

FLUORESCIENCES

Maths

Algèbre

Jean-Romain Heu



Viktor Heu



DUNOD

© Dunod, 2024
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-087331-9

Table des matières

Se repérer dans le livre	VIII
Avant-propos.....	X

CHAPITRE

1

QU'EST-CE QUE L'ALGÈBRE	2
1 Al-jabr wa-l-muqābala	4
2 Calcul littéral	5
3 Opérations élémentaires	7
4 Raisonnement algébrique	13
5 Structures algébriques	16
6 Conclusion	23
Ce qu'il faut retenir	24
Exercices	25

CHAPITRE

2

L'ARITHMÉTIQUE	26
1 Les nombres entiers	28
2 Les nombres rationnels	37
3 L'arithmétique modulaire	38
4 Définition de $\mathbb{N}$	42
5 Test de primalité avec Python	44
6 Pour aller plus loin : le système de cryptographie RSA	46
Ce qu'il faut retenir	48
Exercices	49

CHAPITRE

3

LES NOMBRES COMPLEXES	50
1 Construction de $\mathbb{C}$	52
2 Écriture polaire, module et argument	56
3 Racines de polynômes	66
4 Pour aller plus loin : complexité physique	73
Ce qu'il faut retenir	76
Exercices	77

LES POLYNÔMES	78
1 Polynômes formels et fonctions polynomiales	80
2 Structure algébrique des polynômes	82
3 Degré d'un polynôme	83
4 Arithmétique des polynômes	85
5 Racines d'un polynôme	90
6 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$	94
7 Pour aller plus loin : calcul modulaire polynomial	99
Ce qu'il faut retenir	102
Exercices	103

LES MATRICES	104
1 Structure algébrique	106
2 Le bestiaire des matrices carrées	111
3 L'inversion des matrices	120
4 Déterminant et rang d'une matrice	124
5 Pour aller plus loin : jeux de lumières	138
Ce qu'il faut retenir	142
Exercices	143

LES ESPACES VECTORIELS	144
1 La structure d'espace vectoriel	146
2 Les sous-espaces vectoriels	149
3 Les bases	153
4 Écriture matricielle en dimension finie	165
5 Décomposition en sous-espaces vectoriels	169
6 Pour aller plus loin : un air de piano	172
Ce qu'il faut retenir	175
Exercices	176

LES APPLICATIONS LINÉAIRES	178
1 Morphisme d'espaces vectoriels	180
2 Noyau et image	183
3 Écriture matricielle des applications linéaires	188

4 Systèmes affines	194
5 Pour aller plus loin : corrigeons les erreurs	197
Ce qu'il faut retenir	200
Exercices	201
 LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	202
1 Diagonalisation	204
2 Trigonalisation	213
3 Applications de la réduction	222
Ce qu'il faut retenir	233
Exercices	234
 Corrigés	235
Index	239
Crédits iconographiques	240

Se repérer dans le livre

Ouverture de chapitre

- QCM pour se tester sur les prérequis de Terminale.

- Un exemple concret pour introduire le sujet du chapitre.

- Ce que l'on maîtrisera à la fin du chapitre.

Les nombres complexes

CHAPITRE
3

Pour bien démarrer

1. Soit λ un nombre satisfaisant $\lambda^2 = 2$. Que vaut alors le produit $(\lambda + 2\lambda^2 - 3)^2$?
☐ A. $15 + 7\sqrt{2}$
☐ B. $15 - 7\sqrt{2}$
☐ C. $11 + 3\sqrt{2}$
☐ D. $11 - 3\sqrt{2}$
2. Soit λ un nombre satisfaisant $\lambda^2 = -4$. Que vaut alors le produit $(\lambda + 2\lambda^2 - 3)^2$?
☐ A. $15 + 7\sqrt{2}$
☐ B. $15 - 7\sqrt{2}$
☐ C. $11 + 3\sqrt{2}$
☐ D. $11 - 3\sqrt{2}$
3. Quelles sont les racines réelles du polynôme $X^3 - 2X + 10 = 0$?
☐ A. $2, 3, 4$
☐ B. $1, 3, 4$
☐ C. $2, 3, 4$
☐ D. $1, 3, 4$
4. Quelles sont les racines réelles du polynôme $X^3 - 2X + 10 = 0$?
☐ A. $2, 3, 4$
☐ B. $1, 3, 4$
☐ C. $2, 3, 4$
☐ D. $1, 3, 4$
5. Soit λ le point de coordonnées $(5, 2)$. Quelles sont les coordonnées du point obtenu en faisant tourner le point λ d'un angle π autour de l'origine ?
☐ A. $(-5, -2)$
☐ B. $(5, -2)$
☐ C. $(-5, 2)$
☐ D. $(5, 2)$

