metros de ancho, no es una excepción y en su encabezamiento está escrito con este lenguaje la pretenciosa frase:

"Razonamiento exacto para averiguar las cosas y el conocimiento de todas las cosas, misterios (.....) y todos los secretos. Este libro está escrito en el año real 33, mes 4 de ahket, rey del Bajo Egipto, Awserre. Vida dada, a partir de una copia antigua hecha en el año del Rey del Alto Egipto, Nymatre. El escriba Ahmose escribe esta copia"

Muchos de los conocimientos demostrados por Ahmes provenían de antiguo pues su vida transcurrió en el llamado Imperio Medio y las pirámides, cuya construcción necesitaba de numerosos cálculos, ya se habían construido durante el Imperio Antiguo. Los investigadores deducen de la frase inicial de Ahmes que este papiro es una copia de un texto original de posiblemente el reinado de Amenemes III (1844 a.C., 1797 a.C.). El papiro parece destinado a enseñar los cálculos que habrían de utilizar los futuros escribas o los encargados de la organización de la sociedad egipcia pues al final de cada problema Ahmes añade:

"Haz lo mismo cada vez que encuentres un problema semejante".

Para ser un Tratado de aritmética Ahmes se deshace en elogios. Y es que el conocimiento que aportaba debía ser algo que se consideraba exclusivo y esotérico. En el texto aparecen resueltos problemas de aritmética de todo tipo, operaciones con números naturales y con fracciones, ecuaciones lineales, progresiones aritméticas, áreas y volúmenes, pendientes de pirámides y repartos proporcionales.

Hay también en este papiro tablas de descomposición de 2/n en suma de fracciones unitarias (sólo con n impar pues si n es par ya equivale a una unitaria al simplificarse), y otra en la que se escriben las descomposiciones de las fracciones de la forma n/10. Estas tablas le servirían al escriba en los cálculos con fracciones que habría de efectuar para resolver los problemas del papiro.

Por ejemplo, en la primera tabla aparece lo siguiente:

5	3,15
7	4,28
9	6,18
11	6,66
13	8,52,104

Lo cual quiere decir que:
2/5=1/3+1/15
2/7=1/4+1/28
2/9=1/6+1/18
2/11=1/6+1/66
2/13=1/8+1/52+1/104
Y así la tabla continua hasta el 2/101.

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

La fórmula permite descomponer algunas de las fracciones egipcias. Pero no todas siguen esa regla como ocurre aquí con 2/13 por lo que no aclara cual fue el método

También hay una tabla con la descomposición de las fracciones de la forma n/10, similar a la siguiente:

2	5
3	5,10
4	3,5

Lo cual quiere decir que:
2/10=1/5
3/10=1/5+1/10
4/10=1/3+1/5
Y así la tabla continua hasta el 9/10.

Los métodos que utiliza Ahmes para las operaciones fundamentales con números enteros y fracciones son ciertamente intrincados. Para hacernos una idea daremos como ejemplo una multiplicación de las más sencillas que aparece en el papiro:

Multiplicar 41x59.

El proceso general está basado en el hecho de que cualquier número se puede expresar como suma de potencias de 2. Ahmes construye la tabla siguiente en la que el valor de cada fila, se obtiene tomando el doble del que tiene arriba:

1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

Puesto que el siguiente valor de la primera columna sería 64 que ya es mayor que 41 nos quedaremos con el 32. Lo que Ahmes dice que se debe hacer es expresar 41 como suma de números de la primera columna (suma de potencias de 2). Actúa así: Le restamos a 41 el último valor, 32, y da 9. Le restamos ahora a 9 el mayor valor posible de la primera columna, que será 8, nos queda 9-8=1. Hacemos lo mismo con el 1 y tendremos 1-1=0. Esto nos da que 41=32+8+1. Ahmes aplica entonces la propiedad distributiva, por lo que:

$$41x59= 32x59+8x59+1x59 =1888+472+59=2419.$$

Para la división se realizaba un procedimiento, en principio, parecido. Si la división era entera no había problema. Por ejemplo, para hacer 21/3 escribimos:

1	***3*** *(1 grupo de tres elementos)*
2	***6***
4	***12***

Como al número siguiente, al 8, le correspondería 24 que ya es mayor de 21 no se sigue en la tabla. Por fortuna el 21 se obtiene como la suma de la segunda columna lo que nos dice que con los 21 elementos podemos hacer 1+2+4=7 grupos de 3 elementos.

Pero si la división no era exacta el proceso se podía llegar a complicar enormemente. Veamos un ejemplo con el **problema 65 del papiro** que se resuelve haciendo la siguiente operación:

Dividir 100 entre 13

El escriba empieza como se explicó antes haciendo la tabla de las duplicaciones:

1	***13***
2	***26***
4	***52***

Al siguiente, el 8, le correspondería 104 que se pasa de 100 por lo que no lo pone. Pero desgraciadamente 100 no se puede obtener como suma de elementos de la segunda columna pues faltan 9. Entonces Ahmes reparte esos 9 entre 13 continuando la tabla de la siguiente forma:

2/3	***8+2/3***
1/13	***1***
1/39	***1/3***

El sistema que utilizó para elegir esos números nos es desconocido pero con ellos consigue que 13+26+52+8+2/3+1/3=100, y, por tanto, el resultado de la división es 1+2+4+2/3+1/39. Es sencillo pensar que para dividir 9 panes entre 13 personas divide cada unidad en tres partes con lo que tendría 27 partes de las que daría 2 a cada persona y sobraría una que dividiría en 13 partes que equivaldría a 1/39 por persona. Sin embargo, se ve que el 1/13 de la tabla de Ahmes no hace ninguna falta lo que hace suponer que el escriba tenía un sistema para elegir los números de la primera columna.

Las operaciones con fracciones suelen ser bastante más complejas. Los resultados venían siempre expresados como suma de fracciones unitarias con denominadores menores de 1000 y escritas en orden descendente, es decir, primero la fracción con menor denominador. En la mayoría de los casos, solían utilizar también números auxiliares, llamados **números rojos**, debido al color que utilizó Ahmes para escribirlos. Un ejemplo es el problema 14 del papiro:

Calcular 1/28(1+1/2+1/4)

Ahmes aplica aquí la propiedad distributiva transformando el resultado en 1/28+1/56+1/112. Dado que esas fracciones le eran poco manejables para hallar la suma busca un número (rojo) tal que al aplicarlo a estas tres fracciones se obtengan otras más sencillas. Escoge el 28 y observa que:

1/28 partes de 28 que es igual a 1
1/56 partes de 28 que es igual a ½
1/112 partes de 28 que es igual a ¼

Es claro que la suma que buscamos es el resultado de dividir (1+1/2+1/4)/28. Para hallarlo lo que hace es buscar el inverso de este número, resultado de la división 28/(1+1/2+1/4), es decir, el número por el que hay que multiplicar (1+1/2+1/4) para obtener 28. Escribe entonces las multiplicaciones ordenadamente en una tabla hasta llegar al resultado tal como explicamos antes.

1	(1+1/2+1/4)
2	2. (1+1/2+1/4)=3+1/2
4	4. (1+1/2+1/4)=7
8	8. (1+1/2+1/4)=14
16	16. (1+1/2+1/4)=28

Entonces el valor que buscamos es el inverso de 16, que será 1/16. Es decir: 1/28.(1+1/2+1/4)=1/16

Otro ejemplo de uso de los números rojos sería el **problema 21 del papiro** en el que Ahmes hace una resta de fracciones.

