

L'intégrale



Mathématiques appliquées Informatique

► QUESTIONS ET METHODES

Coordonné par Olivier Sarfati et Matthieu Alfré

Olivier Sarfati
Diplômé d'HEC, directeur de MyPrepa
et professeur chez MyPrepa

Amélie Hurteaux
Agrégée de mathématiques et professeure
chez MyPrepa et en classes
préparatoires au lycée
Stanislas (Cannes)

Adrien Macé
Agrégé de mathématiques et professeur chez MyPrepa

Fabio Russo
Diplômé de l'ESSEC et professeur chez MyPrepa

Frédéric Brossard
Diplômé de CentraleSupélec, agrégé
de mathématiques et professeur chez MyPrepa

DUNOD

Couverture :

- Direction artistique : Nicolas Wiel
- Conception graphique : Pierre-André Gualino et Julie Coinus

© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083112-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Comment utiliser cet ouvrage ?

L'ouvrage que vous tenez entre les mains fait la **synthèse de 40 ans de sujets de concours** en adoptant un **parti pris original** : présenter la très **grande majorité des questions qui tombent aux concours** et les décrypter à l'aide des **méthodes les plus fréquemment mobilisées**. Les **rappels de cours systématiquement mis en avant** couvrent la totalité du programme et vous donnent l'occasion de les **apprendre « en situation »**. Ainsi, un(e) candidat(e) qui maîtrisera sur le bout des doigts tout ce qui suit ne sera pas surpris aux concours.

Pour faire une utilisation optimale de l'ouvrage et ainsi maximiser vos progrès, voici quelques **conseils précieux** que nous vous invitons vivement à respecter :

- **La maîtrise de cet ouvrage doit se faire en complément de l'apprentissage du cours de votre professeur.** Bien utilisé, il vous aidera à digérer les notions que vous aurez vues en classe.
- **Annotez le sommaire présent au début de chaque chapitre afin de cadrer au mieux vos séances de travail** : cochez les questions parfaitement maîtrisées, celles qu'il vous faudra reprendre et rajoutez un code couleur par niveau de difficulté.
- **Annoter également le cœur des différents chapitres en vous servant des marges sur le côté de chaque page** : vos notes manuscrites (par exemple code couleurs par niveau de difficulté, timing, astuce à retenir, méthodes à revoir) vous permettront de mieux suivre votre progression et ainsi optimiser vos séances de travail. En moyenne, vous devriez refaire chacune des questions 4 à 5 fois sur vos deux années de prépas.
- **Forcez-vous à recopier les rappels de cours** en rouge avant de faire les exercices relatifs à une méthode : c'est comme cela que vous assimilerez le plus rapidement le cours et ses enjeux.
- Lors de vos recherches d'exercices ou de devoirs maison donnés par votre professeur, si vous butez sur une question, **utilisez la table des matières du chapitre en jeu pour aller identifier une question** qui s'en rapproche et faites toutes les méthodes et exercices proposés pour y répondre. Vous trouverez ainsi plus facilement réponse à toutes les questions qui vous seront posées dans les exercices de votre professeur de prépa.
- Avant chaque DS important ou concours blanc, **entraînez-vous sur les sujets de fin de chapitre souvent issus des concours de la BCE et ECRICOME.**
- **Ne négligez aucun chapitre, aucune question, aucune méthode** : à la fin de vos deux années de prépa, idéalement, tout doit être maîtrisé.

Enfin, même si cet ouvrage s'utilise comme un **dictionnaire de méthodes** et vous fera gagner beaucoup de temps et de points aux concours, il n'est pas un livre de recettes : il ne vous exonère pas de **réfléchir** et de **profondément comprendre les concepts et objets mathématiques** que vous manipulerez et que vous aurez vus avec votre professeur de prépa.

En espérant que vous prendrez autant de plaisir à naviguer dans l'ouvrage que nous en avons pris à le concevoir et le rédiger.

Bonne continuation.

Les auteurs

Sommaire

Partie I. Généralités

Chapitre 1. Logique, récurrence, ensembles, applications	11
1.1. Logique	13
1.2. Récurrence	28
1.3. Ensembles	32
1.4. Applications	37
1.5. Exercices corrigés	48
1.6. Corrigés des exercices	49
Chapitre 2. Sommes et Produits	59
2.1. Sommes	61
2.2. Produits	87
2.3. Exercices corrigés	91
2.4. Corrigés des exercices	93
Chapitre 3. Théorie des graphes	101
3.1. S'approprier le vocabulaire des graphes	103
3.2. Matrice d'adjacence	116
3.3. Graphes pondérés	124
3.4. Graphes probabilistes	129
3.5. Analyse des réseaux sociaux	129
3.6. Exercices corrigés	134
3.7. Corrigés des exercices	135

Partie II. Algèbre

Chapitre 4. Systèmes linéaires et Matrices	139
4.1. Systèmes linéaires	141
4.2. Calculs matriciels	149
4.3. Propriétés d'une matrice	163
4.4. Exercices corrigés	178
4.5. Corrigés des exercices	182
Chapitre 5. Fonctions polynomiales, Polynômes	205
5.1. Degré d'un polynôme	207
5.2. Dérivation d'un polynôme	212
5.3. Racines et divisibilité d'un polynôme	217
5.4. Polynôme nul et égalité de deux polynômes	224
5.5. Polynômes vérifiant une condition	228
5.6. Exercices corrigés	230
5.7. Corrigés des exercices	232
Chapitre 6. Espaces vectoriels	245
6.1. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$	247
6.2. Familles libres, génératrices et bases	250
6.3. Dimension d'un espace vectoriel	258
6.4. Exercices corrigés	260
6.5. Corrigés des exercices	261

Chapitre 7. Applications linéaires.	267
7.1. Propriétés des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$	269
7.2. Noyau, Image et rang d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$	275
7.3. Exercices corrigés	281
7.4. Corrigés des exercices	282

