100% ENTRAÎNEMENT

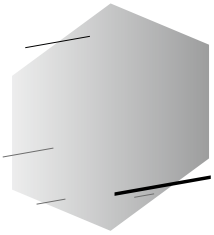
NOUVEAUX PROGRAMMES

MATHS APPROFONDIES

ECG-1

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses



100% ENTRAÎNEMENT

Collection dirigée par Sylvain Rondy

MATHS APPROFONDIES ECG-1

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

Retrouvez tous les ouvrages de la collection **100% ENTRAÎNEMENT** sur :
www.editions-ellipses.fr



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Christophe Poulain en LaTeX.

ISBN 9782340-048805
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques (préparant aux écoles d'ingénieur) et économiques (préparant aux écoles de commerce et de management). L'objectif de cette collection est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficulté progressive, sans rappels de cours excepté dans les corrigés.

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires ECG (maths approfondies) qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 40 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

- **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.
- **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.
- **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le Vrai/Faux de la fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.
- **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs de cette collection ont compilé cet abondant vivier d'exercices pour que ce livre constitue une aide efficace pour le lecteur, non seulement pendant la première année de classe préparatoire, mais aussi par la suite.

Sylvain Rondy

Sommaire

Généralités

1. Modes de raisonnement 7
2. Ensembles et applications 15
3. Injections, surjections, bijections 21
4. Inégalités 27
5. Sommes et produits 43
6. Trigonométrie 55

Polynômes et algèbre linéaire

7. Calcul matriciel 59
8. Inversibilité et systèmes linéaires 67
9. Polynômes 75
10. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels 83
11. Familles libres, génératrices et bases 91
12. Espaces vectoriels de dimension finie 99
13. Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces supplémentaires 107
14. Applications linéaires 113
15. Projecteurs 125
16. Matrices et applications linéaires 133

Analyse

17. Généralités sur les fonctions 141
18. Fonctions : limites et continuité 153
19. Fonctions : dérivation 167

20. Fonctions usuelles 181
21. Calcul intégral 199
22. Études de suites 215
23. Suites usuelles 227
24. Dérivation : compléments 235
25. Fonctions convexes 251
26. Comparaisons de fonctions, de suites 257
27. Développements limités 269
28. Compléments d'intégration et formules de Taylor 281
29. Séries 295
30. Intégrales impropres 305

Dénombrement et probabilités

31. Dénombrement 317
32. Espaces probabilisés finis 331
33. Indépendance d'événements 349
34. Variables aléatoires réelles discrètes finies 361
35. Lois discrètes finies usuelles 379
36. Couples de variables aléatoires 391
37. Inégalités en probabilités 405
38. Espaces probabilisés quelconques 415
39. Variables aléatoires réelles discrètes infinies 431
40. Lois discrètes infinies usuelles 449

1 Modes de raisonnement

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☐ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. Soit $n \geq 0$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par contraposée, que si n^2 est un entier pair alors n aussi.
2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On commencera par écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible (c'est-à-dire non simplifiable).

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exercice 4 –

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$$

Montrer par récurrence double que :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 1$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 2, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 6 –
Soit u la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 6$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (-3n + 5)\, 3^n$$

Exercice 7 –
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon \implies x = 0$$

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Soit $b > 0$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = bu_n^2$$

Exercice 9 –
Déterminer la (ou les) fonction(s) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle(s) que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est le carré d'un entier, $2n$ ne l'est pas. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Tout entier positif est somme de trois carrés d'entiers naturels. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☒ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. On souhaite montrer que si n^2 est pair, alors n aussi. Supposons donc que n n'est pas pair et montrons que n^2 n'est pas pair. L'entier n est donc impair : il existe un entier $k \geq 0$ tel que $n = 2k + 1$. Alors :

   $$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

   et $2k^2 + 2k$ est un entier donc n^2 est impair. On a ainsi montré le résultat souhaité par contraposée.

Méthode

Soit P et Q deux propositions mathématiques. Montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie est équivalent à montrer que l'implication non$(Q) \Rightarrow$ non(P) est vraie. Autrement dit, pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que Q est fausse et montrer que P est fausse.

2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Sachant que ce nombre est strictement positif, il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

et sans perte de généralité, on peut supposer que cette fraction est irréductible. On a alors $q\sqrt{2} = p$ donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est un entier pair donc p aussi d'après la question 1. Ainsi, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$. Alors :

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ce qui implique que $q^2 = 2k^2$. Ainsi, q^2 est pair donc q aussi d'après la question 1. On en déduit que p et q sont tous les deux divisibles par 2 ce qui est absurde car $\frac{p}{q}$ est irréductible. On vient donc de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Cours

L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Un réel est irrationel si il n'est pas rationnel.

Méthode

Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Exercice 3 –

On a $2^1 = 2 > 1$ donc l'inégalité souhaitée est vraie au rang 1.

Soit $n \geq 1$ tel que $2^n > n$. Montrons que $2^{n+1} > n + 1$. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n$$

par hypothèse de récurrence. Or $n \geq 1$ donc $2n = n + n \geq n + 1$. On en déduit que :

$$2^{n+1} > 2n \geq n + 1$$

ce qui montre le résultat souhaité.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Méthode

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer par récurrence une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— On conclut.

Exercice 4 –

On a :

$$\frac{a_0}{0!} = 1 \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{1!} = 1 \leq 1$$

L'inégalité à montrer est donc vraie aux rangs 0 et 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_n}{n!} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leq 1$$

Montrons que :

$$a_{n+2} \leq (n+2)!$$

On a par hypothèse de récurrence et sachant que les termes sont positifs :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + (n+1)a_n \\ &\leq (n+1)! + (n+1)n! \\ &\leq 2(n+1)! \\ &\leq (n+2)(n+1)! \\ &\leq (n+2)! \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait prouver.