► Réponses p. 235

Objectifs

- Savoir calculer avec les nombres complexes.
- En maîtriser les écritures algébrique et polaire.
- Interpréter géométriquement les propriétés des nombres complexes.
- Savoir résoudre certaines équations polynomiales à l'aide des nombres complexes.
- Utiliser les nombres complexes en trigonométrie.

Le cours

- Le **cours** est illustré par des figures et de nombreux exemples.

- Les **focus** développent un sujet de recherche, une application, un thème d'actualité.

- Des repères historiques.

- Des conseils et erreurs à éviter.

CHAPITRE 3 | Les nombres complexes

Il n'est pas toujours évident de savoir si un nombre est réel ou complexe. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux propriétés des nombres complexes et à leur utilisation en trigonométrie.

Focus

Soit λ un nombre complexe. On dit que λ est réel si et seulement si $\lambda = \overline{\lambda}$. On dit que λ est imaginaire si et seulement si $\lambda = -\overline{\lambda}$. On dit que λ est pur imaginaire si et seulement si $\lambda = i\alpha$ avec α réel.

3.2 Racines énnées

Considérons par les équations de la forme $X^n - 1 = 0$ où n est un nombre entier et $n \geq 2$. Les solutions sont les racines n -èmes de l'unité.

CHAPITRE 1 | Les applications linéaires

Soit X un espace vectoriel de dimension finie. On considère l'application linéaire f de X dans X définie par $f(x) = 2x$. On cherche à déterminer les valeurs propres de f .

Méthode

Soit λ une valeur propre de f . Alors, il existe un vecteur non nul x tel que $f(x) = \lambda x$. On a donc $2x = \lambda x$, ce qui implique $(2 - \lambda)x = 0$. Comme $x \neq 0$, on a $2 - \lambda = 0$, donc $\lambda = 2$. Ainsi, 2 est une valeur propre de f .

Exemple 7.25

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x)$. On cherche à déterminer les valeurs propres de f .

3 Racines de polynômes

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels. On dit que λ est une racine de P si $P(\lambda) = 0$. On dit que λ est une racine simple de P si $P'(\lambda) \neq 0$.

Remarque

Si λ est une racine simple de P , alors $P(X) = (X - \lambda)Q(X)$ où Q est un polynôme à coefficients réels. Si λ est une racine multiple de P , alors $P(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$ où $k \geq 2$ et Q est un polynôme à coefficients réels.

Exemple 3.28

On considère le polynôme $P(X) = X^3 - 1$. On cherche à déterminer les racines de P .

5 Pour aller plus loin : corrigeons les erreurs

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x)$. On cherche à déterminer les valeurs propres de f .

Correction

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x)$. On cherche à déterminer les valeurs propres de f .

Exemple 7.25

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x)$. On cherche à déterminer les valeurs propres de f .

En fin de chapitre

- Un **résumé** de ce qu'il faut retenir.
- Les **QCM** et **exercices** permettent de vérifier ses connaissances et de s'entraîner aux examens.
- Les **corrigés** sont détaillés à la fin du livre.

Ce qu'il faut retenir

- L'algèbre est l'art de manipuler des égalités et des expressions littérales.
- Cela repose sur les opérations usuelles et leur propriété : associativité, commutativité, distributivité, etc.
- L'algèbre est devenue, depuis le XIX^e siècle, l'étude des structures algébriques.
- C'est-à-dire des ensembles pour lesquels les opérations usuelles ont des propriétés particulières.
- Ces structures algébriques permettent d'établir des correspondances entre différents mondes mathématiques et de trouver des raisonnements d'un monde à l'autre.