Partie III. Analyse

Chapitre 8. Suites.	295
8.1. Calcul d'une suite	297
8.2. Monotonie d'une suite	305
8.3. Encadrement d'une suite	309
8.4. Comportement en l'infini	318
8.5. Etude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	325
8.6. Exercices corrigés	330
8.7. Corrigés des exercices	332
Chapitre 9. Fonctions réelles d'une variable réelle	343
9.1. Ensemble de définition	347
9.2. Parité	349
9.3. Limite	350
9.4. Continuité	361
9.5. Dérivation	366
9.6. Sens de variation	381
9.7. Bijection	386
9.8. Encadrements et inégalités	394
9.9. Convexité et concavité	409
9.10. Résolution d'équations	413
9.11. Représentation graphique	421
9.12. Exercices corrigés	430
9.13. Corrigés des exercices	433
Chapitre 10. Equations différentielles	447
10.1. Equations différentielles linéaires d'ordre 1	449
10.2. Equations différentielles linéaires d'ordre 2	455
10.3. Equilibre d'une équation différentielle	457
10.4. Exercices corrigés	459
10.5. Corrigés des exercices	456
Chapitre 11. Intégration sur un segment.	465
11.1. Calcul et expression d'une intégrale	467
11.2. Encadrement d'une intégrale	482
11.3. Lien entre sommes et intégrales	484
11.4. Fonction définie par une intégrale	490
11.5. Suite définie par une intégrale	497
11.6. Exercices corrigés	502
11.7. Corrigés des exercices	505
Chapitre 12. Séries numériques	523
12.1. Convergence et divergence d'une série	525
12.2. Encadrement et équivalent de la somme partielle ou du reste d'une série	543
12.3. Fonction définie par une série	547
12.4. Exercices corrigés	549
12.5. Corrigés des exercices	551

Partie IV. Probabilités

Chapitre 13. Statistiques.	563
13.1. Généralités	565
13.2. Questions usuelles	568
13.3. Exercices corrigés	576
13.4. Corrigés des exercices	577
Chapitre 14. Probabilités sur univers finis et infinis	581
14.1. Quelques bases de dénombrement	583
14.2. Lien entre événements	590
14.3. Probabilité d'événements	602
14.4. Exercices corrigés	631
14.5. Corrigés des exercices	634
Chapitre 15. Variables aléatoires discrètes.	653
15.1. Variables aléatoires discrètes et événements	658
15.2. Calculs et opérations sur des probabilités de variables aléatoires discrètes	668
15.3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète	706
15.4. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète	712
15.5. Exercices corrigés	743
15.6. Corrigés des exercices	747

Partie V. Informatique

Chapitre 16. Python	763
16.1. Notions fondamentales	765
16.2. Algèbre	771
16.3. Analyse	776
16.4. Probabilités	786
16.5. Statistiques en Python	795
16.6. Graphes en Python	805
16.7. Exercices corrigés	810
16.8. Corrigés des exercices	812

Partie I

Généralités

Chapitre 1

Logique, récurrence, ensembles, applications



On commence par un chapitre très structurant pour vos deux années. Les démonstrations par récurrence seront notamment présentes dans bien des chapitres (suites, séries, probabilités, variables aléatoires, matrices...) tandis que les démonstrations par l'absurde ou les raisonnements par équivalences vous suivront à peu près partout ! Les notions d'applications injectives, surjectives ou bijectives interviendront quelque peu en analyse mais mobiliseront surtout votre attention sur les chapitres d'algèbre linéaire. Vous l'aurez compris, il ne faut pas négliger ce chapitre introductif alors n'hésitez pas à vous y plonger et à y revenir régulièrement.

DANS CE CHAPITRE

- 16** questions classiques
- 38** méthodes
- 44** exercices

Sommaire

Chapitre 1. Logique, récurrence, ensembles, applications	11
1.1. Logique	13
Question 1. Comment déterminer le contraire d'une proposition ?	13
Question 2. Comment montrer qu'une proposition est vraie ?	14
Question 3. Comment montrer qu'une proposition est fausse ?	22
Question 4. Comment montrer une implication directe ($H \implies P$) ?	23
Question 5. Comment montrer une équivalence ($H \iff P$) ?	24
Question 6. Comment montrer une triple équivalence ($A \iff B \iff C$) ?	26
1.2. Récurrence	28
Question 7. Comment prouver une proposition par récurrence ?	29
1.3. Ensembles	32
Question 8. Comment montrer une inclusion d'ensembles ($A \subset B$) ?	32
Question 9. Comment montrer une égalité d'ensembles ?	35
1.4. Applications	37
Question 10. Comment déterminer l'image directe d'un ensemble A par une application f ?	38
Question 11. Comment montrer qu'une application f est injective ?	39
Question 12. Comment montrer qu'une application f n'est pas injective ?	40
Question 13. Comment montrer qu'une application f est surjective ?	41
Question 14. Comment montrer qu'une application f n'est pas surjective ?	42
Question 15. Comment montrer qu'une application f est bijective ?	43
Question 16. Comment montrer qu'une application f n'est pas bijective ?	47
1.5. Exercices corrigés	48
Exercice 40. Des récurrences délicates	48
Exercice 41. Logique et quantificateurs	48
Exercice 42. Fonction caractéristique	48
Exercice 43. Irrationalité de $\sqrt{2}$	49
Exercice 44. Equation fonctionnelle	49
1.6. Corrigés des exercices.	49
Corrigé exercice 40. Récurrence et inégalités	49
Corrigé exercice 41. Logique et quantificateurs	53
Corrigé exercice 42. Fonction caractéristique	54
Corrigé exercice 43. Irrationalité de $\sqrt{2}$	55
Corrigé exercice 44. Equation fonctionnelle	57

1.1. Logique

Question 1 Comment déterminer le contraire d'une proposition ?

Méthode 1 En écrivant le contraire de chaque élément de la proposition



RAPPEL DE COURS

Soit A un ensemble, P et Q des propositions.

On note $\neg P$ le contraire de P .

On rappelle que $\forall$ se lit "pour tout" et $\exists$ se lit "il existe".

- Le contraire de $\geq$ est $<$
- Le contraire de $(\forall x \in A, P)$ est $(\exists x \in A, \neg P)$
Ex : le contraire de $\forall x \geq 1, f(x) < 1$ est : $\exists x \geq 1, f(x) \geq 1$
- Le contraire de $(\exists x \in A, P)$ est $(\forall x \in A, \neg P)$
- Le contraire de $(P \implies Q)$ est $(P \text{ et } \neg Q)$

Ex : Soit x un réel. Le contraire de $x \in \mathbb{R}_+ \implies f(x) > g(x)$ est : $x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } f(x) \leq g(x)$

- Le contraire de $(P \iff Q)$ est $((P \text{ et } \neg Q) \text{ ou } (\neg P \text{ et } Q))$
- Le contraire de $(P \text{ et } Q)$ est $(\neg P \text{ ou } \neg Q)$
- Le contraire de $(P \text{ ou } Q)$ est $(\neg P \text{ et } \neg Q)$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer le contraire d'une proposition, on procède en respectant les règles sur les contraires ci-dessus, en écrivant le contraire de chaque composant de la proposition. On commence par l'élément de gauche, puis on écrit le contraire des différents éléments jusqu'au dernier élément de droite. Le brouillon de l'exercice ci-dessous permet de mieux comprendre la méthode à appliquer.

