Um primeiro curso direto de Calculo diferencial e integral

Emerson de Castro Junior

Julho, 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Castro Junior, Emerson de
Um primeiro curso direto de calculo diferencial e integral [livro eletrônico] / Emerson de Castro Junior. -- 1. ed. -- Guarulhos, SP : Ed. do Autor, 2023.
PDF

Bibliografia.
ISBN 978-65-00-86946-0

1. Cálculo diferencial 2. Cálculo integral 3. Matemática - Estudo e ensino I. Título.

23-181792 CDD-515.3307

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo diferencial : Matemática : Estudo e ensino 515.3307

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Conteúdo

1 Conjuntos, Pré-Cálculo **5**
- 1.1 Conjuntos numéricos . . . 5
- 1.2 Operações com conjuntos . . . 8
- 1.3 Conjuntos importantes e começo de funções . . . 10
- 1.4 Exercícios propostos . . . 13

2 Funções elementares, Pré-calculo **15**
- 2.1 Função polinomial . . . 15
- 2.2 Função afim . . . 19
- 2.3 Função quadrática . . . 21
- 2.4 De volta a polinomial . . . 24
- 2.5 Função modular . . . 28
- 2.6 Função raiz/Função radical . . . 31
- 2.7 Funções trigonométricas: Seno e cosseno . . . 34
- 2.8 Funções trigonométricas: Tangente . . . 39
- 2.9 Demais funções trigonométricas e identidades . . . 42
- 2.10 Exercícios . . . 45

3 Limites **47**
- 3.1 Propriedades gerais e fundamentais de limites . . . 47
- 3.2 Limites no infinito e aritmética do infinito . . . 55
- 3.3 Limite fundamental da exponencial . . . 59
- 3.4 Limite fundamental do seno . . . 63
- 3.5 Exercícios . . . 66

4 Derivadas **67**
- 4.1 Definição, derivada polinomial e linearidade . . . 67
- 4.2 Reta tangente e derivada exponencial . . . 70
- 4.3 Regra do produto e trigonométricas . . . 72
- 4.4 Derivada logarítmica e regra do quociente . . . 76
- 4.5 Regra da cadeia . . . 79
- 4.6 Outros resultados importantes . . . 83
- 4.7 Exercícios . . . 89

5 Primitivação **90**
- 5.1 Propriedades gerais da primitiva . . . 90
- 5.2 Técnica de primitivação: Por partes . . . 94
- 5.3 Técnica de primitivação: Por substituição . . . 96
- 5.4 Técnica de primitivação: Substituição trigonométrica . . . 98
- 5.5 Técnicas de primitivação: Frações parciais . . . 101
- 5.6 Exercícios . . . 103

6 Integral de Riemann **104**
6.1 Definição e interpretação 104
6.2 Propriedades gerais da integral de Riemann 108
6.3 Teoremas fundamentais do cálculo 110
6.4 Algumas aplicações da teoria 113
6.5 Exercícios 118

7 Considerações finais **120**

8 Apêndice 1: Tabela de derivadas e integrais **122**

9 Apêndice 2: Exemplos de provas para praticar **124**
9.1 Prova, Modelo A 125
9.2 Prova, Modelo B 126
9.3 Prova, Modelo C 127

Prefácio

Este livro surgiu com a premissa de agilizar a vida do aluno de exatas, sendo material oficial do curso de "Cálculo diferencial e integral I"disponibilizado na Udemy também de minha autoria.

De forma alguma este material substitui quaisquer das referências acadêmicas principais acerca do tópico. Pelo contrário, a recomendação é que o aluno também consulte referências como *Um curso de cálculo, Vol.1, Guidorizzi*, também *Cálculo: Volume 1, Stewart* e mesmo outros mais avançados como *Curso de análise, Volume 1, Elon*.

O intuito principal é ter, neste livro, uma compactação dos objetos principais de estudo, simplificando e agilizando, direto ao ponto. Claro que o custo disso é deixar de demonstrar algumas propriedades, a custo de sanar outras e ser objetivo, reduzir um livro de 500 páginas, como normalmente seria qualquer um de matemática superior, em menos de duas centenas de páginas.

Agradecimentos

Deixo aqui meus agradecimentos a meus pais e meus avós, que me ampararam durante o longo processo e jornada até concluir minha formação na USP, bem como a meu orientador na época, Ricardo Bianconi, que me inspirou ainda mais a apreciar os mistérios e conceitos contra intuitivos da matemática.

1 Conjuntos, Pré-Cálculo

Nesta seção veremos os conceitos que deveriam ser normalmente vistos no ensino médio mas que quase nunca de fato o são. Todavia, mesmo para aqueles que tiveram um ensino médio de acordo com as normas esperadas, ao revisar tais conceitos no pré-cálculo, temos uma visão um pouco mais madura e formal sobre tais conceitos, agregando mais. Vamos lá!

