MPSI
MP2I

Mathieu **Lucas**

RECUEIL D'**EXERCICES** CLASSIQUES DE **MATHS**

Corrections détaillées

Rappels de cours

Pour **PROGRESSER PAS À PAS** vers les concours !

ellipses

MPSI
MP2I

RECUEIL D'**EXERCICES** CLASSIQUES DE **MATHS**

- ✔ Corrections détaillées
- ✔ Rappels de cours

Mathieu **Lucas**

Professeur agrégé en MPSI au Lycée Sainte-Croix – Saint-Euverte, Orléans

ellipses

À Louise et Valentin, mes deux plus grandes fiertés.

ISBN 9782340-116399
Dépôt légal : septembre 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Remerciements

À ma femme, Célina,
Merci pour ta patience et ton soutien sans faille. Tu es toujours là, dans les moments faciles comme dans les plus compliqués, et c'est grâce à toi que je trouve la force d'aller au bout de mes projets. Sans toi, ce livre n'existerait tout simplement pas.

À mes parents, Marinette et Philippe,
Merci d'avoir toujours cru en moi. Merci pour votre soutien, vos encouragements, et pour m'avoir appris à persévérer. Votre présence et votre confiance comptent beaucoup pour moi.

À mes collègues, Sylvain ARNT, Jonathan BRAUD, Emmanuel CEPA, Michèle et Philippe GRILLOT,
Merci pour vos relectures attentives, vos remarques précieuses, et votre aide à corriger ce texte. Votre regard extérieur a été essentiel pour donner à ce livre sa forme finale. Travailler avec vous est un vrai plaisir.

Avant-propos

L'idée de cet ouvrage est née d'un constat récurrent effectué au contact d'étudiants de classes préparatoires MPSI. Face à des exercices issus d'ouvrages ou de ressources en ligne, ces derniers manifestaient fréquemment des difficultés, non pas tant dans la résolution elle-même que dans la compréhension des corrections proposées. Ce qui faisait obstacle n'était pas la solution, mais le manque de références explicites aux notions abordées ou au cours correspondant.

La plupart des manuels séparent en effet rigoureusement cours et exercices, laissant à l'étudiant la responsabilité d'établir lui-même les liens nécessaires. Cette démarche, bien que formatrice pour certains, constitue un frein pour beaucoup, notamment lorsque la correction mobilise une notion dont le rappel n'est pas immédiatement accessible.

Le présent ouvrage se propose ainsi de pallier cette difficulté en offrant une sélection d'exercices classiques, conformes aux exigences des programmes de MPSI et de MP2I, accompagnés de corrections détaillées. À chaque étape de la résolution, les notions théoriques utilisées sont précisément identifiées et assorties d'un rappel de cours adéquat (définition, théorème ou proposition), afin de permettre une compréhension claire et structurée.

L'objectif est de fournir à l'étudiant un outil de travail rigoureux, lui permettant d'approfondir sa maîtrise des fondamentaux mathématiques tout en renforçant sa capacité d'autonomie. L'ensemble du programme actuellement en vigueur y est traité, avec le souci constant de concilier exactitude mathématique et clarté pédagogique.

Puissent ces pages constituer un soutien efficace dans la préparation des études aux exigences des classes préparatoires scientifiques, et contribuer à leur progression dans l'étude des mathématiques.

Je vous souhaite une excellente lecture et beaucoup de réussite.

Sommaire

Chapitre 1 : **Modes de raisonnement** **9**
Chapitre 2 : **Calculs algébriques** **19**
Chapitre 3 : **Nombres complexes** **44**
Chapitre 4 : **Ensembles et applications** **74**
Chapitre 5 : **Fonctions** **93**
Chapitre 6 : **Primitives et équations différentielles** **123**
Chapitre 7 : **Nombres réels et suites** **151**
Chapitre 8 : **Arithmétique** **186**
Chapitre 9 : **Structures algébriques usuelles** **199**
Chapitre 10 : **Limites et continuité** **219**
Chapitre 11 : **Dérivation** **231**
Chapitre 12 : **Analyse asymptotique** **253**
Chapitre 13 : **Polynômes** **279**
Chapitre 14 : **Fractions rationnelles** **309**
Chapitre 15 : **Espaces vectoriels** **326**
Chapitre 16 : **Calcul matriciel** **347**
Chapitre 17 : **Dimension finie** **368**
Chapitre 18 : **Matrices et applications linéaires** **385**
Chapitre 19 : **Intégration** **413**
Chapitre 20 : **Dénombrement** **428**
Chapitre 21 : **Probabilités sur un univers fini** **437**
Chapitre 22 : **Variables aléatoires** **450**
Chapitre 23 : **Déterminant** **477**
Chapitre 24 : **Séries** **489**
Chapitre 25 : **Espaces préhilbertiens et euclidiens** **513**
Chapitre 26 : **Calcul différentiel** **532**

Table des matières 547

1 Modes de raisonnement

I Raisonnement par contraposée

Exercice 1.1

Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

► **Solution**

Rappel de cours 1.1

Soient P et Q deux assertions.
Montrer que l'implication $(P \Longrightarrow Q)$ est vraie est équivalent à montrer que sa contraposée $\big(\text{non } (Q) \Longrightarrow \text{non } (P)\big)$ est vraie.
On dit que l'on **raisonne par contraposée**.