Restar 1-(2/3+1/30)

En este caso elige el 30 como número rojo con el fin de simplificar las operaciones. La idea es calcular 30.(1-(2/3+1/30))=9, por lo que entonces 1-(2/3+1/30)=9/30. Ahmes hace lo siguiente:

1 parte de 30 es 30
2/3 partes de 30 es 20
1/30 partes de 30 es 1

Como 30-(20+1)=9. Sólo falta saber cuántas partes de 30 dan 9.
Hace la división 9/30 según se explicó antes y escribe:

1	***30***
1/10	***3***
1/5	***6***

Como 6+3=9, entonces 9/30=1/5+1/10. Igual que antes, el por qué de la elección de 1/10 y 1/5 no se explica en el texto.

Otros problemas que destacar del papiro son los siguientes:

- *Ecuaciones lineales (problema 24 del papiro).-* ***Una cantidad mas 1/7 de la misma da un total de 19. ¿Cuál es la cantidad?***

Para resolver la ecuación, que para nosotros se plantea como x+x/7=19, Ahmes parte de una estimación de la solución (a este método se le llama el ***"regula falsi"****). Toma el valor 7 y calcula 7+7/7=8. Lo que busca entonces será un valor, V, tal que V.8=19. La solución del problema será entonces 7.V. Por tanto, x=7.19/8 que el escriba expresa como 16+1/2+1/8.*
(Este método de estimación de la solución será usado también por Diofanto en el siglo II).

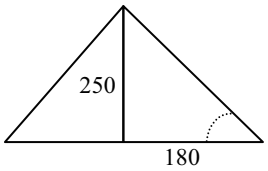
En otro de los papiros encontrados, el de Berlín, aparece incluso la resolución de un sistema de dos ecuaciones siendo una de ellas de segundo grado. Sin embargo, en ningún momento aparece algo parecido a la fórmula de la ecuación de 2º grado. El método para resolverlo es también el "regula falsi" partiendo de una estimación de la solución. En este papiro aparecen también los resultados de algunas raíces cuadradas posiblemente obtenidas de una tabla de cuadrados leída en sentido contrario.

- *Progresiones aritméticas (problema 64 del papiro).-* ***Repartir 10 hekat (medida de peso egipcia equivalente a 1/20 del khar) de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea de 1/8 de hekat***

Ahmes lo resuelve siguiendo los pasos que marca la fórmula $a_n=(n-1).(d/2)+(S/n)$, donde a_n es el último término de la sucesión (en este caso será a_{10}), 'd' es la diferencia (en este caso será 1/8), y S es la suma de los n primeros términos (en este caso será 10). Esta fórmula se puede obtener despejando a_n de la conocida fórmula para la suma, $S=(a_1+a_n).(n/2)$.

Pero en el papiro no aparece ninguna fórmula lo que parece indicar que Ahmes dedujo la solución de una manera lógica. En cualquier caso, tras seguir los pasos calculó a_n y todos los demás términos simplemente restando ordenadamente 1/8 al anterior.

- *Geometría (problema 56 del papiro).-* ***¿Cuál es el seqt de una pirámide de 250 cubits de altura y 360 cubits de lado de la base?***



Este problema fue muy importante, entre otros motivos para mantener la uniformidad en la inclinación de las rampas construidas para que los esclavos subieran las enormes piedras que forman las pirámides. Cualquier pequeña variación en la inclinación de alguna de las caras provocaría que las cuatro aristas no convergieran en el vértice. Además, una inclinación excesiva llevaría consigo el desmoronamiento de la pirámide como había ocurrido en los primeros intentos de algunos faraones datados a partir del 2500 a.C. aproximadamente. El record en pendiente lo tiene la pirámide de Unas que data del 2350 a.C. con inclinación de 56º18', si bien es de base y altura menor que la de Keops (51º50') o la de Kefrén (53º7').

Respecto a las unidades, el seqt es el equivalente a la cotangente del ángulo formado por la base y una cara lateral de la pirámide, es decir, es una forma de medir la pendiente o inclinación (actualmente se utiliza la tangente) de la pared de la pirámide. En las medidas horizontales los egipcios utilizaban el palmo (o mano) y en las medidas verticales utilizaban el codo (cubit) que equivalía a 7 palmos.

Para resolver el problema Ahmes halla ½ de 360 que da 180 (es decir, la distancia desde el centro de la base al lado). Después multiplica 250 hasta llegar a 180 obteniendo ½+1/5+1/50, (es decir, divide 180/250 lo que nos daría la cotangente del ángulo). Sin embargo, los egipcios expresaban el valor del seqt en palmos por codo. Así, puesto que un cubit son 7 palmos, Ahmes multiplica el resultado por 7 quedándole 7(½+1/5+1/50)=5+1/25 (es decir, ha pasado los 180 cubits a palmos) lo que finalmente dice que el seqt vale 5+1/25 palmos por codo.

Tomando como unidad de superficie el cuadrado (normalmente el codo cuadrado), los escribas de entonces conocían que el área del rectángulo coincidía con la cantidad de cuadrados que pudieran inscribirse en él y que este número se podía obtener como el resultado de multiplicar las dos dimensiones del rectángulo. Formando entonces rectángulos a partir de otras figuras Ahmes halla también áreas de triángulos, trapecios y otros polígonos. En cuanto a los volúmenes, halla los de prismas rectangulares y cilindros multiplicando el área de la base por la altura tal como hacemos hoy.



Fragmento del papiro Rhind escrito en hierático con seis problemas separados por líneas horizontales. En el tercero, por ejemplo, se pide hallar el área de un triángulo de base 4 y altura 10. En el cuarto se pide el área de un triángulo truncado (trapecio isósceles de bases 4 y 10 y altura 20). Ambos problemas los resuelve completando a un cuadrilátero.

Un problema de los más significativos es el *problema 50.* En él toma como *área de un círculo de diámetro 9 el mismo que el de un cuadrado de lado 8, lo que da para* π *un valor de 3'1605*. Esta aparentemente burda aproximación no se superaría hasta Arquímedes, milenio y medio después. El valor obtenido vuelve a ser usado posteriormente por Ahmes en otro problema para hallar el volumen del cilindro de diámetro 9 y altura 6 simplemente multiplicando 8^2.6.

Aunque no está corroborado, los cálculos efectuados en muchos de estos casos parecen indicar el conocimiento, al menos de forma práctica, del teorema de Pitágoras cuya demostración habría de esperar al siglo III a.C.. Los llamados "anudadores" en Egipto eran los encargados de medir distancias con cuerdas en las que previamente habían hecho unos nudos a unas distancias fijas y al parecer sabían que si formaban un triángulo que tuviera de lados 3, 4 y 5 nudos, forzosamente habría de tener un ángulo recto. Esto les permitía trazar perpendiculares que indicaran direcciones como, por ejemplo, la del mástil sobre la cubierta en los barcos o la de los lindes en las particiones de tierras.

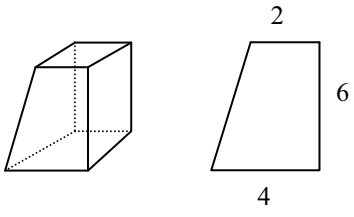
1.3 EL PAPIRO DE MOSCÚ

Otro importante documento que avala los conocimientos egipcios en matemáticas es el **papiro de Moscú**. Data de la dinastía XII (sobre el 1890 a.C.) y se encuentra en el Museo de Bellas Artes de Moscú. Se trata de un papiro de más de cinco metros de longitud pero de apenas siete centímetros de ancho en el que el escriba (de nombre desconocido) resuelve 25 problemas cotidianos de los que destacamos los dos siguientes:

En el primero se siguen procesos equivalentes a la aplicación de fórmulas para ***hallar el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada***. El dibujo que utiliza el escriba para representar la pirámide es simplemente una de sus caras laterales (trapecio isósceles) sobre la que escribe las medidas.