1.1 Conjuntos numéricos

Partimos de uma idéia axiomática, conjunto é como uma sacolinha que caracterizamos pelo que ela tem dentro. Isto é:

Axioma 1.1. Dizemos que A é conjunto se A é caracterizado por seus elementos e somente por seus elementos. Se x é elemento de A (isto é, "se x está dentro da sacolinha A"), escrevemos $x \in A$, a notação de "x pertence a A". Se x não for elemento de A, então escrevemos $x \notin A$. Denotamos conjuntos simples por chaves na forma $\{...\}$.

Com o axioma acima podemos ja descrever conjuntos como $\{3, 4, 5\}$ e checar que $4 \in \{4, 5, 6\}$ mas que $3 \notin \{4, 5, 6\}$.

Precisamos de mais um axioma para garantir quando dois conjuntos são iguais.

Axioma 1.2. Se A, B são ambos conjuntos, dizemos que $A = B$ somente se partilham os mesmos elementos. Isto é, todo elemento de A é também elemento de B e vice versa.

Lembremos que estamos iniciando de maneira intuitiva a axiomatização necessária. Em matematiquês, teriamos:

$$(\forall A)(\forall B)[\ \ A = B \iff (\ (\forall a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\forall b \in B \Rightarrow b \in A)\ )\ \ ]$$

Onde o símbolo $\forall$ significa "qualquer"ou "quaisquer", o simbolo $\Rightarrow$ é a implicação lógica, significa "se isto ocorre, então aquilo ocorre", e o símbolo $\iff$ é a equivalência, significa que uma coisa é equivalente a outra. Mas veremos isso mais à frente.

Com o proposto até então, sabemos checar se os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 2, 1\}$ são iguais (perceba que ambos possuem os mesmos exatos elementos, só mudamos a ordem exposta, sendo que no axioma está especificado somente a importância de possuir os elementos, não a ordem).

Até aqui usamos muito "axiomas"e não definições. Isto ocorre porque no começo não temos muito o que usar para criar novas coisas. Definições são criadas a partir de objetos que já existem. Axiomas são necessários quando precisamos de um ponto de partida, o "big bang"da teoria. Vamos às primeiras definições:

Definição 1.3. O conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ é chamado de **conjunto dos números naturais** e é denotado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Um elemento deste conjunto é chamado de **número natural**, ou simplesmente **natural**.

Definição 1.4. O conjunto $\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ é chamado de **conjunto dos números inteiros** e é denotado pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Um elemento deste conjunto é chamado de **número inteiro**, ou simplesmente **inteiro**.

Definição 1.5. O conjunto $\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{N}, \quad b \neq 0\}$ é chamado de **conjunto dos números racionais** e é denotado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Um elemento deste conjunto é chamado de **número racional**, ou simplesmente **racional**.

Note que os dois primeiros conjuntos numéricos fundamentais tem uma maneira mais simplista de ser exibido, enquanto o terceiro já não. Note também que todos são infinitos, isto é, a quantidade de elementos nunca acaba.

O curioso sobre os racionais é que com ele temos os famosos "números quebrados"que são, na verdade, números com casas decimais não nulas, porém, que são frutos de uma "divisão". Lembrando que frações são divisões, então o racional $\frac{5}{2}$ é encontrado fazendo a divisão $5 : 2 = 2,5$. Mesmo quando há expansão infinita, como no caso $\frac{5}{3} = 1,66666666...$, há uma regularidade, chamada de **dízima periódica**. Há algumas mais sofisticadas, quanto maior for o denominador, maior a chance de a dizima ser díficil de ser notada, por exemplo: $\frac{13}{7} = 1,857142857142857142...$, percebe que são 6 digitos que estão se repetindo. A reticências "..."indica isso, quando está no fim de uma sentença: Que ela se perpetua indefinidamente.

Precisamos da estrela do show, vamos definí-la:

Definição 1.6. Chamamos de **conjunto dos números reais** e denotamos por $\mathbb{R}$ o conjunto que completa as lacunas do conjunto $\mathbb{Q}$ a fim de oficialmente ser análogo a uma reta.

Perceba que neste último não usamos linguagem matemática. Isso se deve ao fato de a maneira de definir, oficialmente, o conjunto $\mathbb{R}$ ser muito mais complicado e foco de outra disciplina.

Quando dizemos lacunas de $\mathbb{Q}$ nos tratamos de fatos como $\sqrt{2}$ não ser um número fruto de uma divisão entre inteiros, logo não é uma fração. Há também o número $\pi \simeq 3,1415...$ que tampouco é uma fração. Se falássemos somente de $\mathbb{Q}$ teríamos "buracos"em algumas operações, onde teríamos números desconhecidos e, portanto, inválidos (como seria o caso de falar do objeto $\frac{1}{0}$ que não é um número real nem racional, por não estar bem definido).

