

Mathématiques

BTS industriels

Groupement A

2^e édition

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Mathématiques

BTS industriels

Groupement A

*Cours conforme au référentiel, QCM,
exercices et sujets corrigés*

2^e édition

Laurent LUBRANO

Professeur au lycée Duplessis-Mornay (Saumur)

Véronique CHEVRIER

Professeure au lycée Sadi Carnot (Saumur)

Stéphane LE MÉTEIL

Professeur au lycée Robert Schuman (Le Havre)

Patrick LEMÉNICIER

*Professeur au lycée Pierre-Gilles de Gennes
ENCPB-Paris*

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
--	--



© Dunod, 2010, 2016
 11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
 ISBN 978-2-10-075313-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 • FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE	1
1.1 Se repérer avec la notion de fonction	1
1.2 Fonction en escalier	18
1.3 Fonction affine	19
1.4 Fonction trinôme	20
1.5 Fonction logarithme népérien	21
1.6 Fonction exponentielle	26
1.7 Fonction racine carrée	29
1.8 Fonction puissance	30
1.9 Fonctions circulaires	33
1.10 Fonction circulaire réciproque	41
1.11 Limites de fonction composée	43
QCM	44
Vrai ou faux ?	45
Exercices	46
CHAPITRE 2 • NOMBRES COMPLEXES	47
2.1 C'est quoi un nombre complexe ?	47
2.2 À quoi cela sert-il ?	49
2.3 Forme algébrique	49
2.4 Module et argument d'un nombre complexe	51
2.5 Formules d'Euler	55
2.6 Transformations élémentaires	56
2.7 Équations du second degré à coefficients réels	61
2.8 Exemples de transformation différente	63
QCM	67

Table des matières

Vrai ou faux ?	68
Exercices	69
CHAPITRE 3 • SUITES NUMÉRIQUES	70
3.1 C'est quoi une suite numérique ?	70
3.2 À quoi cela sert-il ?	72
3.3 Suites particulières	72
3.4 Variations d'une suite	76
3.5 Comportement à l'infini	77
QCM	78
Vrai ou faux ?	79
Exercices	80
CHAPITRE 4 • CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL	83
4.1 C'est quoi une intégrale ?	83
4.2 À quoi cela sert-il ?	86
4.3 Propriétés de l'intégrale	86
4.4 Méthodes de calculs d'intégrales	89
4.5 Quelques applications du calcul intégral	90
4.6 Approximation locale d'une fonction	93
QCM	96
Vrai ou faux ?	98
Exercices	98
CHAPITRE 5 • SÉRIES, SÉRIES DE FOURIER	102
5.1 Préambule	102
5.2 Séries numériques	103
5.3 Séries de Fourier	105
QCM	116
Vrai ou faux ?	117
Exercices	117

CHAPITRE 6 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	119
6.1 C'est quoi une équation différentielle ?	119
6.2 À quoi cela sert-il ?	120
6.3 Équation différentielle du 1 ^{er} ordre	120
6.4 Équation différentielle linéaire du second ordre	125
QCM	129
Vrai ou faux ?	130
Exercices	131
 CHAPITRE 7 • TRANSFORMATION DE LAPLACE	 135
7.1 Préambule	135
7.2 Définitions	136
7.3 Transformées de fonctions usuelles	138
7.4 Propriétés de la transformée de Laplace	143
7.5 Méthodes de calcul des transformées	149
7.6 Transformation réciproque	155
7.7 Application à la résolution de problèmes différentiels	159
7.8 Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale	162
QCM	163
Vrai ou faux ?	164
Exercices	165
 CHAPITRE 8 • TRANSFORMATION EN Z	 167
8.1 Préambule	167
8.2 Retour sur les séries	168
8.3 Définitions préalables	169
8.4 Transformation en z	171
8.5 Propriétés	177
8.6 Équations aux différences	180
QCM	182
Vrai ou faux ?	184
Exercices	184