Testez-vous

1. Quelles égalités se déduisent de celles-ci ?
a. $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$
b. $x^2 = y^2 \Rightarrow x = -y$
c. $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ ou $x = -y$
d. $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ ou $x = -y$
2. La réponse de deux nombres liés par $x = -y$ est une opération usuelle.

3. Dans le cadre d'un exemple 1.2, quelles égalités sont justes ?
a. $x^2 = y^2$
b. $x^2 = y^2$
c. $x^2 = y^2$
d. $x^2 = y^2$

4. À partir de quelle égalité peut-on déduire $x^2 = y^2$?
a. $x^2 = y^2$
b. $x^2 = y^2$
c. $x^2 = y^2$
d. $x^2 = y^2$

5. Quelles affirmations sont vraies ?
a. La multiplication des fractions est associative.
b. La multiplication des nombres réels est associative.
c. La division des nombres est associative par rapport à l'addition.
d. Le produit scalaire entre vecteurs est commutatif.

6. Pour bien démarrer
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

7. Testez-vous
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

8. Exercice 3 : Indicateur d'Euler
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

9. Exercice 5 : Équations rationnelles
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

10. Exercice 6 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

11. Exercice 7 : Indicateur d'Euler
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

12. Exercice 8 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

13. Exercice 9 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

14. Exercice 10 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

15. Exercice 11 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

16. Exercice 12 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

17. Exercice 13 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

18. Exercice 14 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

19. Exercice 15 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

20. Exercice 16 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

21. Exercice 17 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

22. Exercice 18 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

23. Exercice 19 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

24. Exercice 20 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

25. Exercice 21 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

26. Exercice 22 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

27. Exercice 23 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

28. Exercice 24 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

29. Exercice 25 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

30. Exercice 26 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

31. Exercice 27 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

32. Exercice 28 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

33. Exercice 29 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

34. Exercice 30 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

35. Exercice 31 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

36. Exercice 32 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

37. Exercice 33 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

38. Exercice 34 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

39. Exercice 35 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

40. Exercice 36 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

41. Exercice 37 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

42. Exercice 38 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

Exercices

Compte page 235

1. Déterminez les expressions suivantes
a. $x = y^2 \Rightarrow x = y^2$
b. $x = y^2 \Rightarrow x = y^2$
c. $x = y^2 \Rightarrow x = y^2$
d. $x = y^2 \Rightarrow x = y^2$

Résumez l'exercice en rapportant ce qui suit :

2. Testez-vous
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

3. Exercice 1 : Algèbre et polaire
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

4. Exercice 2 : Équations polynomiales
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

5. Exercice 3 : Équations polynomiales
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

6. Exercice 4 : Rotations
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

7. Exercice 5 : Équations rationnelles
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

8. Exercice 6 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

9. Exercice 7 : Indicateur d'Euler
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

10. Exercice 8 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

11. Exercice 9 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

12. Exercice 10 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

13. Exercice 11 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

14. Exercice 12 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

15. Exercice 13 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

16. Exercice 14 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

17. Exercice 15 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

18. Exercice 16 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

19. Exercice 17 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

20. Exercice 18 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

21. Exercice 19 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

22. Exercice 20 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

23. Exercice 21 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

24. Exercice 22 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

25. Exercice 23 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

26. Exercice 24 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

27. Exercice 25 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

28. Exercice 26 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

29. Exercice 27 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

30. Exercice 28 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

31. Exercice 29 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

32. Exercice 30 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

33. Exercice 31 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

34. Exercice 32 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

35. Exercice 33 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

36. Exercice 34 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

37. Exercice 35 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

38. Exercice 36 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

39. Exercice 37 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

40. Exercice 38 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

41. Exercice 39 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

42. Exercice 40 : Calculs modulaires
a. 1, 2, 3, 4, 5
b. 1, 2, 3, 4, 5
c. 1, 2, 3, 4, 5
d. 1, 2, 3, 4, 5

En fin d'ouvrage

- Un **index** pour retrouver rapidement les notions principales.