Par récurrence double, on vient donc de montrer l'inégalité souhaitée :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Méthode

Pour démontrer par récurrence double une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq 0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq 0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et montre alors que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

— On conclut.

Ce type de raisonnement est particulièrement adapté dans le cas de certaines suites dont un terme dépend des deux précédents. On adapte évidemment le raisonnement si la propriété est définie à partir d'un autre rang que 0.

Exercice 5 –

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$. Ainsi la propriété est vérifiée au rang 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à deux tel que :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Montrons que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

On sait que :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Par hypothèse de récurrence on sait que $0 \leq u_n \leq 1$. Il est clair que :

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

et on a :

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \geq 0$$

car $n \geq 2$. Ainsi, u_n et $1 - \frac{1}{n^2}$ sont deux nombres compris entre 0 et 1. Par produit, u_{n+1} appartient donc lui aussi à $[0, 1]$.

La propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 6 –

On a :

$$(-3 \times 0 + 5)\, 3^0 = 5 = u_0 \quad \text{et} \quad (-3 \times 1 + 5)\, 3^1 = 2 \times 3 = 6 = u_1$$

L'égalité souhaitée est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = (-3n + 5)\, 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (-3(n+1) + 5)\, 3^{n+1} = (-3n + 2)\, 3^{n+1}$$

Montrons que :

$$u_{n+2} = (-3(n+2) + 5)\, 3^{n+2} = (-3n - 1)\, 3^{n+2}$$

Par définition de u, on sait que :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6\,(-3n + 2)\, 3^{n+1} - 9\,(-3n + 5)\, 3^n \\ &= 2\,(-3n + 2)\, 3^{n+2} - (-3n + 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-6n + 4 + 3n - 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-3n - 1)\, 3^{n+2} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

Par récurrence double, on vient donc de montrer que la propriété de l'énoncé est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 7 –

Raisonnons par contraposée. Soit x un réel non nul.

Montrons l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x^2 > \varepsilon$.

Non$(\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon) = (\exists \varepsilon > 0 \mid x^2 > \varepsilon)$

Posons :

$$\varepsilon = \frac{x^2}{2}$$

Sachant que x est non nul, il est clair que $\varepsilon \in \left]0, x^2\right[$ ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 8 –

On a :

Il est toujours utile de calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence. Cela permet de conjecturer le signe, les variations, l'expression du terme général...

$$u_1 = bu_0^2$$

puis :

$$u_2 = bu_1^2 = b(bu_0^2)^2 = b^3u_0^4$$

et :

$$u_3 = bu_2^2 = b^7u_0^8$$

On conjecture alors :

Attention : $u_0^{2^n}$ n'est pas $(u_0^2)^n$

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1}u_0^{2^n}$$

On montre cette égalité par récurrence. Elle est vraie au rang 0 car :

$$b^{2^0-1}u_0^{2^0} = b^0u_0^1 = u_0$$

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = b^{2^n-1}u_0^{2^n}$$

Montrons que :

$$u_{n+1} = b^{2^{n+1}-1}u_0^{2^{n+1}}$$

Par définition de la suite, on a :

$$u_{n+1} = bu_n^2$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b\left(b^{2^n-1}u_0^{2^n}\right)^2 \\ &= bb^{2(2^n-1)}u_0^{2\times 2^n} \\ &= b^{1+2^{n+1}-2}u_0^{2^{n+1}} \\ &= b^{2^{n+1}-1}u_0^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc par principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

Exercice 9 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction solution du problème posé :

On dit que f est solution d'une équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

On en déduit qu'en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x - f(0)) = 1 - x$$

En remplaçant x par $x + f(0)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x - f(0)$$

Pour $x = 0$, on en déduit que $f(0) = 1 - f(0)$ donc $f(0) = \frac{1}{2}$ et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} - x$$

Synthèse. Vérifions que la fonction f obtenue est bien solution. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x - f(y)) &= f(x - \tfrac{1}{2} + y) \\ &= \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2} + y\right) \\ &= 1 - x - y \end{aligned}$$

La seule solution du problème posé est donc $f : x \mapsto \frac{1}{2} - x$.

Méthode

Le raisonnement par analyse-synthèse est très utile pour des problèmes du type :

- Trouver les fonctions telles que ...
- Trouver les suites telles que ...
- Trouver les couples de réels tels que ...

Dans l'analyse, on considère une solution du problème et en utilisant les données de l'énoncé, on essaie de trouver des conditions sur cette solution. Dans la synthèse, on vérifie si les conditions trouvées suffisent (il peut arriver que non : on peut alors tenter de trouver d'autres conditions et il peut arriver qu'aucune solution n'existe).

Exercice 10 –

1. Vrai. Soit $n \geq 1$ s'écrivant comme le carré d'un entier : $n = k^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que $2n$ est aussi le carré d'un entier : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n = p^2$. On en déduit que $p^2 = 2k^2$ donc par stricte positivité de p et k :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{k}$$

ce qui implique que $\sqrt{2}$ est rationnel ce qui est absurde. Ainsi, $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

2. Faux. Il suffit de trouver un contre-exemple. En étudiant les premières valeurs de n, on remarque que la propriété est fausse pour $n = 7$. En effet, si il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$7 = a^2 + b^2 + c^2$$

alors a, b et c appartiennent nécessairement à $\{0, 1, 2\}$ (sinon, la somme est supérieure ou égale à 9). On vérifie alors facilement qu'aucun triplet n'est solution.

Méthode

Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier $n \geq 0$ est fausse, il suffit de donner un contre-exemple concret.

2 Ensembles et applications

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$	☐ Vrai	☐ Faux
2. $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
3. $A \subset B \iff \exists x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$	☐ Vrai	☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Donner l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 3 –

On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = [0, 2]$, $B = [1, 2]$, $C = [1, 3]$. Donner explicitement les ensembles suivants :

— $A \cup B$.