CHAPITRE 9 • FONCTIONS DE DEUX OU TROIS VARIABLES RÉELLES	187
9.1 Qu'est-ce qu'une fonction de deux variables ?	187
9.2 À quoi cela sert-il ?	188
9.3 Dérivées partielles	188
9.4 Fonctions de trois variables	191
9.5 Champ vectoriel	193
9.6 Application aux calculs d'intégrales.....	194
9.7 Calcul d'intégrales doubles et triples par changement de coordonnées	200
QCM	205
Vrai ou faux ?	206
Exercices	206
 CHAPITRE 10 • CALCUL VECTORIEL	 209
10.1 Rappel sur les vecteurs.....	209
10.2 Barycentre de deux points pondérés et plus	212
10.3 Produit scalaire	216
10.4 Produit vectoriel.....	219
10.5 Produit mixte.....	221
QCM	225
Vrai ou Faux ?	226
Exercices	226
 CHAPITRE 11 • MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE	 229
11.1 Qu'est-ce que la modélisation géométrique ?	229
11.2 À quoi cela sert-il ?	229
11.3 Étude du modèle des courbes de Bézier	230
11.4 Les courbes B-splines	241
Travaux pratiques.....	251
Exercices	258
 CHAPITRE 12 • CALCUL MATRICIEL	 261
12.1 C'est quoi une matrice ?	261

12.2 À quoi cela sert-il ?	262
12.3 Addition de deux matrices de même dimension	263
12.4 Multiplication d'une matrice par un réel.....	263
12.5 Multiplication de deux matrices	264
12.6 Matrices carrées.....	265
12.7 Matrice unité.....	265
12.8 Applications du calcul matriciel.....	265
QCM	269
Vrai ou faux ?	271
Exercices	271
 CHAPITRE 13 • STATISTIQUE DESCRIPTIVE	 273
13.1 Pourquoi faire des statistiques ?	273
13.2 Les paramètres de position	273
13.3 Les paramètres de dispersion	276
13.4 Point moyen	277
13.5 Covariance	278
13.6 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés	278
QCM	281
Vrai ou Faux ?	283
Exercices	283
 CHAPITRE 14 • PROBABILITÉ	 285
14.1 Préambule	285
14.2 Généralités sur les ensembles	286
14.3 Axiome du calcul des probabilités	287
14.4 Probabilités conditionnelles.....	289
14.5 Variables aléatoires réelles.....	292
14.6 Principales lois de probabilité	300
QCM	311
Vrai ou faux ?	312
Exercices	312

Table des matières

CHAPITRE 15 • STATISTIQUES INFÉRENTIELLES	314
15.1 Préambule	314
15.2 Lois limites.....	315
15.3 Estimation	318
15.4 Tests d'hypothèses.....	321
QCM	327
Vrai ou faux ?	328
Exercices	328
 SOLUTIONS DES QCM	 330
 SOLUTIONS DES VRAI OU FAUX	 333
 SOLUTIONS DES EXERCICES	 336
 ANNEXE 1 • LOI DE POISSON	 361
 ANNEXE 2 • LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE	 363
 INDEX	 365

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

PRÉREQUIS	• Notion d'ensemble de définition d'une fonction • Variations et représentation graphique d'une fonction dans un repère du plan • Dérivabilité d'une fonction • Limites et intervalles
MOTS-CLÉS	• Ensemble de définition • Variations – Extremum • Limite – Dérivée – Asymptote • Parité – Périodicité • Fonctions : affines, polynôme de degré 2, exponentielle, logarithme népérien, racine carrée, puissances, circulaires, circulaire réciproque
OBJECTIFS	• Savoir traiter les situations pouvant être modélisées mathématiquement par des fonctions à valeurs réelles, représentant des « phénomènes continus »

1.1 SE REPÉRER AVEC LA NOTION DE FONCTION

1.1.1 Le modèle, l'exact et le vrai

L'étude des fonctions est soumise à de nombreux concepts qui, s'ils ne sont pas clairement identifiés et utilisés, peuvent bloquer une étude pourtant facilement réalisable.

Les fonctions servent à modéliser des phénomènes continus. Pour cela il faut établir une relation entre une situation existante et un modèle mathématique capable de l'approcher au mieux dans certaines conditions.

Exemple

La loi d'Ohm $U = R \times I$ présente la différence de potentiel U aux bornes d'un composant résistif comme une fonction linéaire du courant I qui traverse ce composant. Ce modèle n'est valable que dans certaines conditions liées entre autres à la température et à la technologie de fabrication du composant résistif. Ce modèle n'est pas universel et s'appliquera dans certaines conditions seulement.

