

Jean-Pierre Escofier

Toute l'algèbre de la Licence

6^e édition

DUNOD

Du même auteur :

Théorie de Galois, 2^e éd., 2020

Toute l'analyse de la Licence, 2020

Exercices d'analyse, 2015

Petite histoire des mathématiques, 2018

© Dunod, 2002, 2006, 2011, 2016, 2020, 2023

11 rue Paul Bert 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-085999-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos

XI

PREMIÈRE ANNÉE

Chapitre 1 • Équations différentielles linéaires

1.1	Sommes et produits de fonctions	3
1.2	Équations différentielles linéaires sans second membre	6
1.3	Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants	6
1.4	Combinaisons linéaires et espace engendré	9
1.5	Solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre	9
1.6	Résultats pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre	10
1.7	Le logiciel <i>Sage</i>	12
	Exercices	13

Chapitre 2 • Suites récurrentes linéaires

2.1	Sommes et produits de suites	17
2.2	Suites satisfaisant une relation de récurrence linéaire	18
2.3	Suites satisfaisant $u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = 0$	19
2.4	Un peu d'histoire	21
2.5	Étude de la suite de Fibonacci	22
	Exercices	23

Chapitre 3 • L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

3.1	Introduction de la géométrie à n dimensions	27
3.2	Famille d'éléments, suites finies, n -uplets	30
3.3	Définition de $\mathbb{R}^n$	31
3.4	Combinaisons linéaires et espace engendré	32
3.5	Base canonique de $\mathbb{R}^n$	34
3.6	Familles triangulaires et échelonnées	35
3.7	La droite vectorielle $\mathbb{R}$	37

Table des matières

3.8	Espaces engendrés dans $\mathbb{R}^2$	38
3.9	Espaces engendrés dans $\mathbb{R}^3$	40
3.10	Algorithme du pivot de Gauss dans $\mathbb{R}^n$	42
	Exercices	46

Chapitre 4 • Systèmes linéaires

4.1	Histoire ancienne	53
4.2	Leibniz, Cramer, Gauss	55
4.3	Systèmes linéaires	56
4.4	Exemples de résolutions	56
4.5	Systèmes équivalents	58
4.6	Systèmes triangulaires et échelonnés	59
4.7	Méthode du pivot de Gauss	60
4.8	Exemples	64
4.9	Systèmes avec paramètres	66
4.10	Problèmes actuels	67
	Exercices	69

Chapitre 5 • Généralités sur les espaces vectoriels

5.1	Introduction	73
5.2	Un peu d'histoire	74
5.3	Structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel	75
5.4	Exemples fondamentaux	77
5.5	Précisions sur les corps	78
5.6	Sous-espaces vectoriels	79
5.7	Exemples de sous-espaces vectoriels	80
5.8	Combinaisons linéaires et espace engendré	81
5.9	Somme de sous-espaces	83
	Exercices	84

Chapitre 6 • Bases et dimension

6.1	Introduction	89
6.2	Famille génératrice	89
6.3	Famille libre	90
6.4	Base d'un espace vectoriel	92
6.5	Dimension	94
6.6	Exemples de bases	96
6.7	Retour au rang	98
	Exercices	99

Chapitre 7 • Applications linéaires

7.1	Naissance du concept	109
7.2	Applications linéaires	110
7.3	Exemples	111
7.4	Propriété universelle	113
7.5	Noyau d'une application linéaire	115
7.6	Image d'une application linéaire	116
7.7	Le théorème du rang ou des dimensions	117
7.8	Résolution d'une équation linéaire	118
7.9	Résolution d'un système linéaire	119
7.10	Isomorphismes	121
	Exercices	123

Chapitre 8 • Matrices

8.1	Matrice d'une application linéaire	131
8.2	Matrices et applications linéaires	134
8.3	Un peu d'histoire	135
8.4	Matrices particulières	137
8.5	Exemples	139
8.6	Matrice de la composée	140
8.7	Propriétés du produit	143
8.8	Calcul de l'inverse d'une matrice	144
8.9	Changement de base	147
8.10	Rang et trace	152
	Exercices	153

Chapitre 9 • Sommes directes, produits, quotients

9.1	Exemples	163
9.2	Décomposition en somme directe	164
9.3	Sommes directes finies	165
9.4	Produit de deux espaces vectoriels	166
9.5	Projecteurs	169
9.6	Espaces vectoriels quotients	170
	Exercices	173

Chapitre 10 • Dualité

10.1	Introduction	177
10.2	Formes linéaires et hyperplans	178
10.3	Base duale	180
10.4	Orthogonal d'un sous-espace	181

Table des matières

10.5 Transposée d'une application linéaire	183
Exercices	185

DEUXIÈME ANNÉE

Chapitre 11 • Groupes

11.1 Introduction	193
11.2 Généralités	194
11.3 Exemples	196
11.4 Sous-groupes	197
11.5 Homomorphismes de groupes	199
11.6 Étude des groupes de permutation	201
11.7 Signature d'une permutation	204
11.8 Groupe linéaire	206
11.9 Centre du groupe linéaire	207
11.10 Générateurs du groupe linéaire	208
Exercices	209

Chapitre 12 • Arithmétique, anneaux

12.1 Introduction	215
12.2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$	215
12.3 Congruence modulo n , définition de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	216
12.4 Addition et multiplication dans $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	218
12.5 Structures d'anneau commutatif unitaire et de corps	219
12.6 Homomorphismes d'anneaux	221
12.7 Utilisations des congruences	222
12.8 Éléments inversibles	223
12.9 Idéal	223
12.10 Sous-groupes, idéaux de $\mathbb{Z}$	224
12.11 Divisibilité, nombres premiers	225
12.12 Pgcd, ppcm, nombres premiers entre eux	226
12.13 Les corps $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$	231
Exercices	232

Chapitre 13 • Polynômes

13.1 Introduction	245
13.2 Polynômes sur un corps K	246
13.3 Degré, division euclidienne	248

13.4	Pgcd de polynômes	250
13.5	Racines d'un polynôme	252
13.6	Dérivation	254
13.7	Éléments irréductibles	257
13.8	La structure de K -algèbre de $K[X]$	258
	Exercices	261

Chapitre 14 • Déterminants

14.1	Introduction historique	267
14.2	Calcul des déterminants : méthode de Bézout	272
14.3	Le caractère alterné	274
14.4	Multilinéarité	276
14.5	Formules et calculs	279
14.6	Déterminant d'un endomorphisme	282
14.7	Déterminant d'une matrice carrée	284
14.8	Retour sur le rang	286
14.9	Déterminant et volume	287
14.10	Déterminant et orientation	289
	Exercices	291

Chapitre 15 • Autour de la diagonalisation

15.1	Introduction	299
15.2	Étude du problème	300
15.3	Définitions	301
15.4	Exemple	302
15.5	Condition suffisante de diagonalisabilité	303
15.6	Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité	304
15.7	Changement de corps de base	308
15.8	Seconde condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité	309
15.9	Triangularisation	311
15.10	Théorème de Hamilton-Cayley	313
15.11	Quelques applications	314
	Exercices	319

Chapitre 16 • Orthogonalité

16.1	Introduction	329
16.2	Orthogonalité dans le plan et l'espace ordinaires	329
16.3	Produit scalaire	332
16.4	Expression du produit scalaire	333
16.5	Norme et angle	336

Table des matières

16.6 Bases orthogonales et orthonormées	339
16.7 Orthogonalité de sous-espaces	342
16.8 Projection orthogonale	344
16.9 Transformations orthogonales	348
16.10 Groupe orthogonal de $\mathbb{R}^2$	351
16.11 Groupe orthogonal de $\mathbb{R}^3$	353
16.12 Endomorphisme adjoint et autoadjoint	356
16.13 Polynômes orthogonaux : exemple des polynômes de Legendre	359
Exercices	367