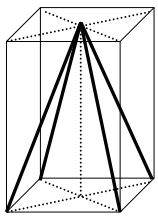
El método de cálculo es equivalente a la aplicación de la fórmula:

$$\mathbf{V=h(a^2+ab+b^2)/3}$$

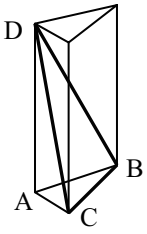


Es decir, halla los cuadrados de las dos bases, 2 y 4, les suma el producto de ambas, 2.4, y multiplica el

resultado por un tercio de la altura, (1/3).6, lo que da un resultado de 56, si bien en ningún momento el escriba menciona ninguna fórmula. Los investigadores opinan que posiblemente llegara a este proceso de cálculo tras haber calculado anteriormente el volumen de una pirámide. Aunque no aparece en ningún papiro, dada la importancia que para ellos tenía esta figura y la facilidad del cálculo de su volumen, es de suponer que lo conocían. Un método sencillo con el que obtenerlo sería considerar la pirámide inscrita en un prisma rectangular. Si trazamos las diagonales de sus caras cuadradas podemos dividirlo en cuatro prismas de base triangular.



1



2

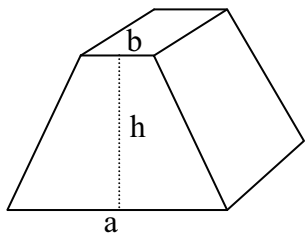


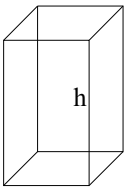
3

El volumen del prisma rectangular era bien conocido como multiplicación del área de la base por la altura. Entonces el volumen de la pirámide sería el volumen de dicho prisma menos cuatro veces el del prisma señalado en el dibujo con un 3.

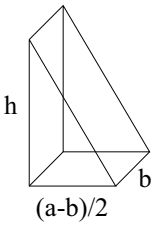
Si dividimos este prisma 3 en dos tetraedros iguales partiendo su cara rectangular por la diagonal (línea de puntos), tenemos que serán iguales que el tetraedro ABCD del prisma 2 pues todos tienen la misma base y altura como se ve fácilmente, y, por tanto, el prima 2 es tres veces el volumen de uno de estos tetraedros. Entonces el prisma rectangular inicial se puede descomponer en doce tetraedros mientras que la pirámide se puede en cuatro de ellos. Se deduce así que el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma rectangular. Y esto es de igual manera para cualquier pirámide oblicua de base cuadrada.

Con este dato, el escriba podía hallar el volumen del tronco de pirámide de diversas formas pero la que parece más aceptada consiste de nuevo en la descomposición del tronco en los prismas siguientes:

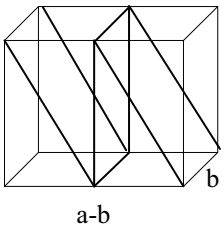


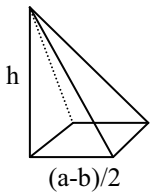


Prisma rectangular para la parte central del tronco. Su volumen será $b^2.h$



Cuatro prismas triangulares para los cuatro laterales. Se pueden juntar dos a dos invertidos y formar un poliedro de anchura b y largo a-b. Su volumen será entonces (a-b).b.h=(ab-b^2).h. Si lo sumamos con el volumen del prisma central anterior nos queda ***a.b.h***





Cuatro pirámides de base cuadrada para las cuatro esquinas. Se supone que conocían su volumen por el método explicado antes. Las cuatro serán:

$$4.\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}(a-b)^2\right).h=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2-2ab\right)h$$

Sumando el volumen a.b.h con el de las cuatro pirámides de las esquinas queda $V=\frac{1}{3}.h.(a^2+b^2+ab)$, que es la que utilizó el escriba.

Un segundo problema relevante en ese mismo papiro es el cálculo de la superficie de una semiesfera (en realidad el escriba se refiere a una cesta de forma semiesférica) de radio 4 ½. Sin explicar por qué, el escriba dice que se realicen unos ciertos cálculos obteniendo finalmente un sorprendentemente acertado resultado de 32 (el resultado correcto es $2\pi r^2$=31'8 .....). El proceso parece haberse hecho de una forma experimental sin usar en ningún caso una fórmula con un valor constante para π. En cualquier caso es sorprendente ver como incluso pudieron hallar el área de una superficie curva.

Cuestiones como las dos anteriores son las que dejan entrever que los papiros que han llegado hasta nosotros expresan solamente una mínima parte de los verdaderos conocimientos matemáticos del antiguo Egipto. Posiblemente, los papiros fueran el equivalente a los libros de texto de la enseñanza Primaria de hoy día. El aura de misterio que rodea las pirámides, sobre todo la más grande de ellas, la de Keops, ha hecho que las

relaciones entre sus medidas hayan sido estudiadas concienzudamente por muchos investigadores. Entre las magnitudes de la pirámide se han descubierto relaciones áureas de las que hablaremos más adelante (esta relación es de gran interés en las matemáticas griegas a partir de Pitágoras). También se ha comprobado que la relación entre el perímetro de la base y la altura de la pirámide es 2π (44/7=6'28 aproximadamente) como si hubieran planeado que la base coincidiera con la circunferencia de radio la altura de la pirámide. Pero esto sólo parece ser una casualidad, ¿o no?. Quizá algún día se descubra un nuevo documento con conocimientos matemáticos muy superiores que confirmen muchas de estas teorías.

1.4 MESOPOTAMIA, MATEMÁTICAS EN BASE 60

Los primeros vestigios de la existencia de agricultura datan del 13000 a.C.. Los pueblos hasta entonces nómadas hubieron de volverse sedentarios y crear una nueva organización social con repartos de tierras y fijación de lindes. Los asentamientos se producían, por supuesto, junto a los ríos que proporcionaban agua, fertilidad de las tierras y pesca. De esta forma fueron surgiendo las grandes civilizaciones del mundo antiguo: **Mesopotamia** que quiere decir "Tierra entre dos ríos", y estaba ubicada en Asia Menor entre las laderas de los ríos Tigris y Eúfrates en las regiones que ocupa la actual Irak sobre el golfo pérsico, y **Egipto** en las laderas del Nilo.

La civilización mesopotámica fue la primera gran civilización del mundo antiguo y floreció a partir del cuarto milenio a.C., antes que los egipcios. Fue sede de la mítica Babilonia, una de las mayores urbes de la antigüedad, por lo que a veces se identifica esta civilización como babilónica. Sus habitantes fueron los sumerios a los que se debe el primer sistema de escritura. Debido a que el clima, mucho más seco que en Egipto, no aconsejaba el uso de papiros los sumerios optaron por la inscripción de sus textos sobre tablillas de arcilla que luego secaban al sol. La escasez de madera y de canteras de piedra hizo que la arcilla fuera muy importante para esta civilización. En particular, mezclada con paja, y sustentado por vigas de madera daba consistencia a sus chozas.

Originalmente los registros de cantidades en las transacciones efectuadas se expresaban en cajas esféricas o cilíndricas de arcilla donde se introducían bolas o conos grandes y pequeños. Las bolas tenían un valor de 10, los conos pequeños valían 1, y los conos grandes 60. A partir

de los datos extraídos de las tablillas de arcilla encontradas se desprende que pronto los contables sumerios sustituyeron este sistema por las tablillas en las que se escribía mediante incisiones circulares y marcas usando la punta de un cálamo. Este es el origen de la escritura protocuneiforme.