La proposition à démontrer s'écrit :

$$\text{« } n^2 \text{ est pair} \Longrightarrow n \text{ est pair »}.$$

La proposition contraposée est :

$$\text{« } n \text{ n'est pas pair} \Longrightarrow n^2 \text{ n'est pas pair »},$$

ce qui s'écrit encore

$$\text{« } n \text{ est impair} \Longrightarrow n^2 \text{ est impair »}.$$

Nous remarquons qu'il est plus simple de démontrer cette dernière que le sens direct.
Nous allons donc raisonner par contraposée.
On considère un entier impair n et montrons que n^2 l'est également.
Comme n est impair il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Ainsi,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui s'écrit aussi $n^2 = 2p + 1$, où l'on a posé $p = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$.
En définitive, n^2 est un entier impair, ce qui démontre que l'implication est vraie.
Donc si n^2 est pair, alors n est pair.

II Raisonnement par l'absurde

Exercice 1.2

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

► **Solution**

Rappel de cours 1.2

Soit P une assertion.
Pour montrer que P est vraie, on suppose que non(P) est vraie et on obtient une contradiction.
On dit que l'on fait un **raisonnement par l'absurde**.

La négation de la propriété « $\sqrt{2}$ est irrationnel » est « $\sqrt{2}$ n'est pas irrationnel » ce qui équivalent à « $\sqrt{2}$ est un rationnel ».
Nous allons raisonner par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est un rationnel.

Rappel de cours 1.3

Un nombre est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
Tout nombre rationnel a une infinité d'écritures mais l'une d'entre elle est plus pratique : lorsque p et q sont premiers entre eux (on parle de fraction irréductible).

Dans ce cas, comme on a supposé que $\sqrt{2}$ est un rationnel, il existe $p \in \mathbb{Z}$ (en réalité on peut même supposer que $p \in \mathbb{N}$ car $\sqrt{2}$ est positif) et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

donc après avoir élevé au carré l'égalité, on obtient :

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

ce qui donne, après avoir effectué le produit en croix, $2q^2 = p^2$ et ainsi p^2 est pair. Par conséquent, d'après l'**exercice 1.1**, p est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$ ainsi, en remplaçant, on obtient $2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$ ce qui donne, après simplification par 2, $q^2 = 2k^2$. Cela démontre que q^2 est pair et par suite, toujours d'après l'**exercice 1.1**, q est pair. Ce qui est absurde ! En effet, p et q ne peuvent pas être pairs tous les deux et également premiers entre eux.
Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

► **Solution**

Rappel de cours 1.4

Soient P et Q deux assertions.
La négation de $(P \Longrightarrow Q)$ est $\Big(P \text{ et } \big(\text{non } (Q)\big)\Big)$.
Ainsi pour montrer que $(P \Longrightarrow Q)$ est vraie on suppose P vraie et Q fausse et on aboutit à une contradiction donc $\Big(P \text{ et } \big(\text{non } (Q)\big)\Big)$ est fausse c'est-à-dire $\big(\text{non } (P \Longrightarrow Q)\big)$ est fausse donc $(P \Longrightarrow Q)$ est vraie.
On dit également que l'on fait un **raisonnement par l'absurde**.

La proposition à démontrer est :

« n est le carré d'un entier $\Longrightarrow$ $2n$ n'est pas le carré d'un entier ».

La négation de cette proposition est donc :

« n est le carré d'un entier et $2n$ est lui aussi le carré d'un entier ».

Raisonnons par l'absurde. On suppose donc que n est le carré d'un entier, et que $2n$ est lui aussi le carré d'un entier. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que n s'écrive $n = p^2$ et de même, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $2n$ s'écrive $2n = q^2$. Alors, en faisant le quotient de $2n$ par n, on obtient :

$$\frac{2n}{n} = 2 = \frac{q^2}{p^2}$$

puis en appliquant la racine carrée (c'est possible car toutes les quantités sont positives), $\sqrt{2} = \dfrac{q}{p}$ car $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Or $\sqrt{2}$ est irrationnel d'après l'**exercice 1.2**, on a une contradiction !
Donc si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

III Raisonnement par disjonction de cas

Exercice 1.4

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

► **Solution**

Rappel de cours 1.5

Soient P, Q et R trois assertions.
Si $(P \Longrightarrow R)$ et $(Q \Longrightarrow R)$ sont vraies, alors $\big((P \text{ ou } Q) \Longrightarrow R\big)$ est vraie.
Ce raisonnement s'appelle une **disjonction de cas**.

Soit n un entier naturel. Il y a deux cas possibles : n est pair ou n est impair.
On va donc séparer ces deux cas.
Raisonnons, alors par disjonction de cas.