Index

- A**
- algèbre 10
 - algèbre linéaire 10
 - algèbre linéaire 10
 - algèbre linéaire 10
 - algèbre linéaire 10
- B**
- bases 10
 - bases 10
 - bases 10
 - bases 10
 - bases 10
- C**
- calculs modulaires 10
 - calculs modulaires 10
 - calculs modulaires 10
 - calculs modulaires 10
 - calculs modulaires 10
- D**
- divisibilité 10
 - divisibilité 10
 - divisibilité 10
 - divisibilité 10
 - divisibilité 10
- E**
- équations 10
 - équations 10
 - équations 10
 - équations 10
 - équations 10
- F**
- facteuriel 10
 - facteuriel 10
 - facteuriel 10
 - facteuriel 10
 - facteuriel 10
- G**
- groupes 10
 - groupes 10
 - groupes 10
 - groupes 10
 - groupes 10
- H**
- homomorphismes 10
 - homomorphismes 10
 - homomorphismes 10
 - homomorphismes 10
 - homomorphismes 10
- I**
- idéaux 10

Avant-propos

Lorsqu'on arrive dans l'enseignement supérieur scientifique, on découvre rapidement que le monde mathématique se divise en deux grands domaines : l'**algèbre** et l'**analyse**¹. La séparation entre ces deux disciplines n'est pas aussi nette que celle qui existe entre la géométrie (le monde des figures) et l'arithmétique (le monde des nombres entiers).

Le novice comprend rapidement que l'analyse s'intéresse aux nombres réels et aux fonctions réelles et que l'algèbre s'intéresse à des objets mathématiques de nature différente pour lesquels nous disposons d'opérations élémentaires. Mais cette distinction lui semble souvent un peu artificielle.

De fait, il n'a pas complètement tort. Pourquoi les nombres complexes sont-ils le plus souvent traités dans un cours d'algèbre alors qu'ils sont une émanation des nombres réels ? Pourquoi l'étude des polynômes relève-t-elle de l'algèbre et non de l'analyse comme cas particuliers de fonctions réelles ?

À l'inverse, pourquoi les logarithmes sont-ils présentés dans les cours d'analyse ? Certes leur rôle dans le cadre de la dérivation et de l'intégration des fonctions usuelles n'est pas discutable, mais c'est bien dans des traités d'algèbre qu'on les a longtemps trouvés. Ils ont en effet été introduits par John NAPIER au XVII^e siècle pour leur propriété fondamentale : $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$. Ils transforment ainsi une multiplication en une addition, ce qui fut un outil de calcul important, avant l'arrivée des calculatrices. Les logarithmes mettent donc en relation deux opérations élémentaires, il s'agit d'une propriété algébrique.

De la même manière, de nombreux chapitres d'analyse ressemblent en partie à des cours d'algèbre. On définit l'addition des suites réelles, la multiplication des fonctions et on en étudie les propriétés structurelles. Par exemple, l'énoncé : « Une somme de fonctions continues est encore une fonction continue » est évidemment de nature analytique, sa démonstration repose essentiellement sur la définition de la continuité. Mais il est également de nature algébrique : on exprime le fait qu'une certaine propriété des fonctions est préservée par l'addition.

Cette situation paradoxale est en définitive facile à résoudre : l'algèbre n'est plus vraiment une discipline mathématique. Elle est une façon de raisonner et de calculer abstraitement, avec une capacité de généralisation tellement puissante qu'elle a imprégné presque tous les domaines mathématiques : géométrie, logique, topologie, calcul différentiel, etc. L'algèbre et l'analyse en particulier sont profondément interdépendantes. Cela se constatera dans ce livre par le fait que vous trouverez des nombres réels dans presque tous les chapitres.

Contenu

Le premier chapitre de cet ouvrage tentera de préciser ce qui définit l'algèbre. Nous le ferons dans une perspective historique afin de comprendre comment cette définition a évolué jusqu'à aujourd'hui et de justifier la place qu'a désormais l'algèbre dans les sciences. Ce rapide voyage dans le temps, allant de la manipulation des équations dans l'Antiquité jusqu'à l'évocation de la mécanique quantique, nous

¹. Les probabilités arrivent un peu plus tard et la géométrie est réduite à peu de choses en première année.

permettra de présenter les notions générales qui seront déclinées dans les chapitres suivants : les propriétés des opérations élémentaires, les bases du raisonnement algébrique, les structure algébriques.