Las matemáticas de esta civilización tuvieron su apogeo entre el 1800 y el 600 a.C. y su nivel fue superior a cualquier otro de la antigüedad, salvo, por supuesto, al de los griegos, los cuales a su vez crearon su matemática partiendo de los conocimientos sumerios. Sin duda uno de los factores que provocaron esta supremacía mesopotámica fue el uso de un sistema de numeración muy completo. Sexagesimal (de base 60) y sumativo (el valor del número era la suma de los valores correspondientes a cada signo), en este sistema el valor de los símbolos empleados dependía de la posición que ocupaban dentro del número. Era también, por tanto, un sistema posicional.

El origen del sistema sexagesimal proviene de dar ordenadamente un número a cada falange de los dedos índice hasta meñique (que hacen un total de 12), mientras que el pulgar se usaba para ir señalándolas cuando se contaba. Con la otra mano se llevaba la cuenta de las docenas contadas. Así se podían contar hasta 60 números. Este primitivo método, junto al hecho de que 60 es una cantidad relativamente pequeña con un número considerable de divisores (para superarlo hay que irse hasta el 144), fueron posiblemente causas de que el pueblo sumerio adoptara el sistema sexagesimal.

Sus principales signos y reglas se reflejan en el siguiente cuadro. Nosotros utilizaremos la notación en cursiva para escribir los números separando las unidades de cada orden con un punto.


=10

=1 ó 60 ó 60^2 ó.....


=23

El signo *pasaba a un orden superior con un valor de 60 dejando un espacio en blanco que lo separara del otro grupo inicial formado por esos mismos signos*


=2.60+5=*2.05*

Así, en la última agrupación su valor es 1 pero en la primera es 60 y si hubiera tres grupos sería 60^2


=2.60^2+1.60+23=*2.01.23*

Más tarde se produjo un gran adelanto cuando para evitar confundir expresiones como 2.60+2 con 2.60^2+2 se introdujo el uso del símbolo  *inclinado para señalar que faltaba la cifra de un determinado orden. Algo equivalente al uso de nuestro cero*

 **$=2.60^2+1=$*2.00.01***

 **$=2.60+1=$*2.01***

Sin embargo, los sumerios no lo entendieron como un cero pues nunca ha aparecido en posición terminal de un número

También representaban las fracciones y su valor decimal. Para números como 15/8 dividían las dos cantidades obteniendo cociente 1 y resto 7. Multiplicaban el resto por 60 y volvían a dividirlo entre 8. Obtenían ahora cociente 52 y resto 4. Multiplicaban 4 por 60 y volvían a dividir entre 8. Obtenían cociente 30 y resto 0. Expresaban entonces:

 *que quiere decir 15/8=1;52.30*

Manejaron muy buenas aproximaciones de irracionales. Por ejemplo la expresión que calcularon para la diagonal de un cuadrado de lado 1, es decir, $\sqrt{2}$ *, era:*



Significaba 1;24.51.10 pero, teniendo en cuenta que estaba escrito en su sistema sexagesimal, es lo equivalente al valor decimal de un ángulo de 1º24'51''10''', que es $1+24/60+51/60^2+10/60^3$ es decir 1'414222, que se diferencia del valor real en menos de una cienmilésima. La distinción entre un número decimal del que no lo es venía dada en la mayoría de los casos por el contexto del problema que se estuviera resolviendo.

Los escribas de aquella época solían provenir de familias de buena posición como ricos mercaderes, sacerdotes y otros escribas. Se formaban en las llamadas "escuelas de tablillas" y allí se preparaban para realizar los cálculos correspondientes a impuestos e intereses, superficies de tierras, volúmenes de producción o capacidad de canales y a todo aquello que necesitara un manejo aritmético, algebraico o geométrico. Estaban considerados como personas privilegiadas por ser los depositarios de este conocimiento.

El dominio de la aritmética alcanzado por los sumerios no se igualó hasta la llegada de los pitagóricos en el siglo VI a.C.. Su sistema

de numeración permitía que se manejaran las operaciones con cierta fluidez. Por ejemplo, para dividir 7283 entre 24, además del método explicado en el cuadro anterior, en ocasiones lo que hacían era multiplicar 7283=2.01.23 por el inverso de 24, es decir, 1/24=0;02.30. Aplicaban entonces la propiedad distributiva:

2 x 0;02=0.04
2 x 0;00.30=0.01
0.01x0;02=0.0.02
0.01x0;0.30=0;30
0.0.23x0;02=0;46
0.0.23x0;0.30=0;0.660=0;11

Si sumamos los segundos miembros, respetando la base 60, obtenemos 5.03;27 que es el valor de 303'458333.....

Incluso fueron capaces de fabricar ***algoritmos para encontrar la raíz cuadrada de un número 'a'*** como el que vemos a continuación:
Sea a_1 una primera aproximación de $\sqrt{a}$. Hallamos $a/a_1=b_1$. Supongamos que $a_1^2 < a$ (si es mayor se razona de forma semejante) entonces $b_1{}^2 = \frac{a^2}{a_1{}^2} > a$, es decir, $a_1 < \sqrt{a} < b_1$ por lo que si hallamos la media aritmética de a_1 y b_1 será una mejor aproximación. Así que calculamos $a_2=(a_1+b_1)/2$ que será una nueva y mejor aproximación de $\sqrt{a}$. Sea $b_2=a/a_2$. Calculamos $a_3=(a_2+b_2)/2$ que aproximará mejor aún por el mismo motivo de antes. Sólo es cuestión de seguir este método y $\sqrt{a}$ quedará cada vez más encajada entre los a_i y los b_i.

$$a_1<a_2<a_3<\ldots\ldots\ldots<\sqrt{a}<\ldots\ldots\ldots\ldots<b_3<b_2<b_1.$$

(Este método se justifica como un caso particular del algoritmo de Newton que se verá más adelante para encontrar la solución de una ecuación x^2-a=0).

Para simplificar sus cálculos era habitual el uso de unas tablillas creadas a tal fin con los resultados de operaciones básicas como tablas de multiplicar, de inversos de números, de cuadrados, etc. Uno de sus principales legados se encuentra en la tablilla conocida como Plimpton en la que aparecen 15 ternas pitagóricas (ternas de números x,y,z, tales que cumplen la condición de Pitágoras, $x^2+y^2=z^2$). Son las siguientes:

X	Y	Z
2.0	1.59	2.49
57.36	56.7	1.20.25
1.20.0	1.16.41	1.50.49
3.45.0	3.31.49	5.9.1
1.12	1.5	1.37
6.0	5.19	8.1
45.0	38.11	59.1
16.0	13.19	20.49
10.0	8.1	12.49
1.48.0	1.22.41	2.16.1
1.0	45	1.15
40.0	27.59	48.49
4.0	2.41	4.49
45.0	29.31	53.49
1.30	56	1.46



Tablilla Plimpton

Los valores vienen expresados en base 60. Así la primera fila corresponde a la terna:

2.60=**120**, 1.60+59=**119**, 2.60+49=**169,** pues $120^2+119^2=169^2$.

Pero lo más importante es el uso de fórmulas para obtener estos valores dentro de un tipo de matemática en que cada problema era independiente de los demás y en el que las fórmulas son escasas. Parece claro que para las ternas pitagóricas utilizaron fórmulas como (n^2-1, 2n, n^2+1) con n>1 y natural. Existen tablas con los valores de las fracciones del tipo 1/n e incluso otras en las que hallan sumas de progresiones aritméticas y geométricas (aunque sin evidencias del uso de una fórmula al igual que ocurría en los papiros egipcios).