- **Premier cas :** Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ alors

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}.$$

- **Second cas :** Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ alors

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}.$$

Finalement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

IV Raisonnement par récurrence

A - Récurrence simple

Exercice 1.5

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

► **Solution**

Rappel de cours 1.6

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n supérieur ou égal à n_0, par un raisonnement que l'on nomme **récurrence simple**, on procède de la manière suivante :

- **Initialisation :** on montre que $P(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** on considère un entier $n \geq n_0$, pour lequel $P(n)$ est vraie et on montre alors que $P(n+1)$ est vraie,
- **Conclusion :** pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $P(n)$ est vraie.

On va montrer ce résultat par récurrence simple.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $2^n > n$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
  On a $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n > n + 2^n$ car d'après $P(n)$ nous savons que $2^n > n$. Or $2^n \geq 1$ donc $2^{n+1} > n + 1$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
- **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

B - Récurrence double

Exercice 1.6

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

► **Solution**

Rappel de cours 1.7

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n supérieur ou égal à n_0, par un raisonnement que l'on nomme **récurrence double**, on procède de la manière suivante :

- **Initialisation :** on montre que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies,
- **Hérédité :** on considère un entier $n \geq n_0$, pour lequel $P(n)$ ET $P(n+1)$ sont vraies et on montre alors que $P(n+2)$ est vraie,
- **Conclusion :** pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $P(n)$ est vraie.

Comme nous remarquons que la formule de récurrence définissant la suite porte sur deux termes de cette dernière, nous allons effectuer une récurrence double.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $u_n = 1+2^n$ ».

- **Initialisation :** On a $u_0 = 2 = 1+2^0$, donc $P(0)$ est vraie. On a aussi $u_1 = 3 = 1+2^1$ donc $P(1)$ est vraie. Ainsi la propriété est initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies. Alors on a, par définition de la suite :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Puisque $P(n+1)$ et $P(n)$ sont vraies, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3\left(1+2^{n+1}\right) - 2\left(1+2^n\right) = 3 + 3\times 2^{n+1} - 2 - 2\times 2^n \\ &= 3 + 3\times 2\times 2^n - 2 - 2\times 2^n = 1 + 6\times 2^n - 2\times 2^n \\ &= 1 + 4\times 2^n = 1 + 2^2\times 2^n = 1+2^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

- **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1+2^n$.

C - Récurrence forte

Exercice 1.7

Démontrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

► **Solution**

Rappel de cours 1.8

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n supérieur ou égal à n_0, par un raisonnement que l'on nomme **récurrence forte**, on procède de la manière suivante :

- **Initialisation :** on montre que $P(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** on considère un entier $n \geq n_0$, pour lequel $P(n_0)$ ET $\cdots$ ET $P(n)$ sont vraies et on montre alors que $P(n+1)$ est vraie,
- **Conclusion :** pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $P(n)$ est vraie.

On va prouver l'existence par récurrence forte.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: « $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $n = 2^p(2q+1)$ ».

- **Initialisation :** On a $1 = 2^0(2\times 0+1)$ donc $P(1)$ est vraie et la propriété est initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et nous supposons maintenant que tout entier inférieur ou égal à n vérifie cette propriété, et prouvons qu'elle est encore vérifiée pour $n+1$. On distingue alors deux cas (**rappel 1.5**) :
  - **soit $n+1$ est pair :** dans ce cas, il existe un entier m tel que $n+1 = 2m$, et $m \in [\![1,n]\!]$. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, et donc m s'écrit $m = 2^a(2b+1)$, avec $a, b \in \mathbb{N}$. Mais dans ce cas $n+1 = 2^{a+1}(2b+1)$, et donc on a prouvé l'existence avec $p = a+1$ et $q = b$;
  - **ou bien $n+1$ est impair :** alors, il existe un entier m tel que $n+1 = 2m+1 = 2^0(2m+1)$, et la proposition est démontrée pour $p = 0$ et $q = m$.

  Donc $P(n+1)$ est vraie et la propriété est initialisée.
- **Conclusion :** Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.

Prouvons maintenant l'unicité. Supposons que $n = 2^p(2q+1) = 2^a(2b+1)$. Nous voulons montrer que $p = a$. Raisonnons par l'absurde, **rappel 1.2**, et supposons $p \neq a$. Sans perte de généralité on peut supposer que $p > a$, alors après transposition $2^{p-a}(2q+1) = 2b+1$ et le membre de droite est impair alors que celui de gauche est pair ce qui est contradictoire. Donc $p = a$.
Comme $p = a$ nous avons que $n = 2^a\left(2q+1\right) = 2^a\left(2b+1\right)$ ce qui donne directement que $q = b$ également, ce qui prouve l'unicité.

V Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 1.8

Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.

► **Solution**

Rappel de cours 1.9

Lorsque l'on cherche à déterminer l'existence d'objets vérifiant une propriété, on peut procéder par un raisonnement que l'on appelle **analyse-synthèse**.

- Dans une première phase que l'on nomme **analyse**, on suppose le problème résolu et on en déduit des propriétés sur les objets cherchés. Grâce à ces conditions nécessaires, on limite la liste des candidats.
- Dans une seconde phase appelée **synthèse**, on détermine, parmi les candidats obtenus dans l'analyse, lesquels vérifient la propriété.

Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

- **Analyse :** Supposons que x soit une solution de cette équation. Alors pour que la racine carrée ait un sens il est nécessaire que $x \in]-\infty, 2]$. De même la racine carrée étant positive, il est nécessaire que $x \geq 0$ et donc $x \in [0,2]$. Afin de « supprimer » la racine carrée, élevons ensuite l'équation au carré. Ce qui donne, si x est solution, alors $2 - x = x^2$, c'est-à-dire après transposition $x^2 + x - 2 = 0$. On reconnaît une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$ et les solutions sont $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = -2$. Seul x_1 est dans l'intervalle souhaité. Donc la seule solution possible est 1.

- **Synthèse :** Prouvons que $x = 1$ est solution de l'équation. C'est immédiat, car $\sqrt{2-1} = 1$.
- **Conclusion :** la seule solution de l'équation est 1.

Exercice 1.9

Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(m) + f(n).$$

► **Solution**

Nous allons raisonner par analyse-synthèse, **rappel 1.9**.

- **Analyse :** Considérons f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété algébrique suivante :

  $$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(m) + f(n).$$

  On remarque, pour $m = n = 1$ que

  $$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$

  et pour $m = 2$ et $n = 1$ que

  $$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1),$$

  on peut donc conjecturer :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1).$$

  Montrons ce résultat par récurrence simple, **rappel 1.6**.
  On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $f(n) = nf(1)$ ».

  - **Initialisation :** Soit $n = 0$ alors d'après la propriété algébrique $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$ et $0 = 0 \times f(1)$ ainsi $P(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.
  - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie cela signifie que $f(n) = nf(1)$.
    D'après la propriété algébrique de la fonction nous avons :

    $$f(n+1) = f(n) + f(1).$$

    D'après $P(n)$:

    $$f(n+1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1).$$

    Par suite, $P(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.

Ce qui prouve que f est une fonction de la forme $n \mapsto \lambda n$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Synthèse :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et notons f la fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \lambda n$.
  Alors :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = \lambda(m+n) = \lambda m + \lambda n = f(m) + f(n),$$

  donc f vérifie la propriété indiquée.

- **Conclusion :** Les fonctions f solutions du problème sont les fonctions de la forme $n \mapsto \lambda n$, où λ est un réel.

2 Calculs algébriques

I Télescopage

Exercice 2.1

Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

► **Solution**

Rappel de cours 2.1

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\left[\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).\ \right]$$

On commence par remarquer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k}{k}+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $S = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$.

Rappel de cours 2.2

Somme télescopique
Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $p \leq q$ et $(a_i)_{i \in [\![p, q+1]\!]}$ une famille de réels.

$$\left[\ \sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.\ \right]$$

Donc $S = \ln(n+1) - \ln(1)$.
Et ainsi $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$.

Exercice 2.2

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}.$$

En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

► **Solution**
Soit $k \in \mathbb{N}$, on réduit au même dénominateur, et on trouve :

$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3} = \frac{a(k+3)}{(k+1)(k+3)} + \frac{b(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \frac{a(k+3)+b(k+1)}{(k+1)(k+3)}.$$

Par identification, cela signifie que $a(k+3)+b(k+1) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc en particulier pour $k = -3$ cela donne :

$$a(k+3)+b(k+1) = a(-3+3)+b(-3+1) = 1$$

donc $-2b = 1$ ou encore $b = -\frac{1}{2}$ et pour $k = -1$ cela donne :

$$a(-1+3)+b(-1+1) = 1$$

donc $2a = 1$ ce qui est équivalent à $a = \frac{1}{2}$.
Donc la seule solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.
Et ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{k+3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{k+3}\right).$$

Rappel de cours 2.3

Linéarité de la somme

Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $p \leq q$, $(a_i)_{i\in[\![p,q]\!]}$, $(b_i)_{i\in[\![p,q]\!]}$ deux familles de nombres réels et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left[\sum_{k=p}^{q} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=p}^{q} a_k + \beta \sum_{k=p}^{q} b_k. \right]$$

Ainsi,

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}\right).$$

Rappel de cours 2.4

Changement d'indice

Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $p \leq q$ et $(a_i)_{i\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres réels. Lorsqu'on a une somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k$, on peut réaliser pour convenance un changement d'indice par décalage d'indice : on pose pour $j \in \mathbb{N}^*$

$$i = k + j \iff k = i - j \text{ où } k \text{ est un entier fixé.}$$

$$\left[\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{i=p+j}^{q+j} a_{i-j}. \right]$$

Après un changement d'indice, le nombre de termes dans la somme doit être inchangé !