En préalable à toute étude mettant en jeu des fonctions, il convient de ne pas se couper du cadre réel de l'étude, et de bien positionner la validité du modèle. Il faut faire la distinction entre ce qui sera « exact » comme le résultat d'un calcul utilisant le modèle, et ce qui sera « vrai », c'est-à-dire le phénomène réel qui se produit.

Calculs avec un composant présentant une tolérance

Un générateur continu de $U = 10 \text{ V}$ et 5 A max est branché aux bornes d'une résistance R en technologie couche carbone de valeur nominale 100Ω et de tolérance 10% . Le calcul du courant débité I peut donc donner des résultats entre deux valeurs extrêmes que l'on demande de déterminer.

SOLUTION. Le modèle de calcul donnant le courant minimal est obtenu pour $R = 110 \Omega$ et donc $U = 110 \times I$ donc $I = \frac{10}{110} \text{ A}$.

Le modèle de calcul donnant le courant maximal est obtenu pour $R = 90 \Omega$ et donc $U = 90 \times I$ donc $I = \frac{10}{90} \text{ A}$.

1.1.2 L'ensemble de définition

Mathématiquement une fonction peut être définie sur $\mathbb{R}$. Cependant les modèles utilisés sont rarement valables pour une variable parcourant l'ensemble des nombres réels.

Définition 1.1

L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des x tel que $f(x)$ existe (sauf limitation propre à la validité d'un modèle).

Exemple : Allongement d'un ressort

La longueur d'un ressort soumis à une force d'allongement est une fonction de k , avec k la constante de raideur du ressort. En considérant la résistance mécanique maximale de l'alliage composant les spires du ressort, une trop forte tension entraînera une rupture, et le modèle y trouvera lui aussi ses limites. C'est donc seulement pour une certaine plage de valeurs d'entrées de la force, que le modèle pourra être exploité. Il n'a pas de sens en dehors de ces valeurs de l'ensemble de définition.

Détermination d'un ensemble de définition

Déterminer les ensembles de définition maximum des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+4} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sqrt{x-2}$$

SOLUTION. Pour f , il faut $x + 4 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -4$. Donc $Df = \mathbb{R} - \{-4\}$. Pour g , il faut $x - 2 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 2$. Donc $Dg = [2; +\infty[$.

Point méthode

Trois cas peuvent se présenter :

- L'expression au dénominateur ne peut pas être nulle.
- L'expression sous un radical doit être positive ou nulle.
- L'expression dont on calcule le logarithme népérien ($\ln$) doit être > 0 .

1.1.3 Les variations

a) Extremum d'une fonction sur un intervalle

Définition 1.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , de courbe représentative C . Soit a un réel de I .

- Dire que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I signifie que pour tout réel x de I , $f(x) \leq f(a)$.
- Dire que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I signifie que pour tout réel x de I , $f(x) \geq f(a)$.

Exemple : Couple d'un moteur asynchrone

Le couple d'un moteur asynchrone présente un maximum et un minimum en fonction de la vitesse de fonctionnement. Ces informations permettent de différencier les différentes zones d'utilisation de cette machine.

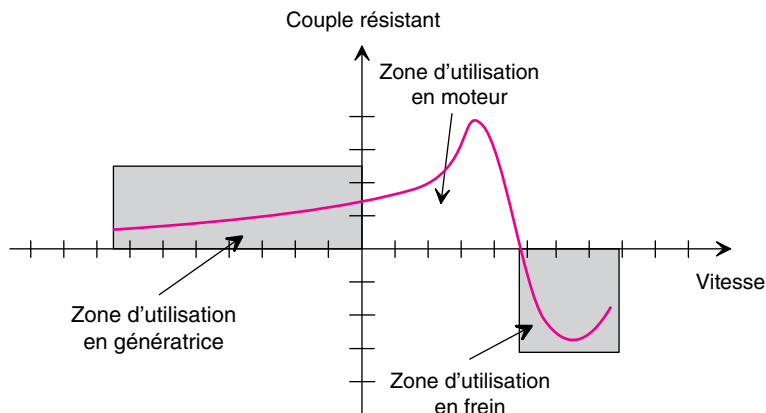


Figure 1.1 Les trois domaines d'utilisation d'une machine asynchrone.

b) Sens de variation d'une fonction sur un intervalle

Des variations trop rapides peuvent empêcher un traitement en aval du phénomène. De même des variations lentes permettent d'envisager un traitement éventuel moins coûteux. Ici encore le signe de la dérivée de la fonction modèle va permettre rapidement de repérer les variations sur les différents intervalles (voir § 1.1.5).