Exercice 1

Ecrire le contraire de :

$$"\forall x > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \implies \left(\frac{1}{n} \leq x\right)"$$

Corrigé



Brouillon

- Le contraire de $\forall x > 0, P_1$ est $\exists x > 0, \neg P_1$
- Le contraire de $\exists N \in \mathbb{N}, P_2$ est $\forall N \in \mathbb{N}, \neg P_2$
- Le contraire de $\forall n \in \mathbb{N}, P_3$ est $\exists n \in \mathbb{N}, \neg P_3$
- Le contraire de $(n \geq N) \implies (\frac{1}{n} \leq x)$ est : $(n \geq N)$ et $(\frac{1}{n} > x)$

Le contraire de la proposition est :

$$\exists x > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \text{ et } \left(\frac{1}{n} > x\right)$$

Question 2

Comment montrer qu'une proposition est vraie ?

Méthode 2

Pour un $\forall$, en montrant que pour un x quelconque vérifiant les conditions, la proposition est vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, " $\forall x \in A, \dots$ " signifie que quel que soit x pris dans A , on a la proposition qui suit qui est vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, on prend donc un x quelconque dans A (on commence le raisonnement par "soit $x \in A$ "), puis on va chercher à montrer la proposition qui suit.

Exercice 2

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \geq -1$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$
Donc $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ et $x^2 + 2x \geq -1$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \geq -1$

Méthode 3

Pour un $\exists$, en trouvant un x tel que la proposition soit vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, " $\exists x \in A, \dots$ " signifie qu'on peut trouver x dans A tel que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, il faut donc trouver un x tel que la proposition soit vérifiée (un tel raisonnement peut se terminer par exemple par "Donc pour $x = \dots$, on a bien...")

Exercice 3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 5x + 2 \end{cases}$
Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2$

Corrigé

Pour $x = 0, f(x) = f(0) = 2 \geq 2$

Donc $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2}$

Méthode 4

En combinant les deux méthodes précédentes s'il y a à la fois un $\forall$ et un $\exists$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Souvent, la proposition à prouver contiendra à la fois $\forall$ et $\exists$. Il faudra donc combiner les méthodes 2 et 3 vues ci-dessus pour pouvoir montrer que la proposition est vraie.

Exercice 4

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $y = x + 1$.

On a $x + 1 \geq x$ donc $y \geq x$

On a donc bien $\exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y}$

Méthode 5

Si la phrase est écrite avec des mots et non des termes quantifiés, en traduisant l'expression en termes quantifiés puis en utilisant les méthodes précédentes



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition à montrer est du type "Montrer que..." avec des termes en français et non des termes quantifiés, il suffit de traduire la phrase en termes quantifiés pour pouvoir ensuite utiliser les méthodes 2, 3 et 4 vues ci-dessus pour montrer que la proposition est vraie.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ décroissantes sur $\mathbb{R}$ et $h = f \circ g$.

Montrer que h est croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Montrons que h est croissante sur $\mathbb{R}$

i.e. montrons que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies h(x) \leq h(y)$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supposons $x \leq y$.

On a alors $g(x) \geq g(y)$ car g est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(g(x)) \leq f(g(y))$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc $h(x) \leq h(y)$

Donc h est croissante sur $\mathbb{R}$

Méthode 6

Par l'absurde



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut raisonner par l'absurde : on suppose que le contraire de la proposition est vrai, puis on poursuit le raisonnement jusqu'à aboutir à une contradiction. Notre supposition étant fausse, le contraire de la proposition est donc faux, et donc la proposition est vraie.

Les raisonnements par l'absurde sont très utiles, notamment dans les chapitres d'algèbre linéaire.

Exercice 6

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} \neq 1$

Corrigé

Supposons par l'absurde $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} = 1$

On a alors $x+1 = x+2$ donc $1 = 2$, ce qui est absurde.
On a une contradiction, donc la supposition est fausse.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} \neq 1$

Méthode 7



Pour un $\exists!$ (ou un $\exists$), par analyse synthèse

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, " $\exists! x \in A, \dots$ " se lit "il existe un unique x appartenant à A tel que..." et signifie qu'on peut trouver un et un seul x dans A telle que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer cela, on peut procéder par analyse synthèse, c'est un raisonnement en deux étapes :

- **Etape 1** : L'analyse (pour montrer l'unicité si existence). On suppose l'existence et on va par une série de déductions montrer qu'il n'y a qu'un seul élément x (que l'on va expliciter) qui peut vérifier les conditions.

- **Etape 2** : La synthèse (pour montrer l'existence). On prend cet élément x explicité au cours de la phase d'analyse et on montre qu'il vérifie bien les conditions. Cette méthode peut aussi permettre de montrer un $\exists$, dans la mesure où si l'on montre l'existence d'un unique, on montre alors l'existence.

Exercice 7

Notons F l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P l'ensemble des fonctions paires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des fonctions impaires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall f \in F, \exists!(p, i) \in P \times I, f = p + i$



RAPPEL DE COURS

- Pour A et B deux ensembles, $(x, y) \in A \times B$ signifie que $x \in A$ et $y \in B$
- $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire $\iff \forall x \in \mathbb{R}, p(-x) = p(x)$
- $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire $\iff \forall x \in \mathbb{R}, i(-x) = -i(x)$

Corrigé

Soit $f \in F$, montrons que $\exists!(p, i) \in P \times I, f = p + i$
Procédons par analyse-synthèse.