On fait le changement d'indice $i = k+3$ dans la seconde somme, pour k variant de 0 à n, i varie de 3 à $n+3$:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{i=3}^{n+3} \frac{1}{i}\right).$$

Rappel de cours 2.5

Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $p \leq q$ et $(a_i)_{i\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres réels.
La somme $\sum_{k=p}^{q} a_k$ est une constante qui ne dépend pas de k. La lettre k sert juste à exprimer la quantité variable lorsque l'on somme.
On dit que k est une variable muette et on peut remplacer k par n'importe quelle lettre, par exemple i ou bien encore j :

$$\left[\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p}^{q} a_j. \right]$$

La variable i étant muette, on peut la remplacer par k :

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{k}\right).$$

On extrait les trois premiers termes de la première somme ainsi que les trois derniers de la seconde afin que les bornes des deux sommes soient identiques :

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+1} - \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)\right).$$

Ce qui donne :

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\right).$$

Et après télescopage, **rappel 2.2** :

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).$$

Une mise au même dénominateur s'impose,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{2(n+2)(n+3)}{2(n+2)(n+3)} + \frac{(n+2)(n+3)}{2(n+2)(n+3)} - \frac{2(n+3)}{2(n+2)(n+3)} - \frac{2(n+2)}{2(n+2)(n+3)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2(n+2)(n+3)+(n+2)(n+3)-2(n+3)-2(n+2)}{2(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne après développement,

$$S_n = \frac{2(n^2+5n+6)+n^2+5n+6-2n-6-2n-4}{4(n+2)(n+3)} = \frac{3n^2+11n+8}{4(n+2)(n+3)}.$$

Essayons de factoriser le numérateur, qui est un trinôme du second degré. Son discriminant est $\Delta = 11^2 - 4 \times 3 \times 8 = 25 > 0$, il y a donc deux racines réelles distinctes qui sont :

$$n_1 = \frac{-11-\sqrt{25}}{2\times 3} = \frac{-11-5}{6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3} \text{ et}$$
$$n_2 = \frac{-11+\sqrt{25}}{2\times 3} = \frac{-11+5}{6} = \frac{-6}{6} = -1.$$

Ainsi le numérateur se factorise par :

$$3n^2+11n+8 = 3\left(n-\left(-\frac{8}{3}\right)\right)\big(n-(-1)\big) = 3\left(n+\frac{8}{3}\right)(n+1) = (3n+8)(n+1).$$

Au final,

$$S_n = \frac{(3n+8)(n+1)}{4(n+2)(n+3)}.$$

II Sommes de référence

Exercice 2.3

Calculer $\sum_{k=-10}^{15} k(3-k)$.

► **Solution**

En développant le produit puis par linéarité de la somme, **rappel 2.3**, on obtient :

$$\sum_{k=-10}^{15} k(3-k) = 3\sum_{k=-10}^{15} k - \sum_{k=-10}^{15} k^2.$$

Rappel de cours 2.6

Soient $(p,q,m) \in \mathbb{Z}^3$ avec $p \leq m < q$ et $(a_i)_{i\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres réels.

$$\left[\ \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{q} a_k. \ \right]$$

Par la suite nous allons partager la première somme en deux :

$$S_1 = 3\sum_{k=-10}^{15} k = 3\sum_{k=-10}^{0} k + 3\sum_{k=1}^{15} k.$$

Dans la première de ces deux sommes, on fait le changement de variables $i = -k$, **rappel 2.4**. Lorsque k varie de -10 à 0, i varie de 0 à 10. On trouve donc que

$$S_1 = -3\sum_{i=0}^{10} i + 3\sum_{k=1}^{15} k.$$

Rappel de cours 2.7

Somme des premiers entiers

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left[\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \right]$$

On reconnaît la somme des premiers entiers :

$$S_1 = -3 \times \frac{10 \times 11}{2} + 3 \times \frac{15 \times 16}{2} = 195.$$

Pour la deuxième somme, on fait le même raisonnement :

$$S_2 = \sum_{k=-10}^{15} k^2 = \sum_{k=-10}^{0} k^2 + \sum_{k=1}^{15} k^2 = \sum_{i=0}^{10} (-i)^2 + \sum_{k=1}^{15} k^2 = \sum_{i=0}^{10} i^2 + \sum_{k=1}^{15} k^2.$$

Rappel de cours 2.8

Somme des premiers carrés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left[\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \right]$$

On reconnaît la somme des premiers carrés :

$$S_2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 1625.$$

On trouve au final : $\displaystyle\sum_{k=-10}^{15} k(3-k) = 195 - 1625 = -1430.$

III Somme des premières puissances

Exercice 2.4

Pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$.

► **Solution**

Rappel de cours 2.9

Soit x un nombre réel distinct de 1, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\left[\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \right]$$

Il faut faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{3^n}{3^k}.$$

Ce qui donne par linéarité, **rappel 2.3**, comme 3^n ne dépend pas de l'indice d'indexation :

$$S_n = 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Comme $\frac{2}{3} \neq 1$, on a :

$$S_n = 3^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 3 \times 3^n \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] = 3^{n+1}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$
$$= 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

IV Sommes doubles

A - Sommes rectangulaires

Exercice 2.5

Calculer $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

► **Solution**

Rappel de cours 2.10

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille de nombres réels, on a :

$$\left[\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right). \right]$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j)^2$.
On développe $(i+j)^2$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i^2+2ij+j^2).$$

On linéarise, **rappel 2.3** : $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2$.