Les quatre chapitres suivants seront dédiés aux **objets algébriques élémentaires** : les nombres entiers et rationnels, les nombres complexes, les polynômes et les matrices. Le point de vue adopté pour introduire ces objets sera toujours le même : ils sont de nature algébrique car nous disposons d'opérations élémentaires (addition et multiplication) pour les manipuler. Ce sont les propriétés de ces opérations qui rendent ces objets particulièrement intéressants.

Nous retrouvons le paradoxe déjà mentionné : il manque visiblement un chapitre sur les nombres réels entre celui sur les nombres rationnels et celui sur les nombres complexes. Même si les nombres réels mériteraient également un traitement algébrique, cet aspect ne serait pas très différent de ce que nous connaissons déjà pour les nombres rationnels. L'originalité profonde des nombres réels relève bien de l'analyse et nous vous renvoyons donc à un ouvrage qui lui est consacré pour combler le vide laissé entre nos chapitres.

Les trois derniers chapitres constituent un cours de ce qu'on appelle l'**algèbre linéaire**. Non seulement cette théorie joue un rôle fondamental en sciences, mais elle est dans cet ouvrage une excellente illustration de ce qu'est l'algèbre moderne : l'étude d'une structure algébrique (ici l'espace vectoriel), et des applications naturellement adaptées à cette structure, (ici les applications linéaires). Cette théorie repose sur les objets algébriques et leurs propriétés présentés dans les chapitres précédents.

Tout au long de l'ouvrage, nous nous efforçons de mettre en valeur ce qu'est profondément l'algèbre et le raisonnement algébrique. Ce point de vue lie tous les chapitres les uns aux autres. Mais cela ne nous empêche pas de présenter des applications propres à chaque chapitre dans des domaines scientifiques variés.

Nous montrerons par exemple comment les nombres complexes et le calcul matriciel permettent de faire de la géométrie. Nous expliquerons pourquoi les nombres complexes, et plus précisément les exponentielles complexes, sont si utilisés dans les sciences physiques.

Les équations différentielles, systèmes différentiels et autres équations aux dérivées partielles jouent un rôle central dans toutes les sciences, de la biologie aux sciences humaines. Leur nature est analytique, mais lorsqu'ils sont **linéaires**, leur résolution passe par des méthodes algébriques. Nous les croiserons ainsi dans plusieurs chapitres (polynômes, espaces vectoriels, réduction d'endomorphismes).

Un domaine fondamental commun à l'algèbre et à l'informatique est celui du **calcul formel** ou **calcul symbolique**. Ses principes et de nombreux programmes l'illustrant ont été présentés dans l'ouvrage *Analyse* de cette même collection, nous vous y renvoyons. Nous nous contenterons ici d'illustrer certaines notions par des codes élémentaires rédigés en langage PYTHON, et nous présenterons quelques méthodes de codage et de cryptage de l'information reposant sur des propriétés algébriques des nombres entiers, des polynômes ou encore des matrices.

Qu'est-ce que l'algèbre

$\simeq -3000$	Mésopotamie, écriture cunéiforme, représentation des nombres
$\simeq -2000$	Mésopotamie, tablettes scolaires d'apprentissage des quatre opérations, racines carrées et cubiques
$-700 \rightarrow 700$	Du monde méditerranéen à la Chine, étude d'équations linéaires, quadratiques et cubiques
820	Empire arabe, apparition du mot <i>algèbre</i> ; formalisation des méthodes algorithmiques de résolution des équations de degrés un et deux
XVI ^e siècle	Europe, méthode générale de résolution d'équations de degrés trois et quatre ; introduction d'un symbolisme pour écrire et manipuler les équations ; développement du calcul littéral ; apparition des nombres complexes
XVII ^e siècle	Europe, définition algébrique des courbes du plan, algébrisation de la géométrie
XVIII ^e siècle	Europe, étude des systèmes linéaires de taille quelconque, apparition du déterminant
XIX ^e siècle	Europe, premières structures algébriques, groupes, espaces vectoriels ; développement du calcul matriciel
XX ^e siècle	Monde entier, développement de la topologie algébrique, de la géométrie algébrique, de l'analyse algébrique ; algébrisation de la physique théorique ; résolution de grandes conjectures d'arithmétique.