Chapitre 17 • Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

TROISIÈME ANNÉE

Chapitre 18 • Ouvertures sur les groupes

18.1 Relation d'équivalence sur un ensemble	400
18.2 Notion de sous-groupe distingué	403
18.3 Groupe quotient	406
18.4 Correspondance entre sous-groupes d'un groupe et sous-groupes d'un de ses quotients	409
18.5 Produits de groupes	411
18.6 Groupes monogènes et groupes cycliques	415
18.7 Action d'un groupe sur un ensemble	416
Exercices	421

Chapitre 19 • Ouvertures sur les anneaux commutatifs unitaires

19.1 Sous-anneau, extension de corps	445
19.2 Caractéristique	448
19.3 Quotient d'un anneau par un idéal	449
19.4 Exemples de quotients	450
19.5 Correspondance entre idéaux d'un anneau et idéaux d'un de ses quotients	455
19.6 Produits d'anneaux	456
19.7 Opérations sur les idéaux	458
19.8 Théorème chinois	459
19.9 Éléments inversibles	463
19.10 Divisibilité dans les anneaux intègres	465
19.11 Idéaux premiers et maximaux	468
19.12 Anneaux euclidiens	471

19.13 Anneaux factoriels	472
19.14 Théorème de Fermat pour $n = 3$	476
19.15 Corps des fractions d'un anneau intègre	480
Exercices	484

Chapitre 20 • Ouvertures sur les polynômes

20.1 La A -algèbre $A[X]$	499
20.2 Corps de rupture et de décomposition	502
20.3 Si A factoriel, alors $A[X]$ factoriel	505
20.4 Recherche des facteurs irréductibles d'un polynôme	507
20.5 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$	508
20.6 Méthodes pour prouver l'irréductibilité d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$, de $\mathbb{Q}[X]$	512
20.7 Localisation des racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$	514
20.8 Polynômes à plusieurs indéterminées	518
20.9 Polynômes symétriques	520
20.10 Fractions continues	525
20.11 Géométrie algébrique	535
Exercices	537

Chapitre 21 • Corps finis

21.1 Corps finis : généralités	555
21.2 Existence et unicité des corps finis	558
21.3 Loi de réciprocité quadratique	561
21.4 Deux autres démonstrations de la LRQ	565
21.5 Factorisation dans $\mathbb{Z}[i]$, théorème des deux carrés	568
21.6 Algorithme de Berlekamp	570
Exercices	572

Chapitre 22 • Codes correcteurs et cryptographie

22.1 Les débuts des codes correcteurs	585
22.2 Codes correcteurs	587
22.3 Exemples	588
22.4 Distance de Hamming	589
22.5 Codes linéaires	590
22.6 Codes cycliques	593
22.7 Codes BCH	596
22.8 Histoire de la cryptographie	600
22.9 Logarithme discret	604
22.10 La méthode RSA	605

Table des matières

22.11	Grands nombres premiers	608
22.12	Factorisation	610
22.13	Courbes elliptiques	612
	Exercices	616

Chapitre 23 • Formes bilinéaires symétriques et quadratiques

23.1	Compléments sur le groupe orthogonal d'un espace euclidien	627
23.2	Formes bilinéaires et bilinéaires symétriques	634
23.3	Formes quadratiques	638
23.4	Méthode de Gauss pour la décomposition en carrés	640
23.5	Décomposition d'une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$	643
23.6	Diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques	645
23.7	Orthogonalité	647
23.8	Espaces quadratiques réguliers	648
23.9	Quaternions	652
23.10	Recherches arithmétiques de Lagrange	658
	Exercices	664

Chapitre 24 • Annexes pour le plaisir, avec beaucoup de présent

24.1	Manjul Bhargava (né en 1974)	686
24.2	Groupe des points d'une courbe elliptique	687
24.3	La conjecture <i>abc</i>	692
24.4	Les fonctions <i>L</i> de Dirichlet	695
24.5	Autour de l'hypothèse de Riemann (HR)	701

Bibliographie	711
----------------------	------------

Index	713
--------------	------------

AVANT-PROPOS

L'enseignement des mathématiques et, plus généralement, des matières scientifiques, pose problème à nos sociétés en mutation. Alors que la recherche se développe partout dans le monde, autant fondamentale que pour des applications extraordinairement nombreuses et diversifiées, l'enseignement des bases des mathématiques est déstructuré et appauvri.

Qu'on étudie pour devenir chercheur ou enseignant de mathématiques ou pour se diriger plus tard vers d'autres domaines, l'étude des mathématiques a un sens qui s'est obscurci et qu'il faut sans doute redéfinir.

Ce livre a différents aspects profondément liés qui, je l'espère, contribueront à lutter contre ces dérives. La plus grande partie du livre est consacrée à la présentation des notions d'algèbre linéaire et d'algèbre de base, comme beaucoup d'autres livres actuels, en cherchant à me mettre à la portée des étudiants de *tous* niveaux. Je cherche à en montrer la beauté et l'efficacité et à donner plein de plaisirs à mes lectrices et lecteurs. Je donne des éclairages, mathématiques ou anecdotiques, de divers moments de leur construction au cours du temps. Je donne enfin des applications récentes.

On devrait pouvoir penser aux mathématiques comme on pense, je donne quelques exemples parmi mille, à des tableaux de Rembrandt ou de Nicolas de Stael, des films de Lang ou Mizogushi, des textes de Rimbaud ou Perec, des musiques de Mozart ou Stockhausen, etc. (remplacez ces noms par ceux de vos artistes préférés), et je serais heureux si ce livre pouvait y contribuer.

La première édition de ce livre, en 2002, correspondait à deux années d'études après le baccalauréat. La mise en place d'une harmonisation des études au niveau européen, m'a conduit à ajouté cinq nouveaux chapitres pour couvrir la troisième année de licence, en apportant les modifications et corrections nécessaires aux 17 premiers chapitres. Le choix des thèmes de ces cinq nouveaux chapitres n'a pas été évident, chaque université ayant ses sujets favoris ; j'en ai développé quelques applications et j'ai dû renoncer à bien des idées, faute de place.

Pour avoir commencé à apprendre les mathématiques dans des livres, je peux dire que leur lecture est insuffisante. Je vous invite donc à parcourir autant qu'à lire ce livre, à vous raconter cent fois ce qu'il contient, à en discuter avec d'autres, à le confronter aux cours et exercices qui vous seront proposés (à l'Université pour beaucoup d'entre vous), afin que les mathématiques et les histoires qu'il présente deviennent vôtres, que vous ayez quelques idées générales permettant de voir les choses de plus haut, que vos efforts de mémoire ne portent pas sur des détails.

Ce livre comporte une sorte de petit roman, au chapitre 17, pour raconter la vie d'un des plus grands scientifiques de tous les temps, Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss est à l'origine de bien des idées étudiées ici.

Avant-propos

Dans les précédentes éditions, de nouveaux exercices, un chapitre sur les codes correcteurs d'erreurs et la cryptographie ont été introduits. Dans cette sixième édition, le changement essentiel est l'ajout d'un dernier chapitre donnant quelques aperçus sur de beaux résultats récents et de beaux problèmes non résolus. C'est sans doute une démarche inhabituelle pour un livre d'enseignement, mais elle me semble nécessaire. La recherche mathématique est toujours en plein développement. J'ai choisi des problèmes qui ne me paraissaient pas trop difficiles à appréhender. Je l'ai rédigé pour le plaisir de celles et ceux qui sont intéressés par les recherches actuelles.

J'espère que tout cela vous donnera à toutes et tous envie de poursuivre l'étude des mathématiques. Cette nouvelle édition comporte de nombreuses modifications de détails, afin d'améliorer et corriger le texte, quelques passages ajoutés et d'autres supprimés.