Analyse :

Supposons qu'il existe $(p, i) \in P \times I$ tels que $f = p + i$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p(x) + i(x)$ (*)
 $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$ (**) car p est paire
 et i impaire

En sommant les égalités (*) et (**),

On obtient : $f(x) + f(-x) = 2p(x)$

$$\text{donc } p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

On a alors d'après (*),

$$\begin{aligned} i(x) &= f(x) - p(x) = f(x) - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$\text{et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Synthèse :

Posons p et i définies pour tout x dans $\mathbb{R}$ par :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a bien : $f(x) = p(x) + i(x)$

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = p(x)$$

Donc p est paire.

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x)$$

Donc i est impaire.

De plus $p(x) + i(x) = f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, donc p et

i conviennent, et $\boxed{\forall f \in F, \exists!(p, i) \in P \times I, f = p + i}$

Méthode 8

Pour un $\exists!$, en trouvant un x vérifiant les conditions telle que la proposition soit vérifiée, puis en montrant que si y vérifie aussi la proposition alors $x = y$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer " $\exists!x \in A, \dots$ " on peut démontrer d'abord l'existence en donnant un x dans A pour lequel cela fonctionne.

Pour l'unicité, on prend un y quelconque dans A vérifiant également les conditions et on montre que $x = y$.

Exercice 8

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $K \in \mathbb{R}^*$.

1) Soit $f \in E$ vérifiant $f' = Kf$ et $f(0) = 1$.

Montrer que f ne s'annule pas. (On pourra introduire la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$)

2) Montrer que $f : x \mapsto e^{Kx}$ vérifie $f' = Kf$ et $f(0) = 1$

3) Soit $h \in E$ tel que $h' = Kh$ et $h(0) = 1$.

Montrer que $i = \frac{f}{h}$ est constante sur $\mathbb{R}$, égale à 1.

4) En déduire que $\exists! f \in E, f' = Kf$ et $f(0) = 1$



RAPPEL DE COURS

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

- $u \times v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$
- Si v ne s'annule pas, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$$

- Si on note $\forall x \in \mathbb{R}, w(x) = u(-x)$, w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = -u'(-x)$
- Si $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = ae^{ax}$
- u est constante sur $\mathbb{R} \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = c$
 $\iff \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 0$
- $e^0 = 1$

Corrigé

1) Posons $g : x \mapsto f(x)f(-x)$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, on a :

$$\begin{aligned}g'(x) &= f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) \\&= Kf(x)f(-x) - Kf(-x)f(x) \\&= 0\end{aligned}$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$, i.e. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = c$

Or $g(0) = f(0)f(0) = 1$ donc $c = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1$ i.e. $f(x)f(-x) = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ et $f(-x) \neq 0$ car sinon on aurait $g(x) = 0$.

Ainsi f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = Ke^{Kx} = Kf(x)$

$f(0) = e^0 = 1$

Ainsi $f : x \mapsto e^{Kx}$ vérifie $f' = Kf$ et $f(0) = 1$

3) Soit $h \in E$ tel que $h' = Kh$ et $h(0) = 1$

Posons $i = \frac{f}{h}$, d'après 1), h ne s'annule pas.

Donc i est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}i'(x) &= \frac{f'(x)h(x) - h'(x)f(x)}{h^2(x)} \\&= \frac{Kf(x)h(x) - Kh(x)f(x)}{h^2(x)} \\&= 0\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, i'(x) = 0$ et i est constante sur $\mathbb{R}$

Donc $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, i(x) = c$.

Or $i(0) = \frac{f(0)}{h(0)} = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, i(x) = 1$

4) Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{h(x)} = 1$ i.e. $f(x) = h(x)$

Donc $f = h$ et on a bien l'unicité de f .

Donc $\exists! f \in E, f' = Kf$ et $f(0) = 1$

Méthode 9

Pour un $\exists!$, en raisonnant par équivalence



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer un $\exists!$ lorsqu'il s'agit d'une équation, et qu'on cherche donc à prouver que cette équation admet une unique solution, on peut partir de l'équation et raisonner par équivalences successives jusqu'à arriver à une unique solution.

Attention, l'utilisation des équivalents est source de nombreuses erreurs : si vous procédez par équivalences successives, assurez-vous que le sens direct et le sens réciproque sont vérifiés pour chaque équivalence. Trop souvent, les étudiants écrivent une équivalence alors qu'il n'y a en réalité qu'une implication.

Exercice 9

Montrer que $\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + 2y = 1$ et $3x - 2y = 1$

Corrigé

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y = 1 \text{ et } 3x - 2y = 1}$

Méthode 10

S'il s'agit de montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier n d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, en raisonnant par récurrence



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le raisonnement par récurrence sera détaillé dans le paragraphe 1.2.

Question 3

Comment montrer qu'une proposition est fausse ?

Méthode 11

S'il s'agit d'un $\forall$, en trouvant un contre-exemple



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition commençant par " $\forall x \in A$ " est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple (un seul suffit, il ne faut pas raisonner dans le cas général), i.e. trouver un x dans A telle que la proposition ne soit pas vérifiée.

Exercice 10

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$$

Corrigé

Pour $x = -1$ et $y = \frac{1}{2}$, on a $x \leq y$

Et pourtant $x^2 = 1 > \frac{1}{4} = y^2$

Donc la proposition est fausse

Méthode 12

S'il s'agit d'un $\exists$, en montrant que quel que soit le x choisi, la proposition qui suit n'est pas vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition du type " $\exists x \in A, P$ " est fausse, il faut montrer que " $\forall x \in A, \neg P$ ". En effet, si quel que soit x dans A , P n'est pas vérifiée, alors on ne peut pas trouver de x dans A tel que P soit vérifiée.

Exercice 11

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = -2$$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 - 1 \geq -1$ donc $x^2 - 1 > -2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq -2$

Donc la proposition est fausse

Méthode 13

En combinant les deux méthodes précédentes s'il y a à la fois un $\forall$ et un $\exists$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le plus souvent, la proposition est composée à la fois de $\exists$ et de $\forall$. Il faudra donc combiner les méthodes 11 et 12 vues ci-dessus pour montrer que la proposition est fausse.

Exercice 12

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$$

Corrigé

Posons $n = 1$.

$\forall p \in \mathbb{N}, n \neq 2p$ car $2p$ est pair et $n = 1$ est impair

On a donc trouvé un contre-exemple.

Donc la proposition est fausse

Question 4

Comment montrer une implication directe ($H \implies P$) ?

Méthode 14

En supposant H vraie, et en montrant P vraie



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que ($H \implies P$), on commence la rédaction par "supposons H ", et on cherche à montrer que P est vraie.