Objectifs

- Comprendre ce que représente l'algèbre en mathématiques et comment elle s'est développée historiquement.
- Étudier les propriétés des opérations élémentaires : associativité, distributivité et commutativité.
- Savoir raisonner algébriquement.
- Introduire la notion de structure algébrique.

CHAPITRE

1



Qu'est-ce que l'algèbre ? Commençons par donner une réponse simple : l'**algèbre** est l'étude des opérations algébriques élémentaires sur les nombres : addition, soustraction, multiplication et division. Ces opérations permettent de définir des équations pour lesquelles les mathématiciens déterminent des méthodes de résolution depuis l'Antiquité.

À partir du $xviii^e$ siècle, ces derniers ont peu à peu réalisé que les raisonnements algébriques qu'ils élaboraient pouvaient s'appliquer à bien d'autres domaines que celui des nombres. Ils se mirent à additionner des mots, multiplier des tableaux, soustraire des entrelacements ou encore inverser des rotations.

Depuis, l'algèbre est devenu un domaine extrêmement vaste des mathématiques et des sciences en général dont l'objet est l'étude des opérations dans un ensemble mathématique et de leurs propriétés.

1 Al-jabr wa-l-muqābala



■ Muhammad ibn Mūsā

AL-KHWĀRIZMĪ,
≈780-850, savant persan.

Son ouvrage sur la résolution des équations est considéré comme le premier traité d'algèbre.

الجبر

■ Al-jabr, signifie en arabe restauration, reconstruction, mais également réduction d'une fracture.

On manipule les membres d'une équations comme on manipule les membres d'un corps.

Nous avons retrouvé des traces d'équations algébriques de degré deux sur des tablettes babyloniennes du XVIII^e siècle avant notre ère. Dans toute l'Antiquité, de la Chine à la Grèce en passant par l'Inde, des mathématiciens se sont intéressés aux équations de degrés un et deux, voire trois, le plus souvent en lien avec des problèmes de géométrie. Puis, notamment avec le développement de l'arithmétique, les équations devinrent un sujet d'étude indépendant de la géométrie.

C'est au IX^e siècle que le mot *algèbre* fait son apparition dans le titre d'un ouvrage d'AL-KHWĀRIZMĪ. Il y décrit notamment des méthodes de traitement des équations d'ordre un et deux, en s'appuyant sur deux principes :

- La restauration (*al-jabr*) : une égalité est préservée si on ajoute à chacun de ses membres le même nombre.
- La comparaison (*al-muqābala*) : une égalité est préservée si on retranche à chacun de ses membres le même nombre.

Nous traduirions ces principes par les axiomes suivants relatifs à l'égalité :

Pour tous nombres a, b et c , si $a = b$ alors $a + c = b + c$ et $a - c = b - c$.

Exemple 1.1

Appliquons ces principes à l'équation : $4x - 7 = 4 + x$.

Ajoutons 7 des deux côtés : $4x - 7 + 7 = 4 + x + 7$, donc $4x = 11 + x$.

Retranchons x des deux côtés : $4x - x = 11 + x - x$, donc $3x = 11$.

Les principes d'AL-KHWĀRIZMĪ s'appliquent également à la multiplication et la division.

Divisons ainsi chaque membre par 3 : $\frac{3x}{3} = \frac{11}{3}$, donc $x = \frac{11}{3}$. C'est la solution de l'équation.

Oui, ce n'est pas très impressionnant mais nous touchons là à l'essence de l'algèbre : l'art de manipuler les égalités.

Exemple 1.2

Regardons une équation d'ordre deux : $x^2 + 6x = 5$.

Évitons les formules magiques avec Δ et contentons-nous de manipuler cette équation.

Ajoutons 9 des deux côtés : $x^2 + 6x + 9 = 14$.

Nous reconnaissons à gauche une identité remarquable ; c'est le développement de $(x+3)^2$.

Ainsi $(x+3)^2 = 14$.

Nous avons besoin d'un nouveau principe : si deux nombres élevés au carré sont égaux, alors ces nombres sont égaux au signe près.

Passons ainsi à la racine carrée des deux côtés de l'égalité : $x + 3 = \pm\sqrt{14}$.

Retranchons enfin 3 des deux côtés et nous obtenons ainsi les deux solutions de l'équation :

$$x = \sqrt{14} - 3 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{14} - 3.$$