— $A \cup C$.

— $A \cap C$.

— $\overline{A} \cap C$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = -x$$

1. $f \circ g$ est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si oui, donner son expression.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f \circ g(x) = x$.

Exercice 5 –

Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble telles que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$. Montrer que $A = B$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Soit X une partie d'un ensemble E. On définit la fonction indicatrice de X, $\mathbf{1}_X : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, de la manière suivante :

$$\forall e \in E,\ \mathbf{1}_X(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in X \\ 0 & \text{si } e \notin X \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E. Montrer que :

1. $\mathbf{1}_{\overline{A}} = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A$.
2. $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
3. $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$ ☒ Vrai ☐ Faux
2. $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$ ☒ Vrai ☐ Faux
3. $A \subset B \iff \exists x \in A,\ x \in B$ ☐ Vrai ☒ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$ ☒ Vrai ☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ☒ Vrai ☐ Faux

🎓 Cours

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

— On définit la réunion de A et B, et on note $A \cup B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

— On définit l'intersection de A et B, et on note $A \cap B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$$

— On définit le complémentaire de A dans E, et on note $\overline{A}$, le sous-ensemble de E constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

À retenir

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On a les propriétés suivantes (distributivité) :

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

Exercice 2 –

Notons E cet ensemble. Alors :

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$$

Cours

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est l'ensemble des sous-ensembles de E. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, et l'ensemble E sont des parties de E.

Exercice 3 –

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cup B$ si et seulement si x appartient à A ou x appartient à B. Or B est inclus dans A donc $A \cup B = A = [0, 2]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cup C$ si et seulement si x appartient à A ou x appartient à C. On en déduit que $A \cup C = [0, 3]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cap C$ si et seulement si x appartient à A et x appartient à C. On en déduit que $A \cap C = [1, 2]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $\overline{A} \cap C$ si et seulement si x n'appartient pas à A et x appartient à C donc si et seulement si $x < 0$ ou $x > 2$ et $x \in [1, 3]$. Ainsi, $\overline{A} \cap C =]2, 3]$.

Exercice 4 –

1. On a f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de même pour g donc $f \circ g$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$$

Cours

Soit A, B et C trois ensembles $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle *application composée* de f par g et on note $g \circ f$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f & : & A & \longrightarrow & C \\ & & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Dans le cas de deux fonctions, les ensembles d'arrivées ne sont pas forcément précisés. Pour déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$ dans le cas de deux fonctions f et g définies sur A et B, on détermine les éléments $a \in A$ tels que $f(a) \in B$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f \circ g(x) &= \ln(1 + \mathrm{e}^x) - \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \\ &= \ln(1 + \mathrm{e}^x) - \ln(1 + \tfrac{1}{\mathrm{e}^x}) \\ &= \ln(1 + \mathrm{e}^x) - \ln(\tfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x}) \\ &= \ln(1 + \mathrm{e}^x) - (\ln(\mathrm{e}^x + 1) - \ln(\mathrm{e}^x)) \\ &= \ln(\mathrm{e}^x) \\ &= x \end{aligned}$$

Exercice 5 –

Montrons le raisonnement par double inclusion. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup C$ donc $x \in B \cup C$ par hypothèse. On en déduit que x appartient à B ou à C. Distinguons deux cas :

— Si x appartient à B, c'est ce que l'on voulait montrer.

— Si x appartient à C alors il appartient à $A \cap C$. Or $A \cap C = B \cap C$ donc x appartient à B.

On vient donc de montrer que pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc A est inclus dans B.

Par un raisonnement analogue (on échange les rôles de A et de B), on montre que B est inclus dans A. Ainsi, $A = B$.

Méthode

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A = B$ est équivalent à montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exercice 6 –

1. Soit $x \in E$. Alors $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si et seulement si $x \notin A$ donc si et seulement si $x \in \overline{A}$. Une fonction indicatrice ne prenant que deux valeurs, on a aussi que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si et seulement si $x \notin \overline{A}$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{\overline{A}} = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A$$

2. Soit $x \in E$. Alors x appartient à $A \cap B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_B(x) = 1$ donc (sachant qu'une fonction indicatrice vaut 0 ou 1) si et seulement si $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

3. La partie $A \cup B$ de E est l'union disjointe des éléments de A qui ne sont pas dans B, des éléments de B qui ne sont pas dans A et des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. En se basant sur ceci, posons :

$$f = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

Soit $x \in A \cup B$. Distinguons les trois cas précédents. Si x appartient à A mais pas à B alors :

$$f(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 + 0 - 1 \times 0 = 1$$

De même, si x appartient à B mais pas à A, on obtient $f(x) = 1$. Pour finir, si $x \in A \cap B$:

$$f(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 \times 1 = 1$$

Si $x \notin A \cup B$ alors il est clair que $f(x) = 0$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$$

Exercice 7 –

1. Vrai. Raisonnons par double inclusion. Le fait que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ implique que :

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \text{ et } \mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(B)$$

donc :

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

Montrons l'autre inclusion. Soit $X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Alors X est une partie de A et une partie de B donc X est une partie de $A \cap B$. Ainsi :

$$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cap B)$$

On en déduit que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

2. Faux. Donnons un contre exemple en posant $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$.
On a alors $A \cup B = [0, 3]$. Le segment $[0, 3]$ est donc une partie de $A \cup B$ mais n'est pas une partie de A, ni de B.