Mes remerciements vont aux éditions Dunod, toujours prêtes à vous écouter, en particulier à Laetitia Jammet, Anne Pompon pour les premières éditions, à Vanessa Beunèche pour la précédente édition et à Agathe Jeandeau pour cette dernière édition, à Ghislaine Gueudet-Chartier, Michel Viallard, Françoise Guimier qui ont relu et critiqué des parties de ce texte, à Michel Saez et Julien Samson, à Annette Houdebine-Paugam qui a tout relu... et tout critiqué, à ceux et celles qui m'ont indiqué par courriel des corrections à apporter au texte, et à tous les Rennais et Rennaises qui m'ont apporté des idées un jour ou l'autre.

À D. C. A. et à N., G., M. et M.,

Jean-Pierre Escofier

Avril 2023

Les figures de ce livre ont été tracées à l'aide du logiciel fig4Tex développé par Yvon Lafranche et Daniel Martin de l'Université de Rennes 1.

Première année

L'algèbre linéaire est présente dans beaucoup de domaines des mathématiques comme la géométrie, l'analyse, l'analyse numérique, les statistiques. Ramener un problème de mathématiques à un problème d'algèbre linéaire (on dit qu'on linéarise le problème) permet souvent de pouvoir conduire des calculs, d'obtenir des solutions approchées, etc.

L'introduction à l'algèbre linéaire est le but du cours d'algèbre de première année. Les quatre premiers chapitres introduisent à l'algèbre linéaire en étudiant des situations où elle intervient. Avec les chapitres 5 à 10, on entre dans la théorie des espaces vectoriels (de dimension finie) et des applications linéaires, ce qui nous confronte à des problèmes nouveaux, qu'on ne peut pressentir en étudiant les exemples des quatre premiers chapitres et pour lesquels un effort d'adaptation à l'abstraction est nécessaire.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1

Le but des quatre premiers chapitres est de présenter des situations où l'algèbre linéaire est utile. Dans les chapitres suivants, on verra comment les notions d'algèbre linéaire permettent de les envisager dans un même cadre.

1.1 SOMMES ET PRODUITS DE FONCTIONS

Définition 1 : notion de fonction, définition originelle. Wilhelm Gottfried von Leibniz (1646-1716) est sans doute le premier à utiliser le mot *fonction*. Jean Bernouilli (1667-1748), qui le suit dans ce choix, précise en 1718 ce qu'il entend par là : « On appelle fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ».

Définition 2 : notion de fonction, définition actuelle. Notre définition actuelle de fonction est plus précise : pour définir une fonction f , on se donne :

- 1) un ensemble A dit ensemble de départ ou source de la fonction ;
- 2) un ensemble B dit ensemble d'arrivée ou but de la fonction ;
- 3) pour chaque élément x de A , un élément de B qu'on note $f(x)$ et qu'on appelle image de x par f .

On peut préciser comment on réalise le 3) : on se donne un sous-ensemble G de l'ensemble produit $A \times B$ qu'on appelle graphe de la fonction, tel que, pour tout x de A , il existe un unique élément y de B tel que $(x, y) \in G$.

Notation. La notation $f: A \rightarrow B$, apparue dans les années 1930, est celle que nous utiliserons pour désigner la fonction f de source A et de but B . Pour ne pas alourdir les notations, on utilisera aussi la notation $x \mapsto f(x)$, par exemple $x \mapsto -2x$, lorsque le contexte indique clairement la source et le but de la fonction.

Différences entre les deux définitions. Les différences entre les conceptions sous-jacentes à ces deux définitions sont multiples. Jean Bernoulli, comme tous les mathématiciens du XVIII^e siècle, ne pense, en fait, pour définir ses « quantités composées », qu'à des formules algébriques comme des quotients de deux polynômes, ou analytiques, comme des sommes infinies (on parle de séries). Ce sont des mathématiciens comme Leonhard Euler (1707-1783) qui écrivent qu'il faut étendre la notion de fonction à des correspondances quelconques, sans préciser ce que cela veut dire exactement : cela « dépend de notre bon plaisir » (Euler a alors en tête de donner les réponses les plus générales possibles à des problèmes de physique). Les mathématiciens du début du XIX^e siècle, comme Joseph Fourier (1768-1830) dans sa théorie de la chaleur publiée en 1822, expliciteront cette idée : une fonction est « une suite de valeurs données, assujetties ou non à une loi commune, et qui répondent à toutes les valeurs de x comprises entre » les extrémités d'un intervalle. On notait alors une fonction par $f(x)$, $\phi(x)$, où x représentait la *variable*.

Autour de 1900. Les mathématiciens de cette époque, à la suite de travaux de Vito Volterra (1860-1940), de Ivar Fredholm (1866-1927), de Maurice Fréchet (1878-1973) commencent à considérer les fonctions comme des objets mathématiques sur lesquels on peut calculer, plus précisément comme des éléments d'un ensemble muni d'une structure. Cela leur permet, par exemple, de définir une fonction, notons-la F , sur l'ensemble E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en associant à

$f \in E$, sa primitive valant 0 pour $x = 0$: $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Comment noter cette nouvelle

fonction ? Si on a noté $f(x)$ comme Fourier, on devrait écrire $F(f(x))$, mais c'est ambigu, puisque $f(x)$ désigne aussi l'élément image de x par f ; si on considère la fonction comme un objet à part entière, c'est la notation f qui est adaptée et son image par la fonction F se note naturellement $F(f)$. On écrira, par exemple :

$F(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$. La nouvelle notation traduit donc un changement de point de vue

des mathématiciens vis à vis des fonctions que nous allons développer dans ce livre.

Remarque : source et but. Soulignons qu'une fonction n'est pas seulement une formule ou un procédé, mais aussi la donnée de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée de la fonction. Ainsi, la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle une fonction différente de la fonction $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ ou de la fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $h(x) = x^2$.

Définition 3 : fonction vide. Ce qui est lié à l'ensemble vide est parfois utile pour éviter d'avoir à distinguer, comme certains livres le font, des cas particuliers. Pour tout ensemble B , l'ensemble $\emptyset \times B$ est encore l'ensemble vide ; on pose $G = \emptyset$. Comme G vérifie la condition 3 de la définition de fonction, G définit une fonction, notée $\emptyset : \emptyset \rightarrow B$ et appelée fonction vide.

La notation $\emptyset$ vient d'une lettre norvégienne et est due à André Weil (1906-1998).

Définition 4 : sommes et produits. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on peut définir leur somme et leur produit. Ce sont de nouvelles fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notées $f + g$ et fg , qui sont définies comme associant à tout x de $\mathbb{R}$ les éléments $f(x) + g(x)$ et $f(x)g(x)$, autrement dit, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Ces définitions se généralisent à des sommes finies et à des produits finis de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Tout ce qui précède se généralise également à des fonctions à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou aux fonctions à valeurs dans un corps K quelconque (pour la définition générale de corps, voir 12.5, définition 2).

Si a est un élément de $\mathbb{R}$, notons $c_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction constante définie par : $c_a(x) = a$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Très naturellement, la somme $f + c_a$ est notée $f + a$ et le produit $c_a f$ est noté af ; ce sont les fonctions définies, pour tout x de $\mathbb{R}$, par $(f + a)(x) = f(x) + a$ et $(af)(x) = ax$. La fonction af est appelée produit de la fonction f par le scalaire a .

Pour ne pas alourdir les notations, la fonction c_a sera donc notée a ; c'est le contexte qui permettra de savoir si a représente le nombre réel a ou la fonction constante $x \mapsto a$.

Si $a = -1$, on pose $af = -f$; pour tout x de $\mathbb{R}$, on a donc $(-f)(x) = -f(x)$. On note $f + (-g) = f - g$, donc on a, pour tout x de $\mathbb{R}$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. On a : $f + (-f) = 0$, 0 représentant ici la fonction c_0 , puisque, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

De même, pour noter un produit de deux fonctions comme $x \mapsto -2xf(x)$, on écrira simplement $-2xf$, sans chercher à donner un nom à la fonction $x \mapsto -2x$ dont la source et le but sont supposés être ceux de f .