Définition 1.3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , de courbe représentative C . Soient a et b des réels.

- f est **croissante** sur I signifie que, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- f est **décroissante** sur I signifie que, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

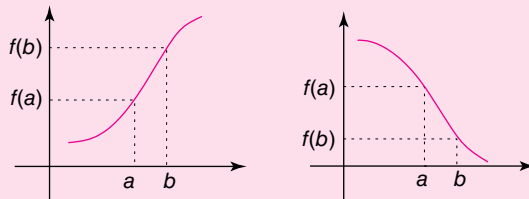


Figure 1.2 Croissance – Décroissance.

Exemple

L'évolution de l'intensité du courant électrique durant la charge puis la décharge d'un condensateur à travers une résistance.

Charge d'un condensateur à travers une résistance

À $t = 0s$, on ferme K_1 et on ouvre K_2 . Le condensateur étant déchargé, il se charge pour obtenir la différence de potentiel E (jamais atteinte dans la réalité) à travers la résistance R et avec la constante de temps $\tau = R \times C$.

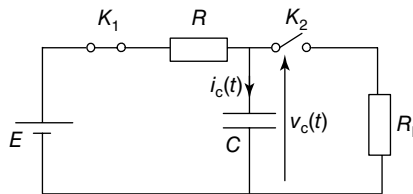


Figure 1.3

Décharge d'un condensateur à travers une résistance

À $t' = 0s$ (on considère que C est chargé à une valeur proche de E) on ouvre K_1 et on ferme K_2 . Les charges emmagasinées dans le condensateur s'évacuent du composant dans le circuit externe R_L , C .

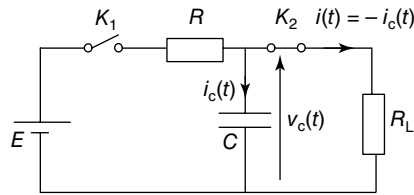


Figure 1.4

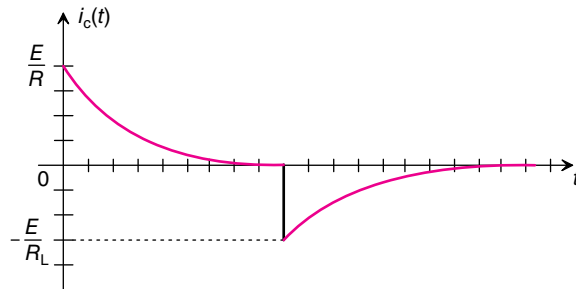


Figure 1.5 Évolution de la valeur de l'intensité du courant électrique lors d'une charge/décharge de condensateur à travers une résistance.

La courbe représentative présente une décroissance sur un premier intervalle, puis une croissance sur le second.

Remarque

On dit que f est monotone sur un intervalle I si elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.

Étude des variations d'une fonction

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 7 - 3t^2$ et $g(t) = 6\sqrt{3}t - 2\sqrt{3}t^2$.

Étudier les variations des fonctions f et g .

SOLUTION. La fonction f varie comme l'opposé de la fonction carré donc selon le tableau des variations suivant car sa dérivée f' est telle que $f'(t) = -6t$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	7	$-\infty$

Figure 1.6

La fonction dérivée g' de g peut s'écrire sous la forme : $g'(t) = 2\sqrt{3}(3-2t)$. Un tableau de signes simple permet de déterminer le tableau de variations de la figure 1.7.

t	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(t)$	$-\infty$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$

Figure 1.7

Point méthode

- L'étude des variations passe par l'étude du signe de la dérivée. (§ 1.1.5)
- Pour étudier le signe d'une expression, il est souvent utile de la factoriser. On peut ensuite utiliser un tableau de signes.

1.1.4 Limites

Considérons de nouveau la charge d'un condensateur à travers une résistance. Le montage sera le même que celui de la figure 1.3.

L'évolution de la différence de potentiel aux bornes du condensateur a pour courbe représentative la figure 1.8. Le modèle considéré est celui d'une fonction f dont la variable est le temps t . Les images par la fonction f de chaque valeur temporelle t sont les valeurs $f(t)$.