Exercice 13

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^x = e^y \Rightarrow x = y$.

Corrigé

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supposons que $e^x = e^y$.

e^x et e^y sont strictement positifs.

Donc en composant par $\ln$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(e^x) = \ln(e^y)$$

$$\text{Or } \forall u \in \mathbb{R}, \ln(e^u) = u$$

$$\text{Donc } x = y$$

$$\text{Ainsi } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^x = e^y \Rightarrow x = y$$

Méthode 15

Par contraposée



RAPPEL DE COURS

- La contraposée de $P \implies Q$ est $\neg Q \implies \neg P$
- Une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une implication est vraie, on peut montrer que sa contraposée est vraie. On va donc montrer que le contraire de Q implique le contraire de P .

Exercice 14

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer : $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \implies (a \leq b)$

Corrigé

Montrons la contraposée : $(a > b) \implies (\exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon)$.

Supposons $a > b$. On a $a - b > 0$.

Posons $\varepsilon = a - b$, on a alors $\varepsilon > 0$.

On a bien $a \geq b + \varepsilon$ car $b + \varepsilon = b + a - b = a$

Donc $(a > b) \implies (\exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon)$

Ainsi, par contraposée : $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \implies (a \leq b)$

Question 5

Comment montrer une équivalence $(H \iff P)$?



RAPPEL DE COURS

Vocabulaire

On dit que P est une **condition nécessaire** pour H si et seulement si $H \implies P$

On dit que P est une **condition suffisante** pour H si et seulement si $P \implies H$

On dit que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour H si et seulement si $H \iff P$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence ($H \iff P$), on peut raisonner par équivalences successives, en partant de H jusqu'à arriver à P (ou dans l'autre sens). On a un raisonnement de la forme suivante : $H \iff A \iff B \iff \dots \iff P$

Attention, ce raisonnement peut être source d'erreurs car de nombreux étudiants mettent des $\iff$ alors qu'il y a seulement une implication. Il faut donc s'appliquer pour chaque $\iff$ à vérifier qu'il y a bien implication et implication réciproque pour ne pas faire d'erreur dans le raisonnement.



Remarque

Si l'on applique une fonction f à une égalité ou une inégalité de réels, il faut justifier la bijectivité de f (le plus souvent en disant que f est strictement croissante ou strictement décroissante et continue sur l'intervalle auquel appartiennent les éléments de l'équivalent) pour obtenir une relation d'équivalence, et pas juste une implication.

Exercice 15

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $(x \geq 1) \iff \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0 \right)$

Corrigé

$(x \geq 1) \iff (\sqrt{x} \geq 1)$ par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$

$\iff (\sqrt{x} - 1 \geq 0) \iff \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0 \right)$ car $x > 0$

Donc $(x \geq 1) \iff \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0 \right)$

Méthode 17

Par implication directe puis implication réciproque



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence lorsqu'on ne peut pas raisonner par équivalences successives, il faut raisonner par implication directe puis implication réciproque.

On montre d'abord l'implication directe ($H \implies P$) : "Supposons H , montrons P ". Puis on montre l'implication réciproque ($P \implies H$) : "Supposons P , montrons H ".

Exercice 16

Pour A une partie de $\mathbb{R}$, on note 1_A la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

Montrer que : $(1_A = 1_B) \iff (A = B)$

Corrigé

• Supposons $(1_A = 1_B)$, montrons que $A = B$

- Soit $x \in A$, $1_A(x) = 1$ car $x \in A$.

Or $1_A(x) = 1_B(x)$ donc $1_B(x) = 1$ donc $x \in B$

Donc $A \subset B$.

- Soit $x \in B$, $1_B(x) = 1$ car $x \in B$.

Or $1_B(x) = 1_A(x)$ donc $1_A(x) = 1$ donc $x \in A$

Donc $B \subset A$ et ainsi $A = B$

• Supposons $A = B$, montrons que $(1_A = 1_B)$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Cas 1 : $x \in A$ (donc $x \in B$), on a $1_A(x) = 1 = 1_B(x)$

Cas 2 : $x \notin A$ (donc $x \notin B$), on a $1_A(x) = 0 = 1_B(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1_A(x) = 1_B(x)$ et ainsi $1_A = 1_B$

Ainsi $\boxed{(1_A = 1_B) \iff (A = B)}$

Question 6

Comment montrer une triple équivalence $(A \iff B \iff C)$?

Méthode 18

En montrant $A \implies B$, $B \implies C$ et $C \implies A$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une triple équivalence $A \iff B \iff C$, on peut raisonner par implications successives en montrant $A \implies B$, $B \implies C$ et $C \implies A$ (ou $C \implies B$, $B \implies A$ et $A \implies C$) de sorte à former un « cercle » d'implications $A \implies B \implies C \implies A$ permettant ainsi d'avoir des équivalences entre les 3 propositions.

Pour montrer une quadruple ou quintuple équivalence, il faudrait procéder de la même manière en montrant les implications successives.

Exercice 17

Pour f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note f^k (pour $k \in \mathbb{N}^*$) la fonction définie par récurrence par : $f^1 = f$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{k+1} = f \circ f^k$

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$

Soit $N \geq 2$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k(0) = 0$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^k(x) \geq 0$

On note :

$$(1) \quad \exists p \in \llbracket 2, N \rrbracket, f^p = 0$$

$$(2) \quad \exists p \in \llbracket 2, N \rrbracket, \forall k \geq p, f^k = 0$$

$$(3) \quad \exists p \in \llbracket 2, N \rrbracket, \sum_{k=1}^N f^k = \sum_{k=1}^{p-1} f^k$$

Montrer que $(1) \iff (2) \iff (3)$



RAPPEL DE COURS

Soient E, F et G des ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

On appelle "composée de f par g " et on note $g \circ f$ la fonction de E dans G définie par :

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$$

Corrigé

- Supposons (1), montrons (2).

$$\exists p \in \llbracket 2, N \rrbracket, f^p = 0$$

Soit $k \geq p + 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^k(x) = f^{k-p} \circ f^p(x) = f^{k-p}(f^p(x))$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f^k(x) = f^{k-p}(0) = 0$ d'après l'énoncé

Ainsi $\forall k \geq p + 1, f^k = 0$

Cela reste vrai pour $k = p$ donc (2) est vrai.