Rappel de cours 2.11

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ deux familles de nombres réels, on a :

$$\left[\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right). \right]$$

On obtient après séparation :

$$S_n = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right).$$

Rappel de cours 2.12

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leq p$, on a :

$$\left[\sum_{i=n}^{p} 1 = p-n+1. \right]$$

On reconnaît également la somme des premiers entiers, **rappel 2.7**, ainsi que la somme des premiers carrés, **rappel 2.8** :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times n + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Une mise au même dénominateur s'impose :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n^2(n+1)^2}{6} + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1) + 3n^2(n+1)^2 + n^2(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

On reconnaît le facteur commun $n^2(n+1)$ à chaque terme du numérateur donc on le factorise par celui-ci :

$$S_n = \frac{n^2(n+1)\big(2n+1+3(n+1)+2n+1\big)}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$$

B - Sommes triangulaires

Exercice 2.6

Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i^2}{j}$ pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

► **Solution**

Rappel de cours 2.13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de nombres réels.

$$\left[\quad \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}. \quad\right]$$

Nous allons voir que l'ordre des sommations est ici crucial. En effet, on peut écrire :

$$S = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i^2}{j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(i^2 \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j}\right)$$

mais on ne connaît pas l'expression de $\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j}$. En revanche, l'autre ordre de sommation permet d'obtenir le résultat.

$$S = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{i^2}{j}.$$

Puis par séparation, **rappel 2.11** :

$$S = \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \right) \left(\sum_{i=1}^{j-1} i^2 \right).$$

On reconnaît dans la seconde somme, la somme des premiers carrés, **rappel 2.8** :

$$S = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \frac{j\left(j-1\right)\left(2\left(j-1\right)+1\right)}{6} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \frac{j\left(j-1\right)\left(2j-1\right)}{6} = \sum_{j=2}^{n} \frac{\left(j-1\right)\left(2j-1\right)}{6}.$$

On peut commencer la somme à $j = 1$ car le terme est nul si $j = 1$. Donc

$$S = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(j-1\right)\left(2j-1\right)}{6} = \sum_{j=1}^{n} \frac{2j^2 - j - 2j + 1}{6} = \sum_{j=1}^{n} \frac{2j^2 - 3j + 1}{6}.$$

On linéarise, **rappel 2.3** :

$$S = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{j=1}^{n} j^2 - 3 \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right).$$

Ce qui donne en utilisant les sommes de références, **rappel 2.7**, **rappel 2.8** et **rappel 2.12** :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} \left(2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{3n(n+1)}{2} + n \right). \end{aligned}$$

Une mise au même dénominateur s'impose :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} \left(\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{9n(n+1)}{6} + \frac{6n}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{2n\left(n+1\right)\left(2n+1\right) - 9n(n+1) + 6n}{6} \right). \end{aligned}$$

On développe,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{36}\left(2n\left(2n^2+3n+1\right)-9n^2-9n+6n\right) \\ &= \frac{1}{36}\left(4n^3+6n^2+2n-9n^2-9n+6n\right) \\ &= \frac{1}{36}\left(4n^3-3n^2-n\right) \\ &= \frac{n}{36}\left(4n^2-3n-1\right). \end{aligned}$$

On va factoriser le trinôme du second degré $4n^2-3n-1$ pour cela calculons son discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4\times 4\times(-1) = 25 > 0$ ce qui nous dit qu'il y a deux racines réelles :

$$n_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 4} = \frac{3-5}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \text{ et } n_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 4} = \frac{3+5}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

Ainsi ce trinôme du second degré se factorise par :

$$4n^2-3n-1 = 4\left(n-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)(n-1) = 4\left(n+\frac{1}{4}\right)(n-1) = (4n+1)(n-1).$$

Et pour finir :

$$S = \frac{n(n-1)(4n+1)}{36}.$$

Exercice 2.7

Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

► **Solution**

On écrit la somme à l'aide d'une double somme, **rappel 2.13** :

$$S_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} ij = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij$$

puis par séparation, **rappel 2.11** :

$$S_n = \sum_{j=2}^{n} j\sum_{i=1}^{j-1} i.$$

On reconnaît la somme des premiers entiers, **rappel 2.7** :

$$S_n = \sum_{j=2}^{n} j\frac{(j-1)\,j}{2}.$$

Puis après développement et linéarisation, **rappel 2.3** :

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\left(j^3 - j^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^3 - \sum_{j=2}^{n} j^2\right)$$

Rappel de cours 2.14

Somme des premiers cubes
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left[\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \ \right]$$

On reconnaît la somme des premiers carrés, **rappel 2.8**, ainsi que celle des premiers cubes sauf que la somme démarre à $j = 2$, il faut donc retirer le premier terme :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left[\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 1^3\right) - \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right). \end{aligned}$$

Une mise au même dénominateur donne :

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

Puis en factorisant par le facteur commun $n(n+1)$:

$$S_n = \frac{1}{24}n(n+1)\big(3n(n+1) - 2(2n+1)\big) = \frac{1}{24}n(n+1)\big(3n^2 - n - 2\big).$$

On cherche à factoriser le trinôme du second degré $3n^2 - n - 2$.
Pour cela on calcule son discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 > 0$. Il y a donc deux racines réelles :

$$n_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 3} = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \text{ et } n_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 3} = \frac{1+5}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Ainsi le trinôme se factorise de la façon suivante :

$$3n^2 - n - 2 = 3\left(n - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)(n-1) = 3\left(n + \frac{2}{3}\right)(n-1).$$