1.2 Operações com conjuntos

Precisamos de mais alguns axiomas quando falamos de conjuntos. Assim ampliamos o que podemos expressar:

Axioma 1.7. Se A, B são ambos conjuntos, chamamos de **a união de A com B** o conjunto descrito pelos elementos de que são pelo menos de um dos dois conjuntos, A ou B. Denotamos a união por $A \cup B$.

Axioma 1.8. Se A, B são ambos conjuntos, chamamos de **a interseção de A com B** o conjunto descrito pelos elementos de que são de ambos conjuntos, A e B. Denotamos a interseção por $A \cap B$.

A união é muito usada para descrever conjuntos que, em sua verbalização, tem a palavra "ou". Por exemplo: "Quero um conjunto composto de números reais que são negativos ou positivos pares", seria descrito por $\{..., -4, -3, -2, -1\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$. Antes que você pergunte, sim, o zero é um número par!

Já a interseção é usada quando você precisa descrever um conjunto que satisfaz várias condições, ele precisa ser isso "e" aquilo. Por exemplo: "Preciso de um número real positivo que seja par e ímpar ao mesmo tempo", ficaria como $\{0, 2, 4, 6, 8, ...\} \cap \{1, 3, 5, 7, ...\}$. Este último nos trouxe algo legal que precisamos estabelecer.

Axioma 1.9. Chamamos de **vazio** o conjunto que não possui elementos, isto é, "uma sacola vazia", e denotamos por $\varnothing$ ou por $\{\ \}$.

Vejamos agora um primeiro exemplo do que seria uma demonstração de uma propriedade, teorema ou proposição. Faremos pouco isto nessa disciplina para não tomar tempo demais e desviar do foco que é saber aplicar os teoremas.

Proposição 1.10. Existe um único conjunto vazio.

Demonstração. Vamos supor que possa existir um outro conjunto que também não tem nada dentro, sem elementos, vou chamar este outro vazio de V. Vamos voltar lá ao que caracteriza quando dois conjuntos são iguais. O vazio $\varnothing$ é igual ao vazio V se e somente se partilharem os mesmos elementos. Isto é verdade? Vejamos, se for mentira, então existe algum elemento em algum deles que não é partilhado... mas ambos são vazios! Partilham a mesma quantidade

de elementos, nenhuma! Como não existe nenhum elemento, "nada dentro da sacolinha"que faça serem diferentes, são portanto iguais. Assim, qualquer outro vazio é o mesmo que o vazio $\varnothing$. □

O exemplo acima materializa um pouco da estrutura raiz da matemática. Quase todas as propriedades são sempre fruto de uma trabalhosa demonstração. Porém, em cursos iniciais o imperativo é avançar o mais rápido possível rumo às contas.

Vamos deixar algumas propriedades extra acerca de conjuntos que não demonstraremos aqui, a fim de agilizar este início:

Proposição 1.11. Se A, B, C são todos conjuntos, então vale as igualdades entre conjuntos:

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iv) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Uma maneira de decorar estes casos é lembrar de distributivas como: $2 \cdot (3x + 4) = 2 \cdot 3x + 2 \cdot 4$, onde a operação de $+$ é a união, e a operação de vezes é a interseção. Os itens (iii) e (iv) são somente referentes que em varias uniões ou várias interseções a ordem não importa.

A seguir, uma última operação que envolve conjuntos que também é importante:

Definição 1.12. Se A, B são ambos conjuntos, dizemos que o **complementar** de B em relação a A é dado pelo conjunto constituído dos elementos de A que não estão em B. A notação para o complementar é $A \backslash B$ ou ainda $A - B$. Como neste curso o maior conjunto com o qual trabalharemos é o dos reais, quando dizemos simplesmente complementar de C, estamos nos referindo a $\mathbb{R} \backslash C$, denotamos por C^c, o c em cima é de "complementar".

A definição acima serve para declararmos quando queremos elementos de "fora"da sacola. Tudo o que não está na sacola. Um exemplo é: $\mathbb{Z} \backslash \{-1, -2, -3, -4, -5, .$ $\mathbb{N}$. Se você tirar os negativos do conjunto dos inteiros, resta somente os naturais! O complementar é basicamente isso: Um conjunto, tirando os elementos do outro.

1.3 Conjuntos importantes e começo de funções

Temos já um dos astros da disciplina de cálculo, que é o conjunto dos números reais. Agora precisamos declarar a outra ferramenta de muita importância também: funções.