3 Injections, surjections, bijections

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) = x^2$$

1. f est injective.	☐ Vrai	☐ Faux
2. f est surjective.	☐ Vrai	☐ Faux
3. f est bijective.	☐ Vrai	☐ Faux
4. g est injective.	☐ Vrai	☐ Faux
5. g est surjective.	☐ Vrai	☐ Faux
6. g est bijective.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \left]e^2, +\infty\right[$ définie par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = e^{2+1/x}$$

1. Montrer que f est une application.
2. Montrer que f est bijective et donner son application réciproque.

Exercice 4 –
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrer que f est bijective.

Pour aller plus loin

Exercice 5 –
Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, f aussi.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g aussi.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Exercice 6 – Le vrai/faux de la fin
Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications bijectives.

1. $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. f est injective. ☐ Vrai ☒ Faux
2. f est surjective. ☐ Vrai ☒ Faux
3. f est bijective. ☐ Vrai ☒ Faux
4. g est injective. ☐ Vrai ☒ Faux
5. g est surjective. ☒ Vrai ☐ Faux
6. g est bijective. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

— On dit que f est *injective* lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f. Montrer que f est injective est équivalent à vérifier :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

— On dit que f est *surjective* lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f c'est-à-dire :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$$

— On dit que f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective ce qui revient à dire que :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$$

Exercice 2 –

Remarquons que $g \circ f : E \to G$ est bien définie.

1. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Par définition, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or g est injective (et $f(x), f(x')$ sont deux éléments de F) donc $f(x) = f(x')$. Or f est injective donc $x = x'$.

On en déduit que $g \circ f$ est injective.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

— Pour montrer que f est injective, on se donne deux éléments quelconques x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.

— Pour montrer que f n'est pas injective, on cherche deux éléments distincts de E ayant la même image par l'application f.

2. Soit $z \in G$. L'application $g : F \to G$ est surjective donc il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Or $f : E \to F$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On en déduit que :

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

On en déduit que $g \circ f$ est surjective.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

— Pour montrer que f est surjective, on fixe un élément de F et on montre qu'il admet un antécédent par f.

— Pour montrer que f n'est pas surjective, on cherche un élément de F n'admettant pas d'antécédent par f.

Exercice 3 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\frac{1}{x}$ existe donc $f(x)$ aussi. De plus, on a :

$$2 + \frac{1}{x} > 2$$

donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$f(x) = \exp\left(2 + \frac{1}{x}\right) > \mathrm{e}^2$$

Ainsi, $f(x)$ appartient à $]\mathrm{e}^2, +\infty[$. On en déduit que f est une application bien définie.

2. Soit $y \in \left]\mathrm{e}^2, +\infty\right[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = y \iff \exp\left(2 + \frac{1}{x}\right) = y \iff 2 + \frac{1}{x} = \ln(y)$$

car $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective. On en déduit que :

$$f(x) = y \iff \frac{1}{x} = \ln(y) - 2$$

Or $y > \mathrm{e}^2$ donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\ln(y) > 2$ donc $\ln(y) - 2 > 0$. Finalement, on a :

$$f(x) = y \iff x = \frac{1}{\ln(y) - 2}$$

D'après le raisonnement suivant, on sait que le réel $\frac{1}{\ln(y)-2}$ est strictement positif. On en déduit que f est bijective et l'application $f^{-1} : \left]\mathrm{e}^2, +\infty\right[\to \mathbb{R}_+^*$ est définie par :

$$\forall y > \mathrm{e}^2,\ f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln(y) - 2}$$

Méthode

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour montrer que f est bijective, on peut suivre la démarche suivante :

- On fixe un élément y de F.
- On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
- On montre qu'il y a une unique solution x (exprimée en fonction de y) sans oublier de vérifier que celle-ci appartient bien à E.

L'application réciproque de f, notée f^{-1}, est l'application définie sur F à valeurs dans E définie de la manière suivante : pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f (autrement dit, c'est l'élément x obtenu précédemment).

Exercice 4 –

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On résout l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

— Si $m > 0$: dans ce cas, si n est pair, $f(n)$ est toujours différent de m car $f(n) \leq 0$. On cherche donc n impair tel que $f(n) = m$, ou encore :

$$\frac{n+1}{2} = m$$

ce qui est équivalent à $n = 2m - 1$. Remarquons que $2m - 1$ est bien un entier naturel car $m \in \mathbb{N}^*$.

— Si $m \leq 0$: dans ce cas, si n est impair, $f(n)$ est toujours différent de m car $f(n) > 0$. On cherche donc n pair tel que $f(n) = m$, ou encore :

$$-\frac{n}{2} = m$$

ce qui est équivalent à $n = -2m$. Remarquons que $-2m$ est bien un entier naturel car $m \leq 0$.

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$ admet une unique solution. On en déduit que f est bijective.

Exercice 5 –

1. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Or $g \circ f$ est injective donc $x = x'$. Ainsi, f est injective.

2. Soit $z \in G$. On sait que $g \circ f$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. On en déduit que :

$$g(f(x)) = z$$

et $f(x) \in F$. Ainsi, g est surjective.

3. D'après la question 1, f est injective donc bijective (car surjective).

On peut alors écrire : La composition d'applications est associative

$$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$$

Ainsi, g est la composée de deux applications injectives donc est injective (exercice 2).

4. D'après la question 2, l'application g est surjective donc bijective (car injective). On peut alors écrire :

$$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$$

Ainsi, f est la composée de deux applications surjectives donc est surjective (exercice 2).

Exercice 6 –

1. $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. ☐ Vrai ☒ Faux

2. $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ☒ Vrai ☐ Faux

4 Inégalités

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big|x-y\big| \leq |x| - \big|y\big|$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. $\lfloor -1,5 \rfloor = -1$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de réels. Prouver que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor \leq \left\lfloor \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor + n - 1$$

Exercice 3 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels tels que :

$$0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leq 1$$

Prouver qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\big|x_i - x_j\big| \leq \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4 –

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leq n\,|\sin(x)|$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leq x^2 + y^2$.
2. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x+y+z)^2 \leq 4x^2 + 4y^2 + 2z^2$.