Enfin, notons que les mots fonctions et applications sont aujourd'hui synonymes ; l'emploi de l'un ou l'autre est une question d'usage ou de circonstances.

1.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE

En classe de Premières ou Terminales, on rencontre des problèmes où on recherche des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant des relations liant f , ses fonctions dérivée première f' et dérivée seconde f'' (les notations des physiciens ou des mécaniciens sont diverses). Par exemple :

$$f' - 2f = 0 \quad (E_1)$$

ou

$$f'' - 3f' + 2f = 0 \quad (E_2)$$

La première équation est appelée *équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre*, la seconde est appelée *équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre*. Les coefficients sont 1 et -2 dans le premier cas, 1, -3 et 2 dans le second.

On peut aussi rencontrer des équations du type :

$$f' - 2xf = 0$$

où les coefficients sont 1 pour f' et la fonction $x \mapsto -2x$ pour f ; l'équation est encore appelée équation différentielle linéaire du premier ordre, mais elle n'est plus à coefficients constants.

Ces équations sont dites sans second membre ou homogènes pour indiquer que le second membre est nul.

1.3 RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Un peu d'histoire. Les équations différentielles sont apparues en mathématiques dans la seconde moitié du XVII^e siècle, souvent en lien avec des problèmes de physique. En 1697, pour résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre, Jean Bernoulli propose la méthode de variation de la constante (voir un cours d'analyse). C'est alors un des mathématiciens les plus célèbres de l'Europe. C'est lui qui, quelques années plus tard, va conseiller Leonhard Euler, encore très jeune, dans ses premières lectures mathématiques. Le père d'Euler est un ancien condisciple de Jean Bernoulli. Il finit par accepter que son fils ne se tourne pas comme lui vers la théologie, mais vers les mathématiques. Leonhard ne tarde pas à publier ses premiers travaux. En 1726, quand le fils de Jean Bernoulli, Nicolas (1695-1726),

1.3 • Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

qui est membre de l'académie de Saint-Pétersbourg, meurt, c'est Euler qui est appelé à le remplacer. Euler devient rapidement le premier mathématicien de son temps : il s'intéresse à tous les sujets et innove dans tous les domaines ; son œuvre mathématique est la plus considérable jamais écrite : elle comporte une centaine de volumes.



Leonhard Euler (1707-1783)
Benjamin Holl, d'après A. Lorgna, BnF/Gallica

Les idées d'Euler. C'est en 1743 qu'Euler expose, dans un article écrit en latin, comment résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Il prend tout de suite le cas général de l'équation d'ordre n sans second membre :

$$f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_0f = 0$$

où les dérivées successives de f sont notées $f', f'', \dots, f^{(n)}$. Pour faciliter la compréhension, vous pouvez suivre sa méthode sur les équations E_1 et E_2 de 1.2.

Avant de montrer comment trouver des solutions, Euler relève quelques propriétés simples de ces équations qui sont des observations sur les aspects linéaires du problème. D'abord, il remarque que, si on connaît une solution f de l'équation différentielle, alors pour tout réel λ , la fonction λf est aussi solution de l'équation différentielle. En effet, la dérivée k -ième de λf est :

$$(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}.$$

Puis Euler remarque que, si on connaît deux solutions f et g de l'équation différentielle, alors, pour tout λ et tout μ réels, λf et μg sont solutions de l'équation ainsi que $\lambda f + \mu g$. En effet, la dérivée k -ième de $\lambda f + \mu g$ est :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

Euler développe encore cette idée, en expliquant que, si f_1, f_2, f_3 , etc. sont des solutions de l'équation, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \text{etc.}$ est encore une solution de l'équation pour tous réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, etc.

Il reste, bien sûr, à trouver des solutions de l'équation. Euler propose de chercher *a priori* des solutions de la forme $x \mapsto e^{rx}$, où r est un réel, dont les dérivées successives sont $x \mapsto re^{rx}$, $x \mapsto r^2 e^{rx}$, etc.

➤ Pour l'équation E_1 de 1.2, on doit avoir :

$$re^{rx} - 2e^{rx} = 0$$

pour tout x réel, donc $r - 2 = 0$ puisque e^{rx} est non nul. La fonction f définie par $f(x) = e^{2x}$ est solution de (E_1) et, par conséquent, toutes les fonctions de la forme λf avec λ réel sont solutions de (E_1) .

➤ Pour l'équation E_2 de 1.2, on obtient :

$$r^2 e^{rx} - 3re^{rx} + 2e^{rx} = 0$$

pour tout x réel, donc $r^2 - 3r + 2 = 0$. Comme cette équation du second degré a pour racines $r = 1$ et $r = 2$, les fonctions f_1 et f_2 définies par $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = e^{2x}$ sont solutions de l'équation (E_2) et, par conséquent, toutes les fonctions de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ sont solutions de (E_2) . On retrouve les résultats vus en classes de Premières ou Terminales.

Équation caractéristique. Dans le cas général, Euler obtient une équation polynomiale de degré n en r que nous appellerons *équation caractéristique de l'équation différentielle* :

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Si cette équation caractéristique a n racines distinctes $r_1, \dots, r_n$, les fonctions $f_1, \dots, f_n$ définies par $f_1(x) = e^{r_1 x}, \dots, f_n(x) = e^{r_n x}$ sont solutions de l'équation et Euler en conclut que toute fonction de la forme $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$, avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, etc., réels, est solution.

Ensuite, Euler examine les cas où l'équation caractéristique a des racines doubles, triples, ..., ou des racines non réelles, ce que nous ne développerons pas. Cependant, Euler ne pose pas la question de savoir s'il a ainsi obtenu toutes les solutions de ses équations différentielles. C'est le cas, mais cette question ne sera résolue que plus tard.

1.4 COMBINAISONS LINÉAIRES ET ESPACE ENGENDRÉ

Définition : combinaison linéaire. Étant données deux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous appellerons toute fonction de la forme $\lambda f + \mu g$, avec λ et μ réels, combinaison linéaire à coefficients réels de f et g .

De même, étant données n fonctions $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous appellerons toute fonction de la forme $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels, combinaison linéaire à coefficients réels de $f_1, \dots, f_n$.

Notation. L'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels de $f_1, \dots, f_n$ sera noté :

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_n).$$

et appelé espace engendré par les fonctions $f_1, \dots, f_n$.

Dans le cas où $n = 1$, $\text{Vect}(f)$ est simplement l'ensemble des fonctions de la forme λf où λ est un réel.

Dans son étude des équations différentielles linéaires à coefficients constants, Euler a su voir que, si $f_1, \dots, f_n$ sont des solutions de l'équation, alors tout élément de $\text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ est également solution de l'équation.

1.5 SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS SANS SECOND MEMBRE

La forme générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre est

$$f'' + af' + bf = 0 \quad (E)$$

où a et b sont des réels. L'équation caractéristique de cette équation différentielle est :

$$r^2 + ar + b = 0$$

Notons $S(E)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de E . On démontre les résultats suivants.

Proposition.

1) Si $a^2 - 4b > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et, si on définit f_1 et f_2 par $f_1(x) = e^{r_1 x}$, $f_2(x) = e^{r_2 x}$, on a : $S(E) = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

2) Si $a^2 - 4b = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r et, si on définit f_1 et f_2 par $f_1(x) = e^{rx}$, $f_2(x) = xe^{rx}$, on a : $S(E) = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

3) Si $a^2 - 4b < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines imaginaires conjuguées $r_1 = s + it$ et $r_2 = s - it$, où s et t sont réels et, si on définit f_1 et f_2 par $f_1(x) = e^{sx} \cos tx$, $f_2(x) = e^{sx} \sin tx$, on a : $S(E) = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

Démonstration. Une démonstration de cette proposition sera donnée au paragraphe 15.11.3. Dans chacun des trois cas, on montre par un calcul facile que tout élément de $\text{Vect}(f_1, f_2)$ vérifie bien l'équation différentielle E . La difficulté est de montrer qu'il n'y a pas d'autres fonctions solutions que les éléments de $\text{Vect}(f_1, f_2)$. $\square$

Commentaire. La réponse est finalement de la même forme dans les trois cas, ce sont les fonctions f_1 et f_2 qui changent.