- Supposons (2), montrons (3).

$$\exists p \in \llbracket 2, N \rrbracket, \forall k \geq p, f^k = 0$$

$$\sum_{k=1}^N f^k = \sum_{k=1}^{p-1} f^k + \sum_{k=p}^N \underbrace{f^k}_{=0}$$

D'où $\sum_{k=1}^N f^k = \sum_{k=1}^{p-1} f^k$ et (3) est vrai.

- Supposons (3), montrons (1).

$$\exists p \in \llbracket 2, N \rrbracket, \sum_{k=1}^N f^k = \sum_{k=1}^{p-1} f^k$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^N f^k - \sum_{k=1}^{p-1} f^k = 0$$

$$\text{D'où } \sum_{k=p}^N f^k = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^N f^k(x) = 0$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \geq p, f^k(x) \geq 0$$

Et une somme de termes positifs ou nuls est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nuls.

En particulier le terme pour $k = p$ est nul.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f^p(x) = 0$$

D'où $f^p = 0$ et (1) est vrai.

Ainsi $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

$$\text{Donc } \boxed{(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3)}$$

1.2. Récurrence



Remarque

1. Lorsque l'on doit faire une récurrence, deux cas de figure peuvent se présenter :

- L'hypothèse de récurrence est donnée par l'énoncé : il suffit alors d'appliquer la méthode de récurrence adaptée.
- L'hypothèse de récurrence n'est pas donnée par l'énoncé : il faut alors réfléchir au brouillon pour déterminer cette hypothèse de récurrence.

2. Attention à ces erreurs fréquentes :

- Dans le cas d'une récurrence portant sur un entier n , le $\forall n$ doit être placé avant la proposition $P(n)$ et non à l'intérieur de celle-ci.
- Au niveau de l'hérédité on choisit de raisonner sur un entier n quelconque **fixé** et non $\forall n$.

Question 7

Comment prouver une proposition par récurrence ?

Méthode 19

Par récurrence simple



POINT MÉTHODOLOGIQUE

On utilise une récurrence simple sur n dans $\mathbb{N}$ pour montrer un résultat faisant intervenir une somme ou un produit fini indexé sur n , une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, ou encore une expression explicitée directement en fonction de n .

1. Poser la propriété de récurrence, $\forall n \geq n_0, P(n)$.
2. Initialiser la propriété pour n_0 : montrer $P(n_0)$ vraie.
3. Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $P(n)$. On montre alors $P(n+1)$.
4. On conclut.

Exercice 18

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "(1+x)^n \geq 1+nx"$

- $\underline{n=0}$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0 \cdot x$ et $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $P(n)$ vraie, i.e. $(1+x)^n \geq 1+nx$

En multipliant par $1+x \geq 0$, on a :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$$

Or $nx^2 \geq 0$, et donc $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

D'où $P(n+1)$ vraie.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx}$



Remarque

L'expression en jeu dépend ici de deux éléments distincts : un réel x et un entier n . Il y a alors deux possibilités de rédaction :

1. Poser le réel x en amont puis rédiger la propriété de récurrence en fonction de n . Le réel x est, dans toute la récurrence, quelconque et fixé.
2. Ne pas poser le x en amont et l'inclure dans la propriété de récurrence. La rédaction, appliquée à cet exercice, serait alors la suivante :

Soit $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx"$

On répètera alors le pour tout x dans toute la récurrence.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Ce type de récurrence s'utilise quasiment exclusivement pour montrer un résultat portant sur une suite sur laquelle on possède une relation liant u_{n+2} , u_{n+1} et u_n .

Voici le raisonnement à appliquer :

1. Poser la propriété de récurrence, $\forall n \geq n_0, P(n)$
2. Initialiser la propriété pour n_0 et $n_0 + 1$.

Attention à ne pas oublier d'initialiser la propriété pour deux entiers, et pas uniquement pour n_0 .

3. Procéder à l'hérédité : on pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$. On montre alors $P(n+2)$.
4. On conclut.

Exercice 19

La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que $\forall n \geq 2, u_n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé

Posons $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, P(n) : "u_n \in \mathbb{N}^*"$

• $n = 2$ et $n = 3$: $u_2 = u_1 + u_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $P(2)$ vraie.

$u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}^*$ et $P(3)$ vraie.

• Soit $n \geq 2$, supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies.

Alors $u_n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Donc $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$ d'où $P(n+2)$ vraie.

Donc $\boxed{\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, u_n \in \mathbb{N}^*}$



Remarque

Nous avons jusqu'ici vu les récurrences simples et doubles. Des récurrences triples, quadruples ou plus peuvent de même être menées. Pour réaliser une récurrence d'ordre p , il faut :

1. Poser la propriété de récurrence, $\forall n \geq n_0, P(n)$.
2. Initialiser la propriété pour les p premiers termes.
3. Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $P(n), P(n+1), \dots$ et $P(n+p-1)$. On montre alors $P(n+p)$.
4. On conclut.

L'exercice ci-dessous illustre une récurrence triple.

Exercice 20

Extrait d'ESSEC 1994

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant :
 $\forall n \geq 1, 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0 \quad (1)$
Soit v une suite vérifiant (1) avec $v_1 = v_2 = v_3 = 0$
Montrer que $\forall n \geq 1, v_n = 0$

Corrigé

Soit $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "v_n = 0"$
• Initialisation : $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ d'où $P(1), P(2)$ et $P(3)$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n), P(n+1)$ et $P(n+2)$.
 (v_n) vérifie (1) donc $9v_{n+3} = 9v_{n+2} + 7v_{n+1} - 7v_n$
Et par hypothèses de récurrence : $9v_{n+3} = 0$ i.e. $v_{n+3} = 0$
D'où $P(n+3)$ vraie.

Ainsi, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0}$

Méthode 21

Par récurrence forte



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode s'applique quasiment exclusivement aux suites définies avec une relation liant u_{n+1} à $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_n$

Voici comment raisonner pour faire une récurrence forte :

1. Poser la propriété de récurrence, $\forall n \geq n_0, P(n)$
2. Initialiser la propriété pour n_0
3. Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $P(n_0), P(n_0+1), \dots$, et $P(n)$. On montre alors $P(n+1)$.
4. On conclut

Si la récurrence simple est possible, elle doit être privilégiée à la récurrence forte. La récurrence forte ne doit être utilisée que si la récurrence simple ne fonctionne pas.