Exercice 6 –

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-2x^2 + 7x - 5 \geq 0$
2. $|x - 3| + |x + 4| \leq 10$
3. $\sqrt{x - 1} \geq x - 4$

Exercice 7 –

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 1 + x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \dfrac{1}{2x+1} \geq \mathrm{e}^{-(x+1)}$

Exercice 8 –

Soient x et y deux réels strictement positifs. Démontrer que :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. Démontrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
   On pourra remarquer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2a \rfloor$ est égal à $2\lfloor a \rfloor$ ou à $2\lfloor a \rfloor + 1$ puis distinguer les cas selon les valeurs de $\lfloor 2x \rfloor$ et $\lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 10 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que :
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor \in \{\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1\}$$
2. Justifier l'existence d'un unique entier $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que :
$$\lfloor x \rfloor + \frac{i}{n} \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{i+1}{n}$$
puis prouver que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

Soit x et y deux réels.

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y sont positifs. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. ☐ Vrai ☐ Faux
4. Si $x \in \mathbb{R}^+$, $\lfloor x \rfloor$ est le nombre d'entiers appartenant à $[0, x]$. ☐ Vrai ☐ Faux
5. $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. ☐ Vrai ☐ Faux
6. $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

Cours

Pour tout réel x, la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a donc, pour tout entier n :

$$\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1$$

1. Il suffit de prendre $x = 0$ et $y = 1$. ☐ Vrai ☒ Faux
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. ☒ Vrai ☐ Faux
3. Si $x = y = 1,5$ alors $\lfloor x + y \rfloor = 3$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2$. ☐ Vrai ☒ Faux
4. $\lfloor -1,5 \rfloor \neq -1$ car $-2 \leq -1,5 < -1$. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

À retenir

Quand on cherche à établir une relation (égalité ou inégalité) faisant intervenir la fonction partie entière d'un réel x, on utilise le plus souvent la définition, en commençant par encadrer x entre deux entiers consécutifs.

Par définition de la partie entière, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lfloor x_k \rfloor \leq x_k < \lfloor x_k \rfloor + 1$$

donc, en sommant ces inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} x_k < \sum_{k=1}^{n} \left(\lfloor x_k \rfloor + 1 \right)$$

soit encore, en développant la dernière somme, et celle-ci contenant n termes :

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} x_k < \sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor + n$$

d'où, comme les termes encadrant $\sum_{k=1}^{n} x_k$ sont des entiers :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor \leq \left\lfloor \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} \lfloor x_k \rfloor + n - 1}$$

Exercice 3 –

Penser que, si x et y sont deux réels, $|x - y|$ est la distance entre x et y…

On procède par l'absurde.
Supposons que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ i \neq j,\ \left|x_i - x_j\right| > \frac{1}{n}$$

On a alors, en particulier :

$$\forall\, i \in [\![1,n-1]\!]\,,\ \left|x_{i+1} - x_i\right| > \frac{1}{n}$$

soit encore, comme $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$:

$$\forall\, i \in [\![1,n-1]\!]\,,\ x_{i+1} - x_i > \frac{1}{n}$$

En sommant ces n inégalités, on en déduit, par télescopage :

$$x_n - x_0 > 1$$

ce qui est absurde puisque x_0 et x_n appartiennent à $[0,1]$. Il en découle qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\left|x_i - x_j\right| \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 4 –

Cours

Se souvenir que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $|\sin(nx)| \leq n\,|\sin(x)|$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a : $|\sin(0 \times x)| = 0 = 0\,|\sin(x)|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\,x)| &= |\sin(nx + x)| \\ &= |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)| \end{aligned}$$

donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\sin((n+1)\,x)| \leq |\sin(nx)|\,|\cos(x)| + |\cos(nx)|\,|\sin(x)|$$

Or on a :

$$\begin{cases} |\sin(nx)| \geq 0 \\ |\cos(x)| \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} |\sin(x)| \geq 0 \\ |\cos(nx)| \leq 1 \end{cases}$$

donc :

$$|\sin((n+1)\,x)| \leq |\sin(nx)| + |\sin(x)|$$

et alors, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\,x)| &\leq n\,|\sin(x)| + |\sin(x)| \\ &\leq (n+1)\,|\sin(x)| \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

◇ On en déduit finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leq n\,|\sin(x)|$.

Exercice 5 –

Méthode

Ne pas oublier que, pour prouver une inégalité de la forme $a \leq b$, on peut commencer par s'intéresser au signe de la différence $b-a$. Cette méthode s'avère particulièrement utile lorsqu'il est simple de factoriser $b-a$ ou lorsqu'on peut utiliser des identités remarquables pour faire apparaître une somme de termes positifs.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$xy \leq x^2+y^2 \iff x^2 - xy + y^2 \geq 0$$

Or on peut remarquer que $x \mapsto x^2 - xy + y^2$ est une fonction polynôme de degré 2 (y étant fixé), dont on peut étudier le signe grâce aux racines. Son discriminant est $\Delta = -3y^2$, qui est négatif ou nul, donc cette fonction polynôme est de signe constant sur $\mathbb{R}$; comme son coefficient dominant est strictement positif, on a donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - xy + y^2 \geq 0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leq x^2+y^2}$$

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} 4x^2+4y^2+2z^2-(x+y+z)^2 &= 4x^2+4y^2+2z^2-\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\right) \\ &= 3x^2+3y^2+z^2-2xy-2xz-2yz \end{aligned}$$

Les termes carrés ne posent pas de problème (ils sont positifs). On va donc les utiliser pour « neutraliser » les doubles produits. On commence par les termes contenant z, car le coefficient de z^2 est le plus petit.