Ce qui donne :

$$S_n = \frac{1}{24}n(n+1)3\left(n + \frac{2}{3}\right)(n-1) = \frac{1}{8}n(n+1)(n-1)\left(n + \frac{2}{3}\right).$$

V Coefficients binomiaux

A - Définition

Exercice 2.8

Montrer que $\binom{2n}{n}$ est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

► **Solution**

Rappel de cours 2.15

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on appelle **coefficient binomial** ou k parmi n, noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\left[\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \right]$$

Comme on a $0 \leq n \leq 2n$, on commence par écrire le coefficient binomial à l'aide de factorielles :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!n!}.$$

Puis on extrait le facteur le plus grand de $(2n)!$ et de $n!$:

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}.$$

En remarquant que $(n-1)! = (2n-1-n)!$, on obtient :

$$\binom{2n}{n} = 2\frac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!}.$$

On termine par exprimer le quotient trouvé à l'aide d'un coefficient binomial :

$$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n}.$$

Rappel de cours 2.16

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est un entier.

On conclut en remarquant que $\binom{2n}{n} = 2 \times k$ où $k = \binom{2n-1}{n} \in \mathbb{N}$.

B - Relation de Pascal

Exercice 2.9

Soient n, p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

► **Solution**

Rappel de cours 2.17

Formule de Pascal
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \right]$$

Pour tout $k \in [\![p, n]\!]$, la formule de Pascal donne :

$$\binom{k+1}{p+1} = \binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} \text{ c'est-à-dire } \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

On a alors :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right).$$

On reconnaît alors une somme télescopique, **rappel 2.2**, qui se simplifie en :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1}.$$

On remarque que $p+1 > p$ donc, d'après le **rappel 2.15**, nous avons que $\binom{p}{p+1} = 0$.
Ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 2.10

Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

► **Solution**
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq k \leq 2n-1$.
On commence par exprimer les coefficients binomiaux à l'aide de factorielles, **rappel 2.15** :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!(2n-1-k)!}{(2n-1)!}.$$

On simplifie par $k!$ puis on sort du symbole somme les facteurs qui ne dépendent pas de l'indice k d'indexation, **rappel 2.3** :

$$S_n = \frac{n!}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-1-k)!}{(n-k)!}.$$

On multiplie par $(n-1)!$ et on divise par $(n-1)!$ afin de faire apparaître de nouveau un coefficient binomial :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-1-k)!}{(n-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-1-k)!}{(n-1)!\big((2n-1-k)-(n-1)\big)!} \\ &= \frac{1}{\binom{2n-1}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-1-k}{n-1}. \end{aligned}$$

Nous avons $n \in [\![0, 2n-1]\!]$ alors la formule de Pascal, **rappel 2.17**, donne :

$$\binom{2n-k}{n} = \binom{2n-k-1}{n-1} + \binom{2n-k-1}{n},$$

et en la transposant :

$$\binom{2n-1-k}{n-1} = \binom{2n-k}{n} - \binom{2n-k-1}{n}.$$

On obtient :

$$S_n = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{2n-k}{n} - \binom{2n-k-1}{n} \right) = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{2n-k}{n} - \binom{2n-(k+1)}{n} \right).$$

Ce qui donne par télescopage, **rappel 2.2** :

$$S_n = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}} \left(\binom{2n}{n} - \binom{2n-(n+1)}{n} \right) = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}} \left(\binom{2n}{n} - \binom{n-1}{n} \right).$$

Or d'après le **rappel 2.15**, $\binom{n-1}{n} = 0$ donc :

$$S_n = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}} \binom{2n}{n}.$$

On exprime à l'aide de factorielles les coefficients binomiaux, **rappel 2.15**.
Comme $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leq n \leq 2n$ et $0 \leq n \leq 2n-1$ on peut écrire

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\frac{(2n-1)!}{n!\left((2n-1)-n\right)!}} \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{1}{\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} \frac{(2n)!}{n!n!}. \end{aligned}$$

On simplifie par $n!$ et on remarque que $(2n)! = 2n \times (2n-1)!$ ainsi que $n! = n \times (n-1)!$ donc

$$S_n = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \frac{2n \times (2n-1)!}{n \times (n-1)!} = \frac{2n}{n} = 2.$$

Exercice 2.11

Calculer pour n, $p \in \mathbb{N}^*$, la somme : $\sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{p} (i+j) \right)$.