Datos que avalan su dominio del teorema de Pitágoras son la resolución de problemas como *encontrar la longitud x de una caña totalmente apoyada en la pared sabiendo que si la punta baja 3 unidades, la base se separa de la pared 9 unidades*. Este problema tiene una resolución basada claramente en el teorema de Pitágoras el cual se supone que aplicó el escriba al dar la respuesta correcta igual a $\frac{1}{2}.\frac{9^2+3^2}{3}=15$ (que se puede obtener construyendo un triángulo rectángulo de hipotenusa 'x' y catetos x-3 y 9).

Otros adelantos geométricos también atestiguan el conocimiento de teoremas que se demostrarían casi 2000 años después como el que asegura que: "E*n un triángulo inscrito en una circunferencia con la hipotenusa igual al diámetro, el ángulo entre los catetos es recto".*

Su mejor aproximación conocida para π proviene de una tablilla de Susa (cerca de Babilonia) que está datada sobre el 2000 a.C. en la que hay un problema que *da la razón del perímetro de un hexágono y la longitud de la circunferencia en la que está inscrito como 0;57.36, es decir, 0'96=3/*π*, de donde se deduce un valor de* π *= 3'125,* con un error prácticamente igual a la de los egipcios pero en esta ocasión por defecto.

El nivel algebraico de esta civilización también fue considerable hasta el punto de dominar las ecuaciones cuadráticas. Prueba de ello es la resolución exacta de problemas como:

Hallar el lado del cuadrado si su área menos el lado vale 870.

Este problema, que hoy consideraríamos bastante inconsistente al restar longitudes a áreas, equivale a resolver la ecuación de segundo grado x^2-x=870. El escriba pide que se siga el siguiente proceso que compararemos con la resolución de x^2+bx+c=0:

Toma 1 (el coeficiente de x cambiado de signo) y lo divide en dos partes, lo que da ½ → (-b/2)

Se eleva 1/2 al cuadrado, que da ¼ → $(-b/2)^2$

Se suma ¼ y 870→ $(-b/2)^2$-c

Se halla la raíz cuadrada del resultado anterior → $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Se suma ½ al resultado de la raíz cuadrada → $\frac{-b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$. Finalmente da 30.

Claramente lo que ha aplicado es la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática cuando el coeficiente de x^2 es 1.

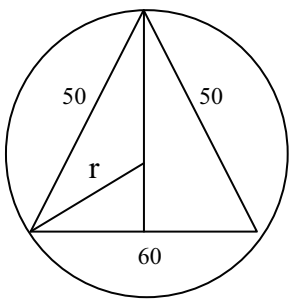
En otros problemas dan métodos correctos para resolver sistemas con dos incógnitas del tipo x+y=b, x.y=a de una forma equivalente a la resolución de la ecuación de 2º grado ya que una ecuación del tipo x^2+a=bx se puede escribir como x(b-x)=a, y llamando y=b-x nos queda

que resolver la ecuación es equivalente a resolver el sistema formado por las ecuaciones x.y=a; x+y=b. A continuación especificamos algo más.

El proceso que seguían para resolver el sistema x+y=b; x.y=a, era el siguiente:

- *Buscan dos números que sumados valgan b y empiezan suponiendo que fueran b/2 y b/2.*
- *Su producto es entonces $(b/2)^2$ pero para resolver el sistema dicho producto ha de ser 'a'. Se ha cometido un error de valor $(b/2)^2$-a.*
- *Puesto que hay un error cambiaban los números elegidos inicialmente. Llamaban x=(b/2)+t. Entonces, dado que x+y=b, ha de ser y=(b/2)-t.*
- *Al multiplicar x.y se obtiene $(b/2)^2-t^2$ que ha de valer 'a'.*
- *Despejaban* $t=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}$
- *Por tanto,* $x= (b/2)+ \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}$ *con lo que en realidad habían deducido la fórmula de resolución de la ecuación de 2º grado*

El Teorema de Pitágoras aparece junto a las ecuaciones de 2º grado en otros problemas geométricos como en el que pide encontrar el círculo en el que se inscribe un triángulo de lados 50, 50 y 60.



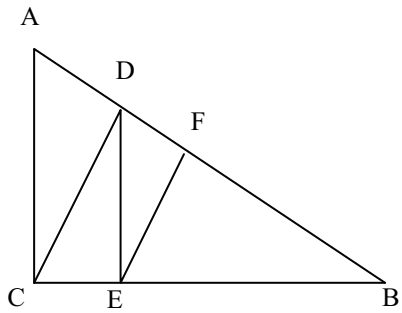
Para resolverlo, el escriba supone cierto un resultado elemental que dice que en un triángulo isósceles la altura correspondiente al lado desigual lo divide en dos partes iguales. Calcula entonces esta altura con un proceso similar a la aplicación del teorema de Pitágoras y obtiene h=40. Por tanto, y de nuevo con Teorema de Pitágoras, $r^2=30^2+(40-r)^2$. Resolviendo la ecuación de 2º grado se obtiene r=31'25.

Con los demás tipos de ecuaciones cuadráticas o sistemas derivados actuaban de forma similar.

Para las ecuaciones cúbicas utilizaban diversos métodos. En general manejaban unas tablas creadas por ellos mismos con las potencias terceras de los números o bien con los valores de las potencias de la forma n^3+n^2. Así, por ejemplo, la ecuación de la forma $ax^3+bx^2=c$ se simplificaba, tras multiplicar ambos miembros por a^2/b^3, a una ecuación de la forma $(ax/b)^3+(ax/b)^2=ca^2/b^3$, es decir, $n^3+n^2=k$ cuya solución buscaban en su tabla. Esto indica un increíble dominio del álgebra que se ve ratificado cuando incluso llegaron a considerar las ecuaciones bicuadradas, $ax^4+bx^2=c$, como una ecuación cuadrada $ay^2+by=c$.

Aunque la tendencia matemática de los sumerios era puramente algebraica conocían muchas de las propiedades básicas de las principales figuras geométricas. En general solían traducir los problemas geométricos a ecuaciones algebraicas aunque no siempre. Una de las que a la postre sería en las matemáticas griegas de las más importantes propiedades de los triángulos tampoco les pasó desapercibida: la semejanza de triángulos. Existe un problema del segundo milenio a.C. que expondremos a continuación con la notación sexagesimal pues los valores decimales a los que corresponden tienen excesivos decimales.

Un campo triangular de lados 45, 1.0 y 1.15 se encuentra dividido en cuatro parcelas triangulares según el dibujo siguiente:



CD es la altura de ABC.
DE es la altura de DBC.
EF es la altura de DBE

Las áreas respectivas son: ***ACD=8.6,***
CDE=5.11;2.24,
DEF=3.19;3.56.36,
EFB=5.53;53.39.50.20,

Hallar los lados CE, CD, AD y DF

Los pasos que sigue el escriba son los siguientes:

Coge de alguna tabla el inverso de 1.0 y lo multiplica por 45, es decir, divide los dos catetos. Resulta 0;45. Multiplica este resultado por 2 obteniendo 1;30. Multiplica 1;30 por el área de ACD, es decir, hace 8.6x1;30 que da 12.9. Halla la raíz cuadrada del resultado y da 27 que dice es el valor del lado AD. Obtiene CD posiblemente con un proceso similar al Teorema de Pitágoras (o bien lo consultaría en alguna tablilla como la Plimton) y reitera el proceso para el triángulo DBC.