On a alors :

$$4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - (x + y + z)^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + \frac{z^2}{2} - 2xz + \frac{z^2}{2} - 2yz$$

soit encore :

$$4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - (x + y + z)^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + \frac{z^2}{2} - 2 \times x\sqrt{2} \times \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z^2}{2} - 2 \times y\sqrt{2} \times \frac{z}{\sqrt{2}}$$

donc :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 + 2z^2 - (x + y + z)^2 &= \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - y\sqrt{2}\right)^2 + x^2 + y^2 - 2xy \\ &= \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - y\sqrt{2}\right)^2 + (x - y)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x + y + z)^2 \leq 4x^2 + 4y^2 + 2z^2$$

Exercice 6 –

1. L'équation $-2x^2 + 7x - 5 = 0$ est une équation du second degré admettant pour discriminant $\Delta = 9$, donc elle admet exactement deux solutions réelles, qui sont 1 et $\frac{5}{2}$. Le coefficient dominant du trinôme $-2x^2 + 7x - 5$ est strictement négatif, donc on peut conclure :

$$-2x^2 + 7x - 5 \geq 0 \iff x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$$

Cours

Soit a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c$$

- Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$) et dans ce cas $P(x)$ est du signe de a sur $]-\infty, r_1[$ et $]r_2, +\infty[$, et du signe de $-a$ sur $]r_1, r_2[$.
- Si $b^2 - 4ac \leq 0$, alors $P(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On procède par disjonction de cas, en s'intéressant au signe de $x - 3$ et de $x + 4$.

Pour simplifier la résolution d'une équation ou d'une inéquation faisant intervenir la valeur absolue d'une quantité $f(x)$, il est souvent intéressant de distinguer les cas selon le signe de $f(x)$ pour se ramener à des relations plus simples.

◇ Si x appartient à $[3, +\infty[$, alors $x-3$ et $x+4$ sont positifs ou nuls et :

$$\begin{aligned} |x-3|+|x+4| \leq 10 &\iff (x-3)+(x+4) \leq 10 \\ &\iff 2x+1 \leq 10 \\ &\iff x \leq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

ce qui est vrai si et seulement si $x \in \left[3, \frac{9}{2}\right]$ dans ce cas.

◇ Si x appartient à $[-4, 3[$, alors $x-3$ est négatif ou nul et $x+4$ est positif ou nul, donc :

$$\begin{aligned} |x-3|+|x+4| \leq 10 &\iff (3-x)+(x+4) \leq 10 \\ &\iff 7 \leq 10 \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai.

◇ Si x appartient à $]-\infty, -4[$, alors $x-3$ et $x+4$ sont négatifs ou nuls et :

$$\begin{aligned} |x-3|+|x+4| \leq 10 &\iff -(x-3)-(x+4) \leq 10 \\ &\iff -2x-1 \leq 10 \\ &\iff x \geq -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

ce qui est vrai si et seulement si $x \in \left[-\frac{11}{2}, -4\right]$ dans ce cas.

On peut finalement conclure :

$$|x-3|+|x+4| \leq 10 \iff x \in \left[-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x-1}$ est défini si et seulement si x est un réel supérieur ou égal à 1 et, dans ce cas, $\sqrt{x-1}$ est un réel positif. Les réels appartenant à $[1, 4[$ sont donc tous solutions de l'équation $\sqrt{x-1} \geq x-4$ (car $x-4$ est négatif dans ce cas).

À retenir

Quand on cherche à résoudre une inéquation faisant intervenir une racine carrée, il est souvent intéressant d'élever au carré pour simplifier. Ne pas oublier cependant que cela n'est possible que si les deux termes de l'inégalité sont positifs.

De plus, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, on a alors, les termes étant tous positifs ou nuls :

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \geq x-4 &\iff x-1 \geq (x-4)^2 \\ &\iff x-1 \geq x^2-8x+16 \\ &\iff x^2-9x+17 \leq 0 \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré $X^2 - 9X + 17$ admet pour discriminant $\Delta = 13$, donc il admet deux racines réelles exactement, qui sont :

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{13}}{2}$$

Comme le coefficient dominant de $X^2 - 9X + 17$ est strictement positif, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - 9x + 17$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs, on peut remarquer que $\sqrt{13}$ est strictement supérieur à 1 (faut-il vraiment dire pourquoi ?) donc que x_1 est strictement inférieur à 4, tandis que x_2 est strictement supérieur à 4, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\sqrt{x-1} \geq x - 4 \iff x \in \left[1, \frac{9 + \sqrt{13}}{2}\right[}$$

Exercice 7 –

Méthode

Quand on veut démontrer une inégalité du type « $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ » où f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut étudier les variations de la fonction $g - f$ sur I.
Attention à la précipitation cependant : il est toujours préférable de commencer par simplifier le plus possible l'inégalité à démontrer *avant* d'étudier une fonction, car l'étude en sera d'autant plus rapide.

1. La fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

Ne pas oublier de justifier que la fonction f est dérivable avant de calculer f'.