On dit souvent que la solution générale de l'équation E est $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Il faut comprendre, par cette expression, que toute fonction de cette forme est solution de E et que toute solution de E est de cette forme ; cela revient exactement à dire que l'ensemble des solutions de E est $\text{Vect}(f_1, f_2)$. Si on cherche une solution de E satisfaisant à des conditions particulières, comme cela arrive dans les problèmes de physique, par exemple, on écrit que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ satisfait ces conditions, ce qui permet de trouver λ_1 et λ_2 .

Peut-on faire mieux ? La présentation de l'ensemble des solutions peut encore susciter une question. Ne pourrait-on pas avoir une présentation encore plus simple, de la forme $\text{Vect}(h)$? Autrement dit, toute solution de l'équation différentielle serait de la forme λh . Ce serait alors le cas de f_1 et de f_2 ; mais $f_1 = \lambda_1 h$ et $f_2 = \lambda_2 h$ impliqueraient, puisque λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls, qu'il existe α non nul tel que $f_1 = \alpha f_2$. Dans chacun des trois cas, c'est impossible (voir exercice 1.2). Par conséquent, on ne peut avoir une description de $S(E)$ de la forme $\text{Vect}(h)$.

1.6 RÉSULTATS POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS AVEC SECOND MEMBRE

Considérons l'équation différentielle :

$$f'' + af' + bf = g \quad (E')$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée (par exemple : $g(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$, etc.).

Cette équation est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

1.6 • Résultats pour les équations différentielles linéaires du second ordre

- Si $g = 0$ (rappelons que 0 fait référence ici à une fonction), nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe 1.5.
- Si $g \neq 0$ (c'est-à-dire s'il existe x tel que $g(x) \neq 0$), la résolution de (E') comporte deux étapes tout à fait distinctes :

1) on résout l'équation différentielle sans second membre :

$$f'' + af' + bf = 0 \quad (E)$$

associée à l'équation E' et on obtient $S(E) = \text{Vect}(f_1, f_2)$ d'après la proposition du paragraphe 1.5 ;

2) on recherche une solution h (une seule suffit) de l'équation E' .

Proposition. *L'ensemble des solutions de E' est :*

$$S(E') = h + \text{Vect}(f_1, f_2) = h + S(E) = \{h + f \mid f \in S(E)\}$$

Commentaire. On peut aussi dire que la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Démonstration. 1) On a $h + S(E) \subset S(E')$ car si $f \in S(E)$, on a :

$$\begin{aligned} (h + f)'' + a(h + f)' + b(h + f) &= h'' + f'' + ah' + af' + bh + bf \\ &= (h'' + ah' + bh) + (f'' + af' + bf) = g, \end{aligned}$$

donc $h + f \in S(E')$.

2) Montrons maintenant que $S(E') \subset h + S(E)$. En effet, si $h_1 \in S(E')$, alors $h_1 - h$ est solution de E puisque :

$$\begin{aligned} (h_1 - h)'' + a(h_1 - h)' + b(h_1 - h) &= h_1'' - h'' + ah_1' - ah' + bh_1 - bh \\ &= (h_1'' + ah_1' + bh_1) - (h'' + ah' + bh) = g - g = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $h_1 - h$ est un élément de $S(E)$, ce qui prouve que $h_1 \in h + S(E)$. $\square$

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, il faut un peu d'expérience. Donnons un exemple.

Si le second membre est de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$, on examine si α est racine de l'équation caractéristique.

- s'il ne l'est pas, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$.
- si α est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x e^{\alpha x}$,
- si α est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x^2 e^{\alpha x}$.

Principe de superposition

Quand la fonction g du second membre de (E') est une somme de deux fonctions : $g = g_1 + g_2$, on peut appliquer ce qu'on appelle le principe de superposition en cherchant des solutions particulières h_1, h_2 de (E') avec les seconds membres g_1, g_2 respectivement. Alors $h = h_1 + h_2$ est une solution particulière de (E') avec le second membre g . Le principe de superposition n'est qu'un vieux nom pour une simple technique de résolution des équations linéaires, nous en reparlerons en 7.8.

1.7. LE LOGICIEL SAGE

C'est en 2005 que le mathématicien William Stein (né en 1974) a la première idée du logiciel *Sage* (acronyme de *System for Arithmetic Geometry Experimentation*), le nom de la sauge en anglais. Il s'agit de créer un logiciel pour pouvoir effectuer toutes sortes de calculs et d'algorithmes des mathématiques. *Sage* est un logiciel libre, un logiciel que vous pouvez utiliser gratuitement, copier, modifier, améliorer, transmettre aux copines et copains, en signaler les bogues.... *Sage* s'appuie sur de nombreux logiciels existant. La communauté des utilisateurs de *Sage* l'enrichit sans cesse.

Sage utilise un langage de programmation sous licence libre : *Python*. Guido van Rossum (né en 1956) en a écrit les premières versions au début des années 1990 et il est toujours resté le principal responsable de ses développements. La NASA, Google et d'autres grands organismes disent utiliser ce langage.

Sage peut traiter aussi bien des problèmes d'analyse que d'algèbre ou de combinatoire. Il peut traiter des problèmes de calcul numérique ou des problèmes de calcul formel. Par exemple, si vous étudiez une équation du troisième degré, *Sage* peut vous donner l'expression des racines avec la formule de Cardan, la ou les racines réelles ou complexes avec l'approximation que vous souhaitez. Si vous faites de l'algèbre linéaire, *Sage* peut résoudre à peu près tous les problèmes que vous rencontrerez dans ce livre, par exemple résoudre les systèmes linéaires du chapitre 4, les problèmes de réduction des matrices du chapitre 15, les problèmes sur les corps finis du chapitre 21.

L'accès à *Sage* est très simple ; vous pouvez vous connecter sur le réseau à un serveur ou le télécharger sur votre ordinateur.

► Vers le chapitre 2

Le but de ce chapitre était de se familiariser avec la linéarité dans les résolutions d'équations différentielles linéaires. Le but du chapitre 2 est de développer la même idée pour les suites récurrentes linéaires.

Exercices

1.1 Fonctions paires et impaires

a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions paires et a un réel. Préciser si les fonctions $-f, fg, f+1, f+g, af$ sont paires. Une fonction quelconque de $\text{Vect}(f, g)$ est-elle paire ?

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions impaires et a un réel. Préciser si les fonctions $-f, fg, f+1, f+g, af$ sont impaires. Une fonction quelconque de $\text{Vect}(f, g)$ est-elle impaire ?

1.2 Peut-on faire mieux ?

Montrer que les fonctions f_1 et f_2 ne sont pas proportionnelles dans les trois cas de la proposition du paragraphe 1.5.

1.3 Changement de fonction

On considère l'équation différentielle $(E) : f'' - 2f' + f = 0$ (E). On n'utilisera pas le résultat de la proposition de 1.5.

- a) Déterminer l'ensemble des fonctions u telles que $x \mapsto u(x)e^x$ soit solution de (E) .
 b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

1.4 Résolutions d'équations

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes.

- a) $f'' - f' - 2f = e^x$ (E_1)
 b) $f'' + f' - 2f = e^x$ (E_2)
 c) $f'' - 4f' + 4f = e^{2x}$ (E_3)
 d) $f''' - 2f'' - f' + 2f = e^x$ (E_4)
 e) $f'' - f' - 2f = e^x + e^{3x}$ (E_5)
 f) $f' - af = b$ (E_6) où a et b sont des réels.