Si analizamos el problema comprobamos que, dadas las medidas iniciales, el triángulo de partida es rectángulo. Además, las parcelas se han ido obteniendo trazando las alturas perpendiculares a las respectivas hipotenusas de los triángulos que se van formando. Esto nos dice que los nuevos triángulos son semejantes al primero y entre sí. Llamando BC=a=1.0, AC=b=45, AB=C=1.15, y a las incógnitas AD=x, CD=y, lo que el escriba hace es hallar (b/a).2.(x.y/2) y después la raíz cuadrada y dice que ese resultado es x. Esto sería imposible de deducir sin suponer que los triángulos ABC y ADC son semejantes. Entonces b/a=x/y, de donde sustituyendo en la expresión anterior nos queda x^2, por lo que haya finalmente la raíz cuadrada.

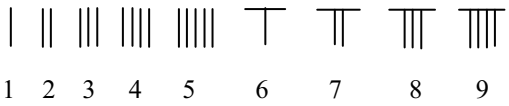
La propiedad de la semejanza de triángulos fue una herramienta fundamental en el desarrollo de la geometría griega pero sólo una de las múltiples aportaciones que los griegos tomaron de los sumerios como veremos más adelante. Los conocimientos astronómicos de los sumerios también fueron básicos para los clásicos griegos. Conocían las constelaciones y los trópicos, y predecían eclipses y el paso de cometas. Aún hoy manejamos habitualmente herencias del sistema de numeración sumerio como es la forma actual de medir el tiempo en horas minutos y segundos y la de medir los ángulos en grados, minutos y segundos.

1.5 SISTEMA CHINO Y MAYA

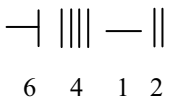
Paralelamente a las civilizaciones anteriores prosperaron las civilizaciones maya y china. Ambas utilizaron sus particulares sistemas de numeración que, si bien es cierto no han tenido demasiada influencia en el desarrollo de la historia de las matemáticas, sí son indudablemente adelantados y podrían haber sido germen de nuestro actual sistema de numeración de no permanecer aisladas durante tantos siglos.

Dos mil años después de los babilonios, e independientemente de su influencia, los matemáticos chinos descubrieron un sistema basado también en dos sencillos signos, barra vertical y barra horizontal. Este sistema era decimal, con signos del 1 al 9, y también posicional.

Cifras chinas siglo II a.C.



Una de sus curiosidades es que para evitar confusiones las unidades de rango impar (unidades, centenas, decenas de millar,…) se expresaban mediante cifras 'verticales' mientras que las de rango par (decenas, millares,…) se representaban con cifras 'horizontales', como vemos en la expresión del número 6412.



Pero la falta de un signo para el cero producía ambigüedades y limitaba mucho su operatividad lo que obligaba a procedimientos ciertamente engorrosos. Así que a pesar de todos sus intentos no se consiguió zanjar el problema hasta el siglo VIII en que, influenciados posiblemente por la matemática hindú, crearon un auténtico cero.

Durante el primer milenio de la era cristiana y en el otro extremo del mundo, en la América Central todavía sin descubrir, la civilización maya alcanzó su máximo esplendor en los más variados ámbitos, arte, arquitectura, comercio, y, por supuesto, en matemáticas y astronomía.

De los pocos escritos y Códices que han llegado hasta nosotros de la civilización maya se observa que, además de las utilidades evidentes en cuanto a cosechas, inundaciones, etc, la astronomía tenía un sentido místico al cual los sacerdotes dedicaban la mayor parte de sus esfuerzos. Elaboraron calendarios de una exactitud muy precisa, estimando la duración del año solar en 365'242 días que supone un error de 1'98 diezmilésimas, inferior al del calendario gregoriano. Describieron el movimiento de muchos cuerpos celestes y calcularon también con exactitud asombrosa la lunación media, la revolución sinódica de Venus y los periodos de eclipses de sol y luna.

Muchos de los cálculos que llevaron a cabo fueron posibles gra-

cias a la utilización de un sistema de numeración muy evolucionado al parecer inventado también por los sacerdotes mayas. Su principal cualidad era que contaba con un signo para el cero lo que denota una gran intuición. Se trataba de un sistema vigesimal (base 20) con sólo dos signos, el punto y la raya. Los números del 1 al 19 se escribían combinando estos dos signos de forma que cada punto significaba una unidad y cada raya cinco unidades.

Así,  quiere decir 12, y  quiere decir 16.

Para números mayores se escribían en forma vertical con una columna que tenía tantos pisos como órdenes de unidades y siguiendo las premisas del sistema vigesimal.

 1.20+1=21  3.20+17=77

Sin embargo, el tercer piso no indica un valor 20 veces superior al del segundo como correspondería a la base 20, sino 360 veces. Los mayas contaban el tiempo transcurrido desde el inicio de su civilización en ciertas unidades que básicamente se establecían en días, meses de 20 días, y años de 360 días. Debido a que la matemática estaba al servicio de la astronomía y del cálculo del tiempo los sacerdotes adoptaron esta prioridad modificando el valor del tercer piso como hemos indicado. Para los pisos posteriores se volvió a la utilización estricta de la base 20 valiendo cada piso 20 veces más que el anterior. Por ejemplo:

9077 =1.7200+5.360+3.20+17 

¿Y el cero? El signo correspondiente se asemejaba a una concha de caracol y se utilizaba correctamente en el caso de que llegasen a faltar cifras de algún orden. Por ejemplo:

87480=12.7200+0.360+3.20+0 

Parece claro que la invención del cero se debe a los mayas algunos siglos antes que lo utilizara la civilización hindú. Además su sistema de numeración permitiría, a pesar de la peculiaridad de su 'tercer piso', realizar cálculos muy precisos. Sin embargo, el hecho de que la matemática creciera a expensas de la astronomía y el carácter místico de ésta nos hace suponer que los avances matemáticos de esta civilización no superaron a los de los babilonios aunque no hayan llegado hasta nosotros documentos suficientes para poder afirmarlo.

1.6 GRECIA, UN SISTEMA ALFABÉTICO

En los últimos siglos de supremacía mesopotámica floreció la civilización griega de la que formaron parte algunos de los más grandes matemáticos de todos los tiempos y que presentaremos en los capítulos siguientes. El sistema de numeración más usado por los antiguos griegos fue el sistema llamado jónico. Este sistema era decimal y sumativo pero su gran fallo fue el no ser posicional (cada signo valía lo mismo ocupara la posición que ocupara lo que obligó a utilizar gran número de signos). Las cantidades venían representadas por las letras de su alfabeto a las que se les añadía un ápice para distinguirlos de las letras. Así α'=1, β'=2, χ'=3 ..... θ'=9, ι'=10, κ'=20, λ'=30, ... ρ'=100, σ'=200, τ'=300..... Para los millares se colocaba el ápice delante de forma que ,α=1000 ,β=2000....,θ=9000. Para escribir números compuestos alineaban sus componentes de izquierda a derecha en orden decreciente y colocaban una raya encima en vez de los ápices correspondientes. Así, el número 1329 se escribía como: $\overline{\alpha\tau\kappa\theta}$

Los griegos, al igual que otras civilizaciones como la china, hacían sus operaciones aritméticas utilizando algún tipo de ábaco o tablero con piedrecillas. En ese sistema de numeración, los pitagóricos comenzaron una clasificación de los números según sus propiedades (pares e impares, primos y compuestos, triangulares, cuadrados, magnitudes irracionales, etc.). Aunque no usaban el cero como número propiamente dicho, sí utilizaron un símbolo para él pero sólo en sus cálculos astronómicos. No aceptaron nunca como solución de problemas cantidades negativas ni irracionales. Incluso los racionales no se consideraban como números en sí, sino como razones de números. Posteriormente y tras varias reformas este sistema seguía teniendo sus limitaciones, por ejemplo, la escritura de números muy grandes. En el siglo III a.C., el mismo Arquímedes tomó el

desafío y decidió hacer su propia contribución a este problema. Inventó un sistema tal que le permitiera expresar cantidades tan grandes como, por ejemplo, el número de granos de arena necesarios para llenar el Universo. Esto lo hizo en su obra conocida como "El Arenario" donde, como explicaremos más adelante, obtiene que en el Universo sólo caben 10^{63} granos de arena. Por supuesto, este número lo expresó con una notación mucho más complicada.