Exercice 21

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$

On rappelle que $\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$

Corrigé

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "u_n \leq 2^n"$

- Pour $n = 0$: $u_0 = 1 \leq 2^0$ donc $P(0)$ vraie
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k)$ vraie. Par sommation des $(n + 1)$ inégalités des hypothèses de récurrence, et comme $2 \neq 1$, il vient :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \leq \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$$

D'où $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ et $P(n + 1)$ est vraie

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n}$

1.3. Ensembles



RAPPEL DE COURS

- $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont des réels.
- $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des réels.
- Pour a et b deux entiers, $\llbracket a, b \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b inclus.
- Pour n entier, $\llbracket n, +\infty \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n .
- Pour n entier, $\llbracket -\infty, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à n .
- Soit E un ensemble et soit $A \subset E$. Le complémentaire de A , noté $\bar{A}$, est l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \notin A$.

Question 8

Comment montrer une inclusion d'ensembles $(A \subset B)$?

Méthode 22

En montrant que pour $x \in A$, on a $x \in B$



RAPPEL DE COURS

Si $\forall x \in A, x \in B$ alors $A \subset B$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode est la plus utilisée pour montrer l'inclusion d'un ensemble dans un autre. Pour montrer que $A \subset B$, on va choisir un x quelconque dans A puis montrer que $x \in B$.

Exercice 22

Montrer que $[-1, 0[\subset \{x \in \mathbb{R}, |x|^x \geq 1\}$



RAPPEL DE COURS

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle "valeur absolue" de x et on note $|x|$ le réel égal à x si x est positif ou nul, et à l'opposé de x sinon.

$$\text{Ainsi } |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et } \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$$

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln(a)}$
- Un produit de deux réels négatifs est positif.

Corrigé

Soit $x \in [-1, 0[$. Montrons que $x \in \{x \in \mathbb{R}, |x|^x \geq 1\}$.

$$|x|^x = e^{x \ln(|x|)}$$

Or $-1 \leq x < 0$ donc $0 < |x| \leq 1$

Donc $\ln(|x|) \leq \ln(1)$ par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $\ln(|x|) \leq 0$ car $\ln(1) = 0$

De plus $x < 0$, donc $x \ln(|x|) \geq 0$

Et $e^{x \ln(|x|)} \geq e^0$ par croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$

Ainsi $|x|^x \geq 1$ car $e^0 = 1$ et $x \in \{x \in \mathbb{R}, |x|^x \geq 1\}$

D'où $[-1, 0[\subset \{x \in \mathbb{R}, |x|^x \geq 1\}$

Exercice 23

Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et C des ensembles tels que $\forall i \in \mathbb{N}, \overline{A_i} \subset \overline{B_i}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) \subset \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{B_i})$



RAPPEL DE COURS

- $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$
- $x \in B \cap C$ si et seulement si $x \in B$ et $x \in C$

Distributivité :

- Soient A, B et C des ensembles. On a :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et B des ensembles. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$B \cap \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) = \left(\bigcup_{i=0}^n (A_i \cap B) \right)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{i=0}^n A_i \right) = \left(\bigcap_{i=0}^n (A_i \cup B) \right)$$

Lois de De Morgan :

- Soient A et B des ensembles. On a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des ensembles. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\overline{\left(\bigcap_{i=0}^n A_i \right)} = \left(\bigcup_{i=0}^n \overline{A_i} \right) \quad \text{et} \quad \overline{\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right)} = \left(\bigcap_{i=0}^n \overline{A_i} \right)$$

Corrigé

$$\text{Soit } n \geq 0, C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) = C \cup \left(\bigcap_{i=0}^n \overline{A_i} \right) = \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{A_i})$$

$$\text{Soit } x \in \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{A_i}), \text{ on a } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x \in C \cup \overline{A_i}$$

$$\text{Soit } i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \text{ Ou bien } x \in C, \text{ et alors } x \in C \cup \overline{B_i}$$

$$\text{Ou bien } x \in \overline{A_i}, \text{ or } \overline{A_i} \subset \overline{B_i} \text{ donc } x \in \overline{B_i} \text{ et donc } x \in C \cup \overline{B_i}$$

$$\text{Donc } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x \in C \cup \overline{B_i} \text{ et } x \in \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{B_i})$$

$$\text{Donc } \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{A_i}) \subset \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{B_i})$$

$$\text{D'où } \boxed{C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) \subset \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{B_i})}$$

Méthode 23

En montrant que pour $x \in \overline{B}$, on a $x \in \overline{A}$



RAPPEL DE COURS

- Si $\forall x \in \overline{B}$, on a $x \in \overline{A}$, alors $A \subset B$
- $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode est à maîtriser absolument et peut rendre très facile une démonstration qui peut sembler difficile. Dans certains cas, il est quasi-impossible de montrer l'inclusion en procédant classiquement : il faudra donc avoir le réflexe de passer par les complémentaires.

Exercice 24

Soient $A = \{n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair}\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ pair}\}$
Montrer que $A \subset B$.



RAPPEL DE COURS

- $n \in \mathbb{N}$ est pair $\iff \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$
- $n \in \mathbb{N}$ est impair $\iff \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$

Corrigé

Soit $n \in \overline{B} = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ impair}\}$

Alors $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$

D'où $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

Or $(2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}$ donc n^2 est impair.

Ainsi $n \in \overline{A} = \{n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ est impair}\}$ et $\overline{B} \subset \overline{A}$

On a donc $A \subset B$

Question 9

Comment montrer une égalité d'ensembles ?

Méthode 24

Par double inclusion



RAPPEL DE COURS

Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il s'agit d'un grand classique pour montrer l'égalité de deux ensembles. Pour montrer que $A = B$, on va d'abord montrer que $A \subset B$ en utilisant les méthodes vues précédemment. On montre ensuite de même que $B \subset A$.

Exercice 25

Montrer que $\{x \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq x\} = [0, 1]$

Corrigé

• Soit $x \in \{x \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq x\}$

On a alors $x \geq 0$ et $x^2 \leq x$

Donc $x^2 - x \leq 0$ i.e. $x(x - 1) \leq 0$ (*)

Si $x = 0$, alors on a bien $x \in [0, 1]$

Si $x > 0$, alors d'après (*) on a $x - 1 \leq 0$

Donc $x \leq 1$ et $x > 0$, et on a bien $x \in [0, 1]$

Dans tous les cas on a donc $x \in [0, 1]$.