On en déduit le tableau de variations suivant (les limites étant précisées pour le plaisir, puisqu'elles ne sont pas utiles ici) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 1 + x$

2. • La fonction $\varphi : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont, et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x\,(x+1) - (x+1)^2 + x}{x\,(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x\,(x+1)^2} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

φ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1} \ln(t) = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0$$

Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$$

ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) \geq 0$$

• De même, la fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont, et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi'(x) &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \\ &= -\frac{(x+1) + x^2 - x\,(x+1)}{x^2\,(x+1)} \\ &= -\frac{1}{x^2\,(x+1)} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

ψ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, de même que précédemment, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$$

ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(x) \geq 0$$

On peut finalement conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

3. Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{2x+1} \geq \mathrm{e}^{-(x+1)} \iff 2x+1 \leq \mathrm{e}^{x+1} \qquad (4.1)$$

Penser que la dérivée d'un quotient est souvent plus lourde que le quotient initial ; quitte à étudier une fonction pour démontrer l'inégalité, il est donc préférable de commencer par simplifier pour éviter les fractions

On peut maintenant s'intéresser à la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x+1} - (2x+1)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \mathrm{e}^{x+1} - 2$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x+1 \geq 1$$

donc, comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^{x+1} \geq \mathrm{e} \geq 2$$

On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc que f est croissante sur cet intervalle. Comme $f(0) = \mathrm{e} - 1$, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq \mathrm{e} - 1 \geq 0$$

Finalement, on obtient, avec (4.1) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1}{2x+1} \geq \mathrm{e}^{-(x+1)}$$

Exercice 8 –

Notons tout d'abord que, comme tous les termes de l'inégalité sont positifs et comme la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \iff \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad (4.2)$$

Méthode

Quand on cherche à démontrer une inégalité, on commence déjà par simplifier le plus possible. Par exemple s'il y a une racine carrée et si tous les termes sont positifs, on peut commencer par comparer les carrés.

Nous allons maintenant démontrer séparément chacune des inégalités.

• On a déjà :

Pour montrer que $a \leq b$, il est en général utile de calculer $b-a$ et de chercher à factoriser le plus possible.

$$\begin{aligned} xy - \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} &= \frac{xy\,(x+y)^2 - 4x^2y^2}{(x+y)^2} \\ &= \frac{xy\left[(x+y)^2 - 4xy\right]}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

et d'après les identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$$\begin{aligned} xy - \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} &= \frac{xy\left[x^2 - 2xy + y^2\right]}{(x+y)^2} \\ &= \frac{xy\,(x-y)^2}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

d'où, comme x et y sont positifs :

$$xy - \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \geq 0$$

• De même, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)^2}{4} - xy &= \frac{(x+y)^2 - 4xy}{4} \\ &= \frac{(x-y)^2}{4} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

• On a enfin :

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4} &= \frac{2\left(x^2+y^2\right) - (x+y)^2}{4} \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} \\ &= \frac{(x-y)^2}{4} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc prouvé que :

$$\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

d'où, d'après (4.2) :

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

À retenir

Bien travailler cet exercice, très classique. On reconnaîtra ici, dans l'ordre croissant, les moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique des réels x et y.

Exercice 9 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

donc :

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$$

et donc, de nouveau par définition de la partie entière, comme $\lfloor x \rfloor + n$ et $\lfloor x \rfloor + n + 1$ sont deux entiers consécutifs :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour simplifier, on note : $i = \lfloor x \rfloor$ et $j = \lfloor y \rfloor$. On a donc :

$$i \leq x < i + 1 \quad \text{et} \quad j \leq y < j + 1$$

d'où :

$$2i \leq 2x < 2i + 2 \quad \text{et} \quad 2j \leq 2y < 2j + 2$$

Ainsi $\lfloor 2x \rfloor$ est égal à $2i$ ou à $2i + 1$ et $\lfloor 2y \rfloor$ est égal à $2j$ ou à $2j + 1$.

Méthode

Quand on veut comparer des quantités qui ne peuvent prendre qu'un petit nombre de valeurs, il est souvent pertinent de distinguer les cas pour simplifier le raisonnement.

- Si $2i \leq 2x < 2i + 1$ et $2j \leq 2y < 2j + 1$, alors on a :

$$\begin{cases} i + j \leq x + y < i + j + 1 \\ 2i \leq 2x < 2i + 1 \\ 2j \leq 2y < 2j + 1 \end{cases}$$

donc :

$$\lfloor x + y \rfloor = i + j, \quad \lfloor 2x \rfloor = 2i \quad \text{et} \quad \lfloor 2y \rfloor = 2j$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor &= 2i + 2j \\ &\leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \end{aligned}$$

- Si $2i \leq 2x < 2i + 1$ et $2j + 1 \leq 2y < 2j + 2$, alors :

$$\begin{cases} i + j + \frac{1}{2} \leq x + y < i + j + \frac{3}{2} \\ 2i \leq 2x < 2i + 1 \\ 2j + 1 \leq 2y < 2j + 2 \end{cases}$$

donc :

$$\lfloor x+y\rfloor = i+j+1, \quad \lfloor 2x\rfloor = 2i \quad \text{et} \quad \lfloor 2y\rfloor = 2j+1$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor &= 2i+2j+1\\ &\leq \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor\end{aligned}$$

- Si $2i+1 \leq 2x < 2i+2$ et $2j \leq 2y < 2j+1$, on obtient de même :

$$\begin{aligned}\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor &= 2i+2j+1\\ &\leq \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor\end{aligned}$$

- Si $2i+1 \leq 2x < 2i+2$ et $2j+1 \leq 2y < 2j+2$, on a enfin :

$$\begin{cases} i+j+1 \leq x+y < i+j+2\\ 2i+1 \leq 2x < 2i+2\\ 2j+1 \leq 2y < 2j+2\end{cases}$$

donc :

$$\lfloor x+y\rfloor = i+j+1, \quad \lfloor 2x\rfloor = 2i+1 \quad \text{et} \quad \lfloor 2y\rfloor = 2j+1$$

d'où :

$$\begin{aligned}\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor &= 2i+2j+1\\ &\leq \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on peut désormais conclure :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor \leq \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$$

Exercice 10 –

1. Notons déjà que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lfloor x\rfloor \leq x \leq x + \frac{k}{n} < x+1 < \lfloor x\rfloor + 2$$

donc : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \left\lfloor x + \dfrac{k}{n}\right\rfloor \in \{\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor + 1\}$

2. On peut remarquer que :

Il va donc s'agir dans un premier temps de déterminer les termes de la somme égaux à $\lfloor x\rfloor$ pour pouvoir calculer la somme.