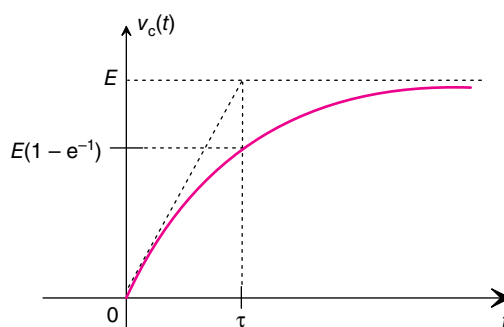


Figure 1.8

Une valeur particulière de t est la valeur de la constante de temps τ du circuit R-C à laquelle la fonction f associe l'image $f(\tau) = E(1 - e^{-1})$.

Pour plus de facilité nous lui attribuerons la grandeur $a = E(1 - e^{-1})$.

- Si la question posée est : Quelle peut bien être la valeur vers laquelle se dirige la courbe représentative de la fonction lorsque $t = \tau$, il est facile de répondre que comme l'image de τ existe par la fonction f et que le tracé est continu, alors la courbe se dirige vers $f(\tau) = a$.
- Ce qui se traduira mathématiquement par : $\lim_{t \rightarrow \tau} f(t) = f(\tau) = a$. Ceci indique d'ailleurs que f est continue en τ .
- Si la question posée est : Quelle peut bien être la valeur vers laquelle se dirige la courbe représentative de la fonction lorsque $t \rightarrow +\infty$, il n'est pas facile de répondre. En effet, un condensateur réel ne peut jamais être chargé à son maximum car il y a des pertes de charge permanentes à travers les résistances de métallisation des contacts et dans l'air (Résistance non infinie de l'air). «L'image de l'infini par la fonction f » n'est donc pas quelque chose d'existant pratiquement.
- La réponse à la question précédente est donc une extrapolation de notre courbe en considérant un temps infini et en remarquant que de toute façon la différence de potentiel de notre condensateur ne dépassera jamais la valeur maximale E .
- La courbe se dirige vers E . Ce qui se traduira mathématiquement par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = E.$$

Il convient donc de considérer lors de l'étude des limites d'une fonction, si cette fonction est définie ou non au point d'étude considéré, et si cette recherche de limite concerne un point ou l'infini.

Lorsqu'on connaît les limites des fonctions f et g , on peut en déduire les limites des fonctions $f + g$; $f \times g$ et $\frac{f}{g}$.

Théorème 1.4 Limites d'une somme de deux fonctions

l et l' sont deux réels. Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a , ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f + g)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<i>FI (Forme indéterminée)</i>

Théorème 1.5 Cas indéterminé dans la limite d'une somme

Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a , ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:
Si f a pour limite $+\infty$ et si g a pour limite $-\infty$, alors la détermination de la limite de $f + g$ demande une étude particulière. On dit que c'est un cas indéterminé $+\infty - \infty$.

Théorème 1.6 Limites d'un produit de deux fonctions

l et l' sont deux réels. Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a , ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f \times g)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Théorème 1.7 Cas indéterminé dans la limite d'un produit

Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a , en $+\infty$, ou en $-\infty$:
Si f a pour limite 0 et si g a pour limite $\pm\infty$, alors la détermination de la limite de $f \times g$ demande une étude particulière. On dit que c'est un cas indéterminé $0 \times \infty$.

Théorème 1.8 Limites d'un quotient de deux fonctions

l et l' sont deux réels. Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a , ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$
$\lim \left(\frac{f}{g} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim f$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim \left(\frac{f}{g} \right)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Théorème 1.9 Cas indéterminés dans la limite d'un quotient

Les limites des fonctions f et g sont considérées en un réel a , ou en $+\infty$, ou en $-\infty$:

- Si f a pour limite 0 et si g a pour limite 0 , alors la détermination de la limite de $\frac{f}{g}$ demande une étude particulière. Cas indéterminé $\frac{0}{0}$.
- Si f a pour limite $\pm\infty$ et si g a pour limite $\pm\infty$, alors la détermination de la limite de $\frac{f}{g}$ demande une étude particulière. Cas indéterminé $\frac{\infty}{\infty}$.