• Soit $x \in [0, 1]$.

Alors $x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$

Donc $x^2 \leq x$ et $x \in \{x \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq x\}$

Finalement, on a $\boxed{\{x \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq x\} = [0, 1]}$

Méthode 25

Par équivalence



RAPPEL DE COURS

Si $x \in A \iff x \in B$ alors $A = B$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Dans certaines situations, il est possible de raisonner directement par équivalence pour montrer l'égalité de deux ensembles. Il faut néanmoins faire attention car souvent les étudiants font l'erreur de conserver une équivalence alors que seule une implication est valable. Il faut donc bien s'assurer que le raisonnement par équivalence est possible! Sinon, on raisonnera par double inclusion.

Le raisonnement par équivalence est très utilisé pour déterminer les solutions d'une équation ou d'un système d'équations.

Exercice 26

Soit $B = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (u_n) \text{ est une suite géométrique telle que } u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\}$

Démontrer que $B = \left\{((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}; \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}\right\}$

Corrigé

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique telle que $u_0 = 1$ donc $\exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$ ($q \neq 0$ car sinon, $u_0 = 0 \neq 1$)

$(u_n) \in B \iff \forall n \in \mathbb{N}, 2q^{n+3} + 3q^{n+2} - q^n = 0$

$\iff q^n [2q^3 + 3q^2 - 1] = 0$

$\iff 2q^3 + 3q^2 - 1 = 0$ car q est non nul.

On remarque que -1 est une racine évidente de $2q^3 + 3q^2 - 1$

Donc

$$\begin{aligned} 2q^3 + 3q^2 - 1 &= (q+1)(2q^2 + q - 1) \\ &= (q+1)^2(2q-1) \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B \iff q = -1 \text{ ou } q = \frac{1}{2}$

Donc $B = \left\{((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}\right\}$

1.4. Applications



Remarque

Les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité seront réabordées sous un nouvel angle avec des nouvelles méthodes dans le *Chapitre 7 - Applications linéaires*. Ici sont décrites les méthodes permettant de résoudre les questions concernant des applications générales (linéaires ou non).



RAPPEL DE COURS

Soient E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F (notée $f : E \rightarrow F$) est une relation entre E et F , qui à tout élément de E , associe un unique élément de F .

Question 10

Comment déterminer l'image directe d'un ensemble A par une application f ?

Méthode 26

Par utilisation de la définition de l'image directe d'un ensemble A



RAPPEL DE COURS

Soient E et F deux ensembles. Soit $A \subset E$. Soit $f : E \rightarrow F$.
On appelle **image directe de A** : $f(A) = \{f(a), a \in A\}$.
On a $(y \in f(A))$ si et seulement si $(\exists a \in A, f(a) = y)$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer l'image directe d'un ensemble A par une application f , on va montrer une égalité d'ensemble du type $f(A) = B$ tout en pensant à utiliser la définition de $f(A)$.

Deux cas se présentent :

- Si l'énoncé est du type "montrer que $f(A) = B$ ", alors on cherche directement à montrer une égalité d'ensembles.
- Si l'énoncé demande de trouver $f(A)$, il faut alors réfléchir au brouillon pour trouver l'ensemble B auquel est égal $f(A)$, et ensuite montrer l'égalité d'ensembles.

Exercice 27

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto |ab| \end{cases}$. Déterminer $f(A)$.

Corrigé



Brouillon

On remarque $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \geq 0$.

On va chercher à montrer que $f(A) = \mathbb{R}^+$.

Montrons que $f(A) = \mathbb{R}^+$.

- Soit $x \in f(A)$, montrons que $x \in \mathbb{R}^+$.

$x \in f(A)$ donc $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f((a, b)) = x$ i.e. $|ab| = x$

Or $|ab| \geq 0$ donc $x \geq 0$ donc $x \in \mathbb{R}^+$

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrons que $x \in f(A)$.

Posons $a = x$ et $b = 1$. On a $ab = x \geq 0$ donc $|ab| = x$

On a donc bien $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f((a, b)) = x$ donc $x \in f(A)$

Donc $f(A) = \mathbb{R}^+$

Question 11**Comment montrer qu'une application f est injective ?****Méthode 27**

Par utilisation de la définition de l'injectivité

**RAPPEL DE COURS**Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. f est injective $\iff \forall (x, y) \in E^2, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$ $\iff \forall (x, y) \in E^2, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$ (c'est cette définition qu'on utilisera le plus souvent).Pour comprendre le sens de l'injectivité, il faut se dire que (f est injective) si et seulement si (les éléments de F admettent 0 ou 1 antécédent par f , mais pas plus) si et seulement si (2 éléments distincts de E ont des images différentes par f)**POINT MÉTHODOLOGIQUE**Pour montrer qu'une application f de E dans F est injective, on prend deux éléments quelconques x et y de E , on suppose que $f(x) = f(y)$ puis on cherche à montrer que $x = y$.**Exercice 28**Soient E , F et G trois ensembles non vides. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G . Montrer que $(g \circ f \text{ injective}) \implies (f \text{ injective})$ **Corrigé**Supposons $g \circ f$ injective. $g \circ f : E \rightarrow G$.Alors $\forall (x, y) \in E^2, g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$ (1)Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$,on applique g , donc $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ Et d'après (1) : $x = y$ Ainsi $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ Et f injective

Méthode 28

Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, par utilisation de la stricte monotonie



RAPPEL DE COURS

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I

$\forall x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

Si f est strictement monotone sur I , alors f est injective sur I .

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Montrer que f est injective.

Corrigé

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas),

$$\text{et } \forall x \geq 0, f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Donc $\forall x > 0, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi f est injective

Question 12

Comment montrer qu'une application f n'est pas injective ?

Méthode 29

En trouvant x et y différents tels que $f(x) = f(y)$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une application f de E dans F n'est pas injective, il faut trouver un contre-exemple à la définition, i.e. trouver $(x, y) \in E^2$ avec $x \neq y$ tels que $f(x) = f(y)$.

Exercice 30

Soit $n \geq 2$, on considère $m : \mathcal{P}([1, n]) \rightarrow [0, n]$, qui à $A \in \mathcal{P}([1, n])$ associe $\max_{x \in A} x$ (et $m(\emptyset) = 0$).
 m est-elle injective ?