Solutions

1.1 a) La réponse est oui pour toutes les fonctions.

b) On voit que $-f$ est impaire, fg est paire, $f+g, af$ et toutes les fonctions de $\text{Vect}(f, g)$ sont impaires.

Exemple de rédaction détaillée : si f et g sont des fonctions impaires, pour tout x réel, on a :

- $(fg)(-x) = f(-x)g(-x)$ par définition du produit fg ;
- donc $(fg)(-x) = (-f(x))(-g(x))$ car f et g sont impaires ;
- donc $(fg)(-x) = f(x)g(x)$;
- donc $(fg)(-x) = (fg)(x)$ par définition du produit fg ;
- donc fg est une fonction paire.

Étude de $f + 1$ si f est impaire : pour tout x réel, on a : $(f + 1)(-x) = f(-x) + 1 = -f(x) + 1$.

Par conséquent, $f + 1$ sera paire si, pour tout x réel, $f(x) + 1 = -f(x) + 1$, c'est-à-dire si $f = 0$, et $f + 1$ sera impaire si, pour tout x réel, $f(x) + 1 = -(-f(x) + 1) = f(x) - 1$, ce qui est impossible. Donc $f + 1$ n'est ni paire ni impaire pour $f \neq 0$.

1.2 Reprenons les 3 cas de la proposition du paragraphe 1.5.

a) On a $f_1(x) = e^{r_1 x}$ et $f_2(x) = e^{r_2 x}$. S'il existe α réel tel que $f_1 = \alpha f_2$, on a, pour tout x réel : $e^{(r_1 - r_2)x} = \alpha$, ce qui est impossible puisque $r_1 \neq r_2$.

b) On a $f_1(x) = e^{rx}$ et $f_2(x) = x e^{rx}$. S'il existe α réel tel que $f_1 = \alpha f_2$, on a, pour tout x réel : $1 = \alpha x$, ce qui est impossible, pour $x = 0$ par exemple.

c) On a $f_1(x) = e^{sx} \cos tx$ et $f_2(x) = e^{sx} \sin tx$. S'il existe α réel tel que $f_1 = \alpha f_2$, on a, pour tout x réel : $\cos tx = \alpha \sin tx$, ce qui est impossible (pour $x = 0$, par exemple).

1.3 a) En calculant les dérivées première et seconde de $x \mapsto u(x)e^x$, on voit que cette fonction est solution de (E) si et seulement si $u'' = 0$, donc si et seulement si u est de la forme $x \mapsto ax + b$.

b) Soit f une solution quelconque de (E) et définissons la fonction u par $x \mapsto e^{-x} f(x)$ (c'est possible car e^{-x} ne s'annule pas).

On a $f(x) = u(x)e^x$, donc f est de la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est celui donné au cas 2 de la proposition du paragraphe 1.5.

1.4 La démarche est toujours la même : chercher la solution générale de l'équation sans second membre (E_i) et chercher une solution particulière de l'équation avec second membre, notée (E'_i) .

a) L'équation caractéristique de (E_1) admet deux racines distinctes : -1 et 2 , donc $S(E_1) = \text{Vect}(f_1, f_2)$ avec $f_1 : x \mapsto e^{-x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{2x}$.

Le coefficient de l'exposant du second membre est 1 , il n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda e^x$.

On trouve $\lambda = -\frac{1}{2}$.

En posant $h_1 : x \mapsto -\frac{1}{2}e^x$, on trouve $S(E'_1) = h_1 + S(E_1)$.

Autrement dit, $S(E'_1)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}e^x + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x}$ où λ_1 et λ_2 sont réels.

b) L'équation caractéristique de (E_2) admet deux racines distinctes : 1 et -2, donc $S(E_2) = \text{Vect}(f_3, f_4)$ avec $f_3 : x \mapsto e^x$ et $f_4 : x \mapsto e^{-2x}$.

Le coefficient de l'exposant du second membre est ici racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x e^x$.

On trouve $\lambda = -\frac{1}{3}$.

En posant $h_2 : x \mapsto \frac{1}{3}x e^x$, on trouve $S(E'_2) = h_2 + S(E_2)$. Autrement dit, $S(E'_2)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3}x e^x + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-2x}$ où λ_1 et λ_2 sont réels.

c) L'équation caractéristique de (E_3) admet 2 comme racine double, donc $S(E_3) = \text{Vect}(f_2, f_5)$ avec $f_5 : x \mapsto x e^{2x}$.

Le coefficient de l'exposant du second membre est racine double de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x^2 e^{2x}$.

On trouve $\lambda = -\frac{1}{2}$.

En posant $h_3 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$, on trouve $S(E'_3) = h_3 + S(E_3)$. Autrement dit, $S(E'_3)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 e^{2x} + \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 x e^{2x}$ où λ_1 et λ_2 sont réels.

d) L'équation caractéristique de (E_4) admet trois racines distinctes : -1, 1 et 2, donc $S(E_4) = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Le coefficient de l'exposant du second membre est 1, il est racine simple de l'équation caractéristique. En généralisant la méthode pour les équations du second ordre,

on cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x e^x$. On trouve $\lambda = -\frac{1}{2}$.

En posant $h_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x e^x$, on trouve $S(E'_4) = h_4 + S(E_4)$. Autrement dit, $S(E'_4)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}x e^x + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^x + \lambda_3 e^{2x}$ où λ_1 , λ_2 et λ_3 sont réels.

e) On applique le principe de superposition. Le second membre de E'_5 est une somme de deux fonctions et nous allons chercher une solution particulière de E'_5 comme somme de solutions particulières des équations $f'' - f' - 2f = e^x$ et $f''' - f' - 2f = e^{3x}$. Nous connaissons déjà une solution particulière de la première équation : h_1 . On peut chercher une solution particulière de la seconde de la forme $h_5 : x \mapsto \lambda e^{3x}$.

On trouve $\lambda = \frac{1}{4}$.

Donc $S(E'_5) = h_1 + h_5 + S(E_1)$. Autrement dit, $S(E'_5)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}e^{3x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{2x}$ où λ_1 et λ_2 sont réels.

f) L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est $S(E_6) = \text{Vect}(x \mapsto e^{ax})$. Si h est une solution de l'équation avec second membre, on a $S(E'_6) = h + S(E_6)$.

Si $a = 0$, l'équation avec second membre s'écrit $f' = b$ qui a pour solution particulière $x \mapsto bx$ et les solutions de E'_6 sont de la forme $x \mapsto bx + C$ où C est réel (on peut, bien sûr, raisonner directement dans ce cas).

Si $a \neq 0$, l'équation avec second membre s'écrit $f' - af = b$ qui a pour solution particulière la fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ et les solutions de E'_6 sont de la forme $x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est réel.

On peut appliquer dans ce dernier exercice la méthode des exercices précédents : l'équation caractéristique a pour racine a et le second membre est de la forme be^{0x} .

SUITES

RÉCURRENTES

LINÉAIRES

2

2.1 SOMMES ET PRODUITS DE SUITES

Notion de suite. La notion de suite est liée à l'idée d'énumération : une suite a un premier terme u_1 , un second u_2 , etc. La suite peut être finie ou infinie. Souvent, le premier terme de la suite est noté u_0 , le second u_1 , etc., son n -ième terme est alors le terme d'indice $n - 1$: u_{n-1} .

Il est important de savoir que les suites ne sont pas des objets mathématiques nouveaux ; ce sont simplement des fonctions. Par exemple, la suite infinie de nombres réels notée $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Avec la notation des fonctions, son premier terme devrait être noté $u(0)$, son second terme $u(1)$, etc., mais l'usage est de noter ces termes en utilisant des indices : $u_0, u_1, \dots, u_n$, etc., ce qui cache un peu la nature fonctionnelle des suites. Nous utiliserons cependant la notation $n \mapsto u_n$, par exemple : $n \mapsto 2^n + 3 \times (-1)^n - 3$. Le terme u_n est appelé terme général de la suite u .