1.7 NUESTRO SISTEMA DE NUMERACIÓN

Tras los griegos, el imperio romano propagó por todos sus dominios su particular sistema de numeración, el cual estaba plagado de carencias, sobre todo para hacer cualquier tipo de operación. Afortunadamente hubo matemáticos griegos que mantuvieron su antiguo sistema, imperfecto, pero mucho más útil que el romano, y otras civilizaciones como la India que propiciaron el avance definitivo al considerar un sistema decimal en el que ya se manejaba el cero.

El sistema decimal que se utiliza actualmente, posicional de diez dígitos, fue inventado en la India alrededor del siglo VI. Sus orígenes son poco claros y no parece tratarse de un descubrimiento aislado, sino de una sistematización gradual de las influencias asirías y griegas. El primer vestigio de utilización por los indios del sistema decimal es un plato del año 595 en el que aparece la fecha del año 346 escrita en este sistema. Inicialmente constaba solamente de nueve signos, pues la primera referencia al cero data de un documento del año 876.

La propagación de este sistema hay que agradecérsela a los árabes que lo introdujeron en Europa al tiempo que extendían sus dominios.

Los numerales indios del 1 al 9 (y el cero), en los que al parecer los árabes inspiraron los suyos, fueron los siguientes:



El último signo, el correspondiente al cero, también recogido de los indios, no fue utilizado de una forma general por los árabes y sólo a partir del siglo XIII se extendió su uso por Europa. La adopción de estos signos fue

distinta entre los árabes del este y los del oeste. De los signos utilizados por estos últimos descienden los numerales actuales en Europa.



Versión de los numerales indios adoptados por los árabes del oeste

Su implantación en Europa sufrió también diversas modificaciones hasta finales del siglo XV en que los numerales corresponden ya prácticamente a los actuales.



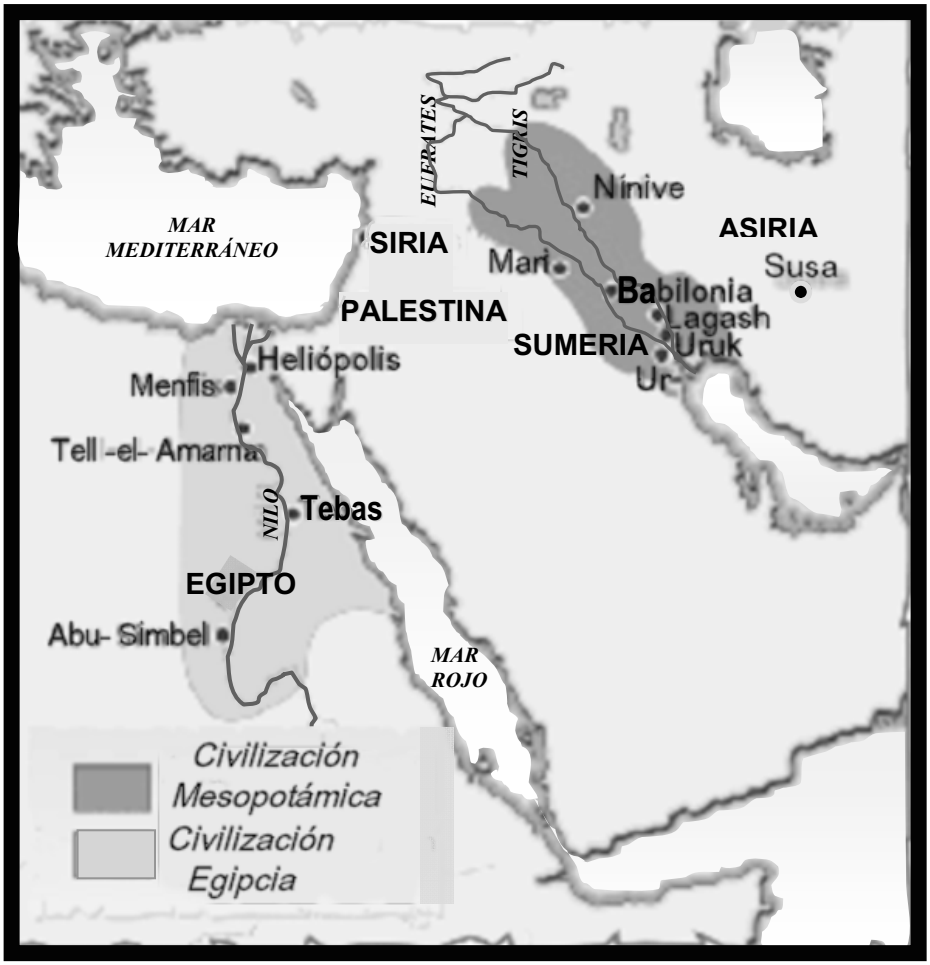
Numerales europeos en el siglo XV

La primera prueba de utilización del sistema decimal en Occidente se encuentra en un manuscrito español del año 992, copia de una obra sobre aritmética de muy poca relevancia que data del siglo VII. Uno de los grandes partidarios del uso de este sistema de numeración fue el francés Gerberto (938,1003), que llegó a ser Papa de Roma, y también un reconocido matemático. Conocido por Silvestre II, este Papa-matemático, aprendió el sistema de numeración indo-arábigo cuando entró en contacto con la cultura árabe en los años en que fue educado en Ripoll (Barcelona) y parece ser que llegó a enseñar el uso de este sistema, eso sí, sin el cero. El signo del cero apareció en el siglo XII en algunas traducciones al latín de las obras árabes y su forma era la de un pequeño círculo (más tarde sufriría ligeras modificaciones en su escritura a manos de diversos autores hasta llegar a la forma ovalada en la que lo conocemos hoy día). En el siglo XIII, Leonardo de Pisa (Fibonacci), el matemático más relevante de la época, aprendió el sistema de los árabes y lo propagó a través de sus libros en la comunidad científica occidental.