$$\lfloor x\rfloor < \lfloor x\rfloor + \frac{1}{n} < \lfloor x\rfloor + \frac{2}{n} < \cdots < \lfloor x\rfloor + \frac{n}{n} = \lfloor x\rfloor + 1$$

De plus $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $[\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor + 1[$ est la réunion disjointe des intervalles $\left[\lfloor x\rfloor + \frac{i}{n}, \lfloor x\rfloor + \frac{i+1}{n}\right[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, donc il existe un unique entier $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que :

$$\lfloor x\rfloor + \frac{i}{n} \leq x < \lfloor x\rfloor + \frac{i+1}{n} \tag{4.3}$$

et on a alors :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lfloor x \rfloor + \frac{i+k}{n} \leq x + \frac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + \frac{i+k+1}{n}$$

Or on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } \lfloor x \rfloor \leq x + \frac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + 1 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } \lfloor x \rfloor + 1 \leq x + \frac{k}{n} < \lfloor x \rfloor + 2 \end{cases}$$

Il en découle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leq \frac{i+k}{n} < \frac{i+k+1}{n} \leq 1 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } 1 \leq \frac{i+k}{n} < \frac{i+k+1}{n} \leq 2 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leq k \leq n-i-1 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } n-i \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n-i-1} \lfloor x \rfloor + \sum_{k=n-i}^{n-1} (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= (n-i) \lfloor x \rfloor + i (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= n \lfloor x \rfloor + i \end{aligned}$$

Enfin on a, d'après (4.3) :

$$n \lfloor x \rfloor + i \leq nx < n \lfloor x \rfloor + i + 1$$

donc $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor + i$ et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Exercice 11 –

1. Vrai.

Compte tenu de la question, il est raisonnable de penser à appliquer l'inégalité triangulaire avec $x+y$ et $x-y$ pour se faire une opinion.

On sait, d'après l'inégalité triangulaire, que :

$$\begin{aligned} |x+y| + |x-y| &\geq |(x+y) + (x-y)| \\ &\geq 2|x| \end{aligned}$$

mais aussi que :

$$\begin{aligned} |x+y| + |x-y| &\geq |(x+y) - (x-y)| \\ &\geq 2|y| \end{aligned}$$

On en déduit, en sommant ces inégalités :

$$2|x| + 2|y| \leq 2\left[|x+y| + |x-y|\right]$$

2. Faux. Par exemple si $x = y = -2$, on a : $|x+y| = 4 = |x| + |y|$. En fait l'égalité a lieu lorsque x et y sont de même signe, et uniquement dans ce cas :

- Si x et y sont tous deux positifs ou nuls, $x+y$ l'est aussi et l'égalité est immédiate.
- Si x et y sont tous deux négatifs ou nuls, alors $x+y$ aussi et on a :

$$|x+y| = -x - y = |x| + |y|$$

- Si $x > 0$ et $y < 0$, alors on a :

$$-x + y < x + y < x - y$$

donc :

$$\begin{aligned} |x+y| &< x - y \\ &< |x| + |y| \end{aligned}$$

Cours

On retiendra que, dans l'inégalité triangulaire, il y a égalité si et seulement si les réels sont tous de même signe.

3. Faux. Par exemple, si $x = y = \frac{3}{2}$, on a : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2$ et $\lfloor x+y \rfloor = 3$.

4. Faux. Par exemple, si $x = 3$, $\lfloor x \rfloor = 3$ mais il y a 4 entiers dans $[0, 3]$. En revanche, si x est un réel positif non entier, alors $\lfloor x \rfloor$ est bien le nombre d'entiers appartenant à $[0, x]$.

5. Vrai. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} &\iff 2|x||y| \leq x^2 + y^2 \\ &\iff x^2 - 2|x||y| + y^2 \geq 0 \\ &\iff \left(|x| - |y|\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure, cette dernière inégalité étant toujours vraie :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}}$$

6. Vrai. Il suffit de distinguer les cas. Ainsi, si $x \leq y$, on a : $|x-y| = y - x$ et alors :

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+y-x}{2} \\ &= y \\ &= \max(x, y) \end{aligned}$$

On procède de même si $x > y$ et dans les deux cas pour la deuxième égalité.

5 Sommes et produits

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ☐ Vrai ☐ Faux

2. $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^n - 1$ ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \geq 1$. Donner la valeur des sommes suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Retrouver ensuite le résultat plus simplement en remarquant que pour tout entier k, $1 = 1 + k - k$.

Exercice 4 –

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$$

Exercice 5 –

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.

Exercice 6 –

Calculer les sommes doubles suivantes ($n \geq 1$) :

1. $S_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i - j|$.
2. $S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i, j)$.

On pourra utiliser pour cela la formule suivante :

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la dérivée de $x \mapsto 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, déterminer pour tout réel x la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{n} k x^k$$

Exercice 8 –

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire le produit suivant à l'aide de factorielles :

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$$

Exercice 9 –

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et P_n le produit défini par :

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} \left(1 + a^{2^i}\right)$$

1. Calculer P_n dans le cas où $a = 1$.
2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$. Donner une expression simple de $(1 - a)P_n$ puis de P_n en fonction de n et de a.

Pour aller plus loin

Exercice 10 –

Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

Exercice 11 –

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ en utilisant la formule de Pascal.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n \geq 1$.

1. $\sum_{k=1}^{n}(4k-2) = \sum_{k=1}^{n}(n+k)$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ☒ Vrai ☐ Faux

2. $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^n - 1$ ☐ Vrai ☒ Faux

🎓 Cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (hors-programme à savoir retrouver)
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (hors-programme à savoir retrouver)
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Exercice 2 –

🎓 Cours – Formule du binôme de Newton.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$