Si la suite u est finie et possède p termes $u_1, \dots, u_p$, c'est en fait une fonction $u : \{1, \dots, p\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans la suite de ce chapitre, l'ensemble d'indices sera toujours $\mathbb{N}$.

Sommes et produits de suites. Puisque les suites sont des fonctions, on peut en faire la somme et le produit comme on l'a expliqué dans le chapitre 1.

La somme des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc la suite notée $u + v$ dont le terme d'indice n est $(u + v)(n) = u(n) + v(n)$, autrement dit :

$$(u + v)_n = u_n + v_n.$$

Chapitre 2 • Suites récurrentes linéaires

De même, le produit de ces deux suites est la suite notée uv dont le terme d'indice n est $(uv)(n) = u(n)v(n)$, autrement dit :

$$(uv)_n = u_nv_n.$$

Si a est un réel, la suite au est la suite définie par $(au)_n = au_n$, appelée produit de la suite u par le scalaire a .

Par exemple, si u et v sont définies par $u_n = 2n^2 - 3n + 4$ et $v_n = \frac{2n+1}{3}$, on a $(u+v)_4 = u_4 + v_4 = 27$, $(uv)_4 = u_4v_4 = 72$, $(5v)_4 = 5v_4 = 15$.

Une suite de la forme $\lambda_1 u + \lambda_2 v$ avec λ_1, λ_2 réels est appelée combinaison linéaire des deux suites u et v ; son terme général est donc $\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de deux suites u et v se note $\text{Vect}(u, v)$. On peut généraliser cette notion à un nombre quelconque de suites.

Nous étudierons dans ce chapitre les suites définies par des relations de récurrence linéaires.

2.2 SUITES SATISFAISANT UNE RELATION DE RÉCURRENCE LINÉAIRE

On dit qu'une suite satisfait une relation de récurrence linéaire si le terme d'indice n est lié aux termes d'indice inférieur par une relation de la forme

$$u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_k u_{n-k} \quad (R)$$

pour $n \geq k$, où k est un entier > 0 donné et $a_1, \dots, a_k$ des réels fixés.

La relation (R) peut aussi bien être écrite :

$$u_n - a_1 u_{n-1} - \dots - a_k u_{n-k} = 0 \quad (R)$$

ce qui correspond à notre écriture des équations différentielles linéaires du chapitre précédent. Une telle relation sera dite sans second membre. Une relation de récurrence linéaire avec second membre est une équation de la forme

$$u_n - a_1 u_{n-1} - \dots - a_k u_{n-k} = v_n \quad (R')$$

où v est une suite donnée.

L'étude des suites satisfaisant une relation de récurrence linéaire est tout à fait analogue à l'étude des équations différentielles vues au chapitre 1. Copions donc la démarche d'Euler. On peut d'abord remarquer que si s est une suite satisfaisant la relation R , alors, pour tout réel a , la suite as satisfait R . On remarque ensuite que si s et t sont deux suites satisfaisant R , alors, pour tous réels a et b , les suites as , bt et $as + bt$ satisfont R .

2.3 • Suites satisfaisant $u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = 0$

Après avoir fait ces remarques, on peut chercher des suites satisfaisant effectivement R ; on cherche d'abord des suites dont le terme général est de la forme r^n où r est un réel pour $n \geq 1$ et dont le premier terme est 1. Le nombre r doit satisfaire, pour $n \geq k$, l'équation :

$$r^n = a_1 r^{n-1} + \dots + a_k r^{n-k}$$

soit

$$r^k - a_1 r^{k-1} - \dots - a_k = 0$$

Cette équation polynomiale, appelée *équation caractéristique*, a des racines réelles ou complexes et on peut en déduire l'ensemble $S(R)$ des suites satisfaisant R .

Pour préciser une suite de cet ensemble, on se donne souvent les premiers termes de la suite ; ces conditions sont appelées conditions initiales.

2.3 SUITES SATISFAISANT $u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = 0$

Lorsque $k = 2$, la relation R est de la forme :

$$u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = 0 \quad (R)$$

avec a et b réels et l'équation caractéristique devient :

$$r^2 + ar + b = 0$$

(si la relation de récurrence se présente sous la forme $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$, son équation caractéristique est $r^2 - ar - b = 0$).

Comme pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, on distingue trois cas.

Proposition

- 1) Si $a^2 - 4b > 0$, l'équation caractéristique de R admet deux solutions réelles r_1 et r_2 distinctes et, si on définit les suites s et t par $s_n = r_1^n$, $t_n = r_2^n$, on a : $S(R) = \text{Vect}(s, t)$. Si $r_1 = 0$, on définit s par $s_n = 0$ pour tout n à l'exception de $s_0 = 1$.
- 2) Si $a^2 - 4b = 0$, l'équation caractéristique de R admet une racine double r . Si r est non nul, on définit s et t par $s_n = r^n$, $t_n = nr^n$ et on a $S(R) = \text{Vect}(s, t)$. Si r est nul, on définit les suites s et t par $s_n = t_n = 0$ pour tout n à l'exception de $s_0 = t_1 = 1$.
- 3) Si $a^2 - 4b < 0$, l'équation caractéristique de R admet deux solutions imaginaires conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ où ρ est réel positif et θ est réel et, si on définit s et t par $s_n = \rho^n \cos n\theta$, $t_n = \rho^n \sin n\theta$, on a : $S(R) = \text{Vect}(s, t)$.

Commentaire. Comme au chapitre 1 pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, la réponse a la même forme dans les trois cas, ce sont les suites s et t qui changent.

Démonstration. Faisons la démonstration dans le cas où l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 .

Comme $r_1^2 + ar_1 + b = 0$, on a $r_1^n + ar_1^{n-1} + br_1^{n-2} = 0$, ce qui prouve que la suite s est dans $S(R)$. De même, la suite t est dans $S(R)$. On en déduit que toute combinaison linéaire des suites s et t est dans $S(R)$, autrement dit $\text{Vect}(s, t) \subset S(R)$.

Pour montrer $S(R) \subset \text{Vect}(s, t)$, il faut montrer que tout élément u de $S(R)$ est combinaison linéaire de s et t , autrement dit, montrer qu'il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$\lambda_1 s + \lambda_2 t = u.$$

Cette égalité impose, pour les indices 0 et 1 :

$$\lambda_1 s_0 + \lambda_2 t_0 = u_0$$

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 t_1 = u_1$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 + \lambda_2 = u_0$$

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = u_1,$$

ce qui donne, puisque r_1 et r_2 sont distincts, des valeurs de λ_1 et de λ_2 faciles à calculer.

Nous allons vérifier par récurrence que ces valeurs de λ_1 et de λ_2 conviennent pour tous les termes de la suite, c'est-à-dire que $u_n = \lambda_1 s_n + \lambda_2 t_n$ pour tout entier n . Nous venons de choisir λ_1 et λ_2 de façon que l'égalité soit vraie pour les indices 0 et 1. Supposons que :

$$\lambda_1 s_k + \lambda_2 t_k = u_k$$

soit vraie pour tout entier $k \leq n$ avec $n \geq 1$. Pour l'entier $n + 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -au_n - bu_{n-1} \\ &= -a(\lambda_1 s_n + \lambda_2 t_n) - b(\lambda_1 s_{n-1} + \lambda_2 t_{n-1}) \\ &= -a(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n) - b(\lambda_1 r_1^{n-1} + \lambda_2 r_2^{n-1}) \\ &= \lambda_1 r_1^{n-1}(-ar_1 - b) + \lambda_2 r_2^{n-1}(-ar_2 - b) \\ &= \lambda_1 r_1^{n+1} + \lambda_2 r_2^{n+1} \\ &= \lambda_1 s_{n+1} + \lambda_2 t_{n+1} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que $u = \lambda_1 s + \lambda_2 t$, d'où $S(R) = \text{Vect}(s, t)$.