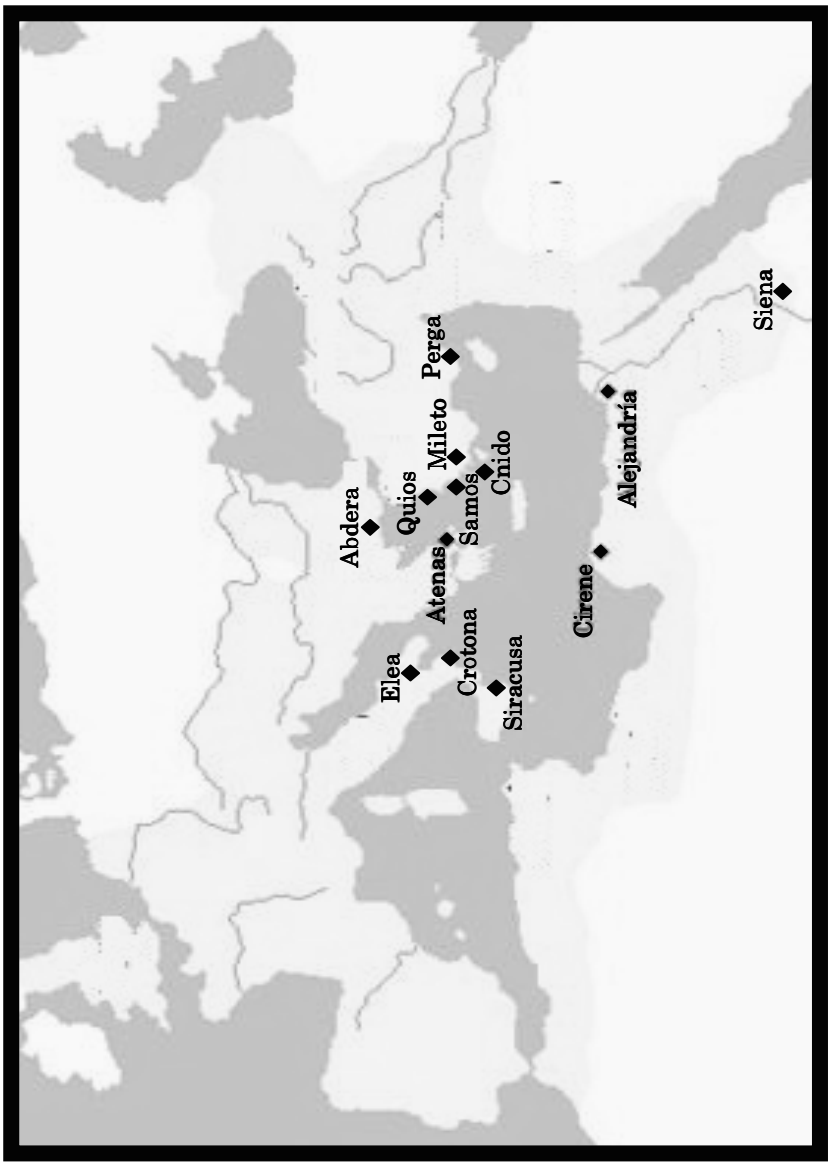
Una de las principales características del sistema decimal fue que el cero tenía significado (aunque al principio no tuviera signo con el que representarlo y en su lugar se dejaba un hueco entre las cifras), y que los

números negativos recibieron ya un tratamiento simbólico específico. Los algebristas indios y árabes, expertos con las fracciones, normalmente desechaban los números negativos y los suprimían de los resultados de sus problemas o de los coeficientes de sus ecuaciones pasándolos al otro miembro. En el mejor de los casos los interpretaban como deudas (pues sus problemas eran sobre todo de naturaleza comercial), pero nunca se atrevieron a hacer con ellos las operaciones ordinarias de suma, resta, multiplicación o división. En el siglo XVI se les empezó a llamar "numeri absurdi" (números absurdos), números que no se podían entender, aunque pronto no tuvieron más remedio que empezar a crear las reglas que les permitieran operarlos si querían resolver ciertos problemas comerciales. El rechazo de estos números hubo de seguir hasta el siglo XVII en que se aceptaron sin discusión y se crearon las reglas aritméticas para su manejo. Curiosamente algo que hoy parece tan evidente como los números negativos se resistió casi tanto como la idea del número complejo, concepto mucho más abstracto, que también por entonces empezó a manejarse.

MAPA DE LAS ANTIGUAS CIVILIZACIONES EGIPCIA Y MESOPOTÁMICA



MAPA CON LOS PRINCIPALES CENTROS MATEMÁTICOS DE LA ANTIGÜEDAD GRIEGA



2. TALES, LAS PRIMERAS DEMOSTRACIONES



El rigor en sus fundamentos y desarrollo es la característica principal de la matemática como una ciencia exacta, sin la cual carecería de sentido. Los historiadores achacan las primeras demostraciones rigurosas de teoremas al griego Tales en el siglo VI a.C. aunque hasta nosotros no haya llegado ninguna de ellas.

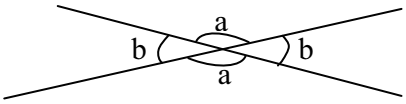
Natural de Mileto, ciudad costera al este de Turquía, Tales es el más antiguo de los matemáticos de prestigio. Está considerado el primero de los siete sabios de Grecia y perteneció a la agrupación de filósofos que se formó en las ciudades de Mileto y Éfeso, llamada escuela jónica, cuyos miembros se dedicaron al estudio físico del Universo a través de la razón (dejando atrás los mitos y los dioses). Ante la pregunta ¿de qué está hecho el Universo?, Tales concluyó: *"Todo es agua"*. Y es que Tales, retomando las tradiciones babilónicas, creía que la tierra firme era un disco de miles de kilómetros de diámetro que flotaba sobre un océano infinito. Al mismo tiempo la tierra estaba surcada por ríos y lagos que brotaban de ella, que la empapaban y hacían fértil. Incluso el aire estaba atravesado por las gotas de agua que se evaporaban y se concentraban en las nubes.

De Tales se cuentan multitud de anécdotas, aunque ninguna realmente fundamentada. Era de origen fenicio, pueblo de grandes comerciantes, y se dice que desafiado por sus conciudadanos para los que Tales era sólo un sabio de vana sabiduría demostró que también podía usar su saber para ganar una gran fortuna. Y así fue, pues buen conocedor de las cosechas, y previendo una inmensa de aceitunas, consiguió los préstamos de personas que confiaban en él y compró todas las prensas de aceite de su ciudad. Luego los ciudadanos tenían que alquilarlas a los precios que él estipulara. Poco a poco alcanzó una gran consideración entre sus conciudadanos que lo buscaban para que les resolviera problemas cotidianos. Una vez le expusieron el problema que tenía un vendedor con su mulo que, cargado de sal, se hundía premeditadamente en el agua cuando atravesaba el río pues así el animal notaba que disminuía su peso (se disolvía la sal en el agua). Tales aconsejó a su paisano que llevará el

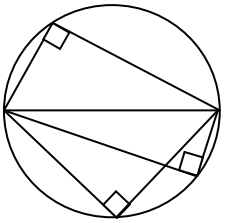
mulo otra vez al río y volviera a cruzarlo pero esta vez cargado de esponjas. Su faceta de astrónomo se extendió cuando predijo un eclipse de sol del año 585 a.C. mientras los ejércitos de medos y lidios se encontraban acampados, preparados para la lucha. Según la leyenda, aquel fenómeno indujo a los contendientes a deponer las armas y llegar a un acuerdo.

Su profesión de negociante le llevó a Egipto en varias ocasiones. Tales asimiló de esta civilización gran parte de su sabiduría al tiempo que potenciaba su afición a la Geometría. Se le atribuyen resultados como los siguientes:

- Un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales.
- La suma de los ángulos de un triángulo es equivalente a dos rectos
- Los dos ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales
- En dos rectas que se cortan, los ángulos opuestos son iguales



- Cualquier triángulo inscrito en una circunferencia de forma que uno de sus lados coincida con el diámetro de la misma, es rectángulo.



2.1 EL TEOREMA DE TALES

Existe un teorema con un enunciado poco conocido, pero con unos corolarios por todos asumidos gracias a que nuestra intuición así nos lo indica. ¿Quién no ha oído nunca o no ha puesto en práctica la afirmación que dice que dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos iguales?. La idea mental de dos triángulos semejantes es la de aquellos que tienen la misma forma. Pensamos en uno dentro del otro y si tienen los lados paralelos asumimos la semejanza. ¿Quién en la escuela no ha dividido un segmento en tres partes iguales trazando en un extremo del segmento una línea sobre la que tomado tres veces una longitud cualquiera y ha trazado paralelas sobre el segmento original?.