Definição 1.13. Sejam A, B dois conjuntos não vazios. Dizemos que uma relação entre os elementos dos conjuntos A e B é uma função se ocorre:

Para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ relacionado ao x, essa relação é escrita por $y = f(x)$

Em síntese, uma função é como um entregador de objetos: Ele recebe um objeto de uma origem e entrega num destino, sendo necessário antes estar bem declarado o país de origem e o país de destino. Além disso, o entregador PRECISA entregar todos seus pacotes e cada pacote vai para um destino só, não teria como um único objeto ir para dois destinos distintos. Assim:

Uma função deve respeitar que:

(i) Há um "resultado"para cada elemento de origem

(ii) O resultado é sempre único

Os conjuntos A, B usados para definir a função f são denotados por $f : A \to B$, onde neste caso chamamos de **domínio de f** o conjunto A (de origem, elementos representados normalmente por x ou t) e o conjunto B é chamado **contra-dominio** (conjunto de destino, elementos representados normalmente por y).

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.14. A função $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ dada pela relação $f(x) = x + 1$ pega o número x e soma 1. Ou seja $f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(2) = 2 + 1 = 3$, $f(3) = 3 + 1 = 4$. É uma função pois todos os elementos do domínio são usados e os resultados estão restritos dentro de $\mathbb{N}$.

Um exemplo onde falha o domínio:

Exemplo 1.15. O objeto $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = \frac{1}{x}$ não caracteriza uma função pois a operação "1 dividido por algo"está bem definida somente se este algo não for zero, mas note que o domínio é os inteiros, e o zero faz parte.

Para consertar esta função, teríamos de substituir por: $f : (\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Agora sim, existe um resultado calculável nos reais se dividirmos 1 por qualquer outra coisa que não o zero. O domínio foi consertado por "qualquer inteiro que não seja o zero".

Um exemplo onde falha o contra-domínio:

Exemplo 1.16. O objeto $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$ definido por $f(x) = \frac{1}{x}$ não caracteriza uma função pois a operação "1 dividido por algo"não resultará em inteiros, com o domínio mencionado, veja que $\frac{1}{2} = 0,5 \notin \mathbb{Z}$. O conjunto de destino não está limitando corretamente a "saída". Teríamos de aumentá-lo. Para consertar, precisariamos fazer: $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{Q}$ definido por $f(x) = \frac{1}{x}$, agora sim, as respostas são frações e não inteiros, o contradominio foi retificado e agora é função.

Um exemplo onde falha a propriedade de resultado único:

Exemplo 1.17. O objeto $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definido por $f(x) = \pm x$ não caracteriza uma função pois as respostas $\pm x$ significa que há duas possibilidades, a positiva e a negativa. Isto é: $f(1) = \pm 1$ significa que $f(1) = +1$ mas também $f(1) = -1$, o número 1 é levado em dois resultados distintos. Isso ocorre com quase todo o domínio. Neste caso não costuma haver uma única maneira de consertar que seja consenso.

Um tipo de conjunto importante para nosso estudo é os intervalos abertos e fechados:

Definição 1.18. Definimos as seguintes notações para os conjuntos definidos a seguir e os chamamos de **intervalos abertos**, com os números a, b reais e $a < b$:

(i) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

(ii) $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

(iii) $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

No item (i) o intervalo aberto é também dito **limitado**. Nos itens (ii) e (iii) são intervalos abertos **não limitados**, por isso usamos o símbolo do infinito nas extremidades, indicando que jamais termina. Note que o fato de serem intervalos abertos refere-se, justamente, ao fato de as pontas não estarem inclusas, mas todo o interior está. Por exemplo $]1, 6[$ indica que estamos pegando todos os números reais menores que 6 mas maiores que 1. Por exemplo o 2, ou até algum número irracional como o π que está próximo do 3. Mas as extremidades 1 e 6 são números não inclusos.

De maneira análoga definimos intervalos fechados:

Definição 1.19. Definimos as seguintes notações para os conjuntos definidos a seguir e os chamamos de **intervalos fechados**, com os números a, b reais e $a < b$:

(i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(ii) $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

(iii) $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Os colchetes virados pra dentro quando o extremo é um número real indicam que o extremo está incluso. Identico ao anterior, com a exceção de as "bordas do intervalo"estarem inclusas. Análogamente como nos abertos, o intervalo do item (i) é dito limitado e os outros dois não limitados.

O conjunto dos números reais pode ser descrito como $]-\infty, \infty[$ e é um intervalo que é aberto e fechado ao mesmo tempo, não limitado. Tais coisas existem, mas são objeto de estudo de **topologia**, uma disciplina mais avançada.

Com estes conhecimentos temos a bagagem fundamental para começar a introduzir as funções elementares.