Nous laissons les deux autres cas aux lectrices et lecteurs. □

Relations avec second membre. Pour compléter l'analogie entre les équations différentielles linéaires à coefficients constants et les suites définies par une relation de récurrence linéaire, traitons le cas particulier des suites satisfaisant, pour $n \geq 2$, la relation de récurrence :

$$u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = v_n \quad (R')$$

où (v_n) est une suite donnée. Si on connaît une suite $w = (w_n)$ satisfaisant R' , on a $S(R') = w + S(R)$. Autrement dit, la solution générale de (R') est la somme d'une solution particulière de (R') et de la solution générale de (R) . La démonstration suit pas à pas celle donnée au paragraphe 1.6 pour les équations différentielles.

Quand la fonction v du second membre de (R') est une somme de deux suites : $v = v_1 + v_2$, on peut utiliser le principe de superposition présenté en 1.6 et chercher des solutions particulières w_1, w_2 de (E') avec les seconds membres v_1, v_2 respectivement. Alors $w = w_1 + w_2$ est une solution particulière de (R') avec le second membre v .

2.4 UN PEU D'HISTOIRE

Un cas particulier de suite satisfaisant une relation de la forme ci-dessus est très connu. C'est celui de la suite de Léonard de Pise (Leonardo Pisano, vers 1170-1250) que nous appelons *suite de Fibonacci*, définie par la relation de récurrence :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

avec $F_0 = F_1 = 1$. Pour décrire cette suite, Léonard de Pise avait imaginé des couples de lapins : chaque couple produit régulièrement tous les mois un couple de petits lapins capables, deux mois après et les mois suivants, d'engendrer à leur tour des couples de petits lapins, etc. Le premier jour, Léonard imagine un couple de lapins. Un mois plus tard, un couple naît et il y aura en tout deux couples de lapins ; un mois plus tard, le couple d'origine produira un nouveau couple mais le jeune couple ne produira encore rien : il y aura donc trois couples de lapins, ... La relation de récurrence est bien celle que nous venons d'indiquer. Léonard de Pise arrête son calcul au bout d'un an. Si on veut conserver le modèle pour la suite infinie, il faut supposer les lapins immortels... et infatigables¹.

1. Notons qu'Acharya Hemachandra (1087-1172), qui vivait au Gudjerat, avait obtenu cette suite en comptant les cadences de longueur n dans la poésie sanscrite : elles s'obtiennent à partir des cadences de longueur $n - 1$ en ajoutant une syllabe courte ou des cadences de longueur $n - 2$ en ajoutant une syllabe longue.

À cette époque, il y a très peu de mathématiciens en Europe. La chance de Léonard est d'accompagner son père, représentant des marchands pisans, à Bougie (Bejaïa) en Algérie. Il peut ainsi entrer en contact avec les mathématiques du monde arabe qui sont alors extrêmement brillantes. De retour en Italie, il écrit plusieurs traités dans lesquels il expose les méthodes et les résultats qu'il vient d'apprendre ou de développer.

Contrairement à ce que j'ai affirmé, après d'autres, dans les précédentes éditions, le nom de Fibonacci n'a pas été inventé par le « mathématicien-escroc », Guillaume Libri (1803-1869) dans son grand traité d'histoire des mathématiques italiennes (1838-1841). On trouve mention de ce nom bien avant Libri. Je peux tout de même raconter que Guillaume Libri, fort de son prestige d'académicien français, avait été chargé de s'occuper des fonds des bibliothèques de France. Il en profita pour y voler durant plusieurs années un nombre considérable de livres anciens rares et de manuscrits qu'il vendit en Angleterre pour l'équivalent de 1 500 000 euros environ. Il dû s'enfuir en 1848. Une partie seulement des documents volés ont pu être restitués, certains très récemment.

2.5 ÉTUDE DE LA SUITE DE FIBONACCI

La suite de Fibonacci $F = (F_n)$ est définie, pour $n \geq 2$, par la relation de récurrence :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

et par ses premiers termes $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$.

On cherche d'abord l'ensemble E des suites u vérifiant la relation de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

ce qui donne $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ donc, si on définit les suites $s = (r_1^n)$ et $t = (r_2^n)$, on a :

$$E = \text{Vect}(s, t)$$

La suite $as + bt$, a et b réels, de E dont les deux premiers termes sont égaux à 1 vérifie :

$$a + b = 1$$

$$ar_1 + br_2 = 1$$

On trouve :

$$a = \frac{r_1}{\sqrt{5}}$$

$$b = -\frac{r_2}{\sqrt{5}}$$

d'où, pour tout $n \geq 0$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^{n+1} - r_2^{n+1})$$

On peut s'étonner de cette expression pour une suite de nombres entiers, mais on peut vérifier avec la formule du binôme que les termes en $\sqrt{5}$ s'éliminent.

Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé nombre d'or et souvent noté φ ; il est irrationnel et son développement décimal commence par 1,618. On trouve parfois des textes donnant à ce nombre une importance absurde dans l'architecture de monuments anciens ou dans la structure des tableaux. Certains croient le reconnaître en faisant suffisamment de tracés et en obtenant des nombres plus ou moins proches. Il s'agit là d'élucubrations relativement récentes, remontant aux années 1830-1930 (voir, par exemple, le livre de M. Neveux et H.E. Huntley : *Le nombre d'or*, Seuil). Parmi d'autres bêtises, l'égalité : $(1 + \varphi) \times 12 = 10\pi$; vérifiez-le !

➤ Vers le chapitre 3

Dans ces deux chapitres, nous avons vu que l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires ou des relations de récurrence linéaires sans second membre s'exprime comme l'ensemble des combinaisons linéaires de certaines solutions de ces problèmes. Nous allons retrouver le même type de résultats pour la résolution des systèmes linéaires, ce qui va nous conduire à présenter au chapitre 5 la notion d'espace vectoriel, notion qui permet d'unifier les points de vue. Mais d'abord, nous allons étudier les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$.

Exercices

2.1 Relation de récurrence linéaire avec second membre

Donner une démonstration du résultat sur les relations avec second membre $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} + v_n$ présenté à la fin du paragraphe 2.3.

2.2 Résolution de relations de récurrence linéaire

Déterminer l'ensemble des solutions des relations de récurrence suivantes (on pourra s'inspirer du chapitre 1 pour trouver des solutions particulières).

- a) $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3$ (R'_1)
- b) $u_n = -u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3$ (R'_2)
- c) $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + 2^n$ (R'_3)
- d) $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3} + 1$ (R'_4)
- e) $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3 + 3^n$ (R'_5)
- f) $u_n = au_{n-1} + b$ (R'_6) avec a, b réels.

2.3 Déterminer l'ensemble des solutions de la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + v_n$$

dans les cas suivants :

- a) $v = a$ avec a réel ;
- b) $v_n = n$;
- c) $v_n = r^n$ (discuter suivant les valeurs de r).

2.4 Équation fonctionnelle

On cherche l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)) \quad (R).$$

- a) Vérifier que, si f et g sont deux fonctions de E , leur somme est une fonction de E et que, si λ est un nombre réel, alors λf est une fonction de E .
- b) Soit $f \in E$. Déterminer $f(0)$, puis montrer que f est paire.
- c) Déterminer $f(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n , puis $f((p/q)x)$ pour tout rationnel p/q .
- d) Conclure.

Solutions

2.1 Montrons d'abord que $w + S(R) \subset S(R')$. En effet, si $u \in S(R)$, on a :

$$\begin{aligned} (w+u)_n &= w_n + u_n = aw_{n-1} + bw_{n-2} + v_n + au_{n-1} + bu_{n-2} \\ &= a(w+u)_{n-1} + b(w+u)_{n-2} + v_n. \end{aligned}$$