► **Solution**
On commence par exprimer, le produit comme un rapport de factorielles

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{p} (i+j) \right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(i+p)!}{i!},$$

puis on introduit un coefficient du binôme, **rappel 2.15**, en multipliant numérateur et dénominateur par $p!$:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{i!}\frac{p!}{p!}=\sum_{i=0}^{p}p!\frac{(i+p)!}{p!\big((p+i)-p\big)!}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}p!\binom{i+p}{p}.$$

Ce qui donne par linéarité, **rappel 2.3** :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=p!\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{p}.$$

Comme $p\in[\![0,i+p]\!]$, on utilise la formule de Pascal, **rappel 2.17**, on a :

$$\binom{i+p+1}{p+1}=\binom{i+p}{p}+\binom{i+p}{p+1}.$$

Ce qui donne en transposant :

$$\binom{i+p}{p}=\binom{i+p+1}{p+1}-\binom{i+p}{p+1}.$$

Ce qui donne en remplaçant :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=p!\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{i+p+1}{p+1}-\binom{i+p}{p+1}\right).$$

Puis par télescopage, **rappel 2.2** :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=p!\left(\binom{n+p+1}{p+1}-\binom{p}{p+1}\right).$$

Or $\binom{p}{p+1}=0$, **rappel 2.15**. Donc :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=p!\binom{n+p+1}{p+1}.$$

VI Formule du binôme de Newton

Exercice 2.12

Calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

► **Solution**

On doit intervertir les signes sommes, car comme dans l'**exercice 2.6** on ne peut pas calculer la somme sous cette forme.

Rappel de cours 2.18

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$ une famille de nombres réels.

$$\left[\ \sum_{0\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}.\ \right]$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{i}.$$

Ce qui donne par linéarité, **rappel 2.3** :

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}.$$

Rappel de cours 2.19

Formule du binôme de Newton

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\left[\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.\ \right]$$

On reconnaît d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i 1^{j-i} = (1+1)^j = 2^j.$$

Par suite : $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j$.

De la même manière : $S_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j1^{n-j}=(1+2)^n=3^n$.

Exercice 2.13

Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

► **Solution**

Soit $n\in\mathbb{N}$, on note $S_n=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

Si $n=0$, alors $S_n=0$.

Supposons $n\in\mathbb{N}^*$.

On remarque que le terme d'indice 0 de la somme est nul donc :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}.$$

Rappel de cours 2.20

Formule d'extraction

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$.

$$\left[\ \binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}.\ \right]$$

D'après la formule d'extraction, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

D'où :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\times\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Ce qui donne après simplification et linéarisation, **rappel 2.3** :

$$S_n=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

On procède ensuite au changement de variable $i = k-1$, **rappel 2.4**, quand k varie de 1 à n alors i varie de 0 à $n-1$:

$$S_n = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}.$$

On fait apparaître la formule du binôme de Newton, **rappel 2.19**, en introduisant des puissances de un :

$$S_n = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}1^i 1^{n-1-i} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

VII Systèmes linéaires

Exercice 2.14

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$$

► **Solution**

Rappel de cours 2.21

Un système (S) de n équations à p inconnues est dit **échelonné** s'il existe un entier naturel r vérifiant $0 \leq r \leq \min(n, p)$ tel que (S) s'écrive sous la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,r}x_r + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \quad + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,r}x_r + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{r,r}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_n \end{cases}$$

où les coefficients diagonaux $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, …,$a_{r,r}$ sont non nuls.
Les r premières équations sont appelées **équations principales** et les suivantes les **équations de compatibilité**.

Rappel de cours 2.22

Algorithme du pivot de Gauss

On considère un système linéaire à n équations et p inconnues :

$$(S):\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,j}x_j+\cdots+a_{1,p}x_p &= b_1\\ \vdots & \\ a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\cdots+a_{i,j}x_j+\cdots+a_{i,p}x_p &= b_i\\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,j}x_j+\cdots+a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

On commence par échelonner (S) à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. On fonctionne de la façon suivante.

- Si tous les coefficients devant x_1 sont nuls, alors l'inconnue x_1 n'intervient pas dans l'écriture du système.
  On résout alors le système $\left(\widetilde{S}\right)$ qui a la même écriture que (S), mais que l'on voit comme un système à seulement $p-1$ inconnues qui sont $x_2,\ldots,x_p$.
- Si au moins l'un des coefficients devant x_1 est non nul, alors on en choisit un, que l'on appelle **pivot**.
  (a) En notant i_0 l'indice de la ligne où se trouve le pivot choisi et en réalisant l'échange de lignes $L_{i_0} \longleftrightarrow L_1$, on obtient un système équivalent à (S) où le pivot choisi est le coefficient devant x_1 à la première ligne :

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{1,1}x_1+\widetilde{a}_{1,2}x_2+\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots+\widetilde{a}_{1,p}x_p &= \widetilde{b}_1\\ \widetilde{a}_{2,1}x_1+\widetilde{a}_{2,2}x_2+\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots+\widetilde{a}_{2,p}x_p &= \widetilde{b}_2\\ \qquad\qquad\vdots & \vdots\ \ \vdots\\ \widetilde{a}_{n,1}x_1+\widetilde{a}_{n,2}x_2+\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots+\widetilde{a}_{n,p}x_p &= \widetilde{b}_n \end{cases}$$

  (b) On utilise alors la première ligne pour éliminer l'inconnue x_1 dans les autres.
  Plus précisement, on rélaise les opérations élémentaires suivantes :

$$\forall i\in[\![2,n]\!],\ L_i \longleftarrow L_i-\frac{\widetilde{a}_{i,1}}{\widetilde{a}_{1,1}}L_1.$$

  On obtient un système équivalent à (S) de la forme ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \widehat{a}_{1,1}x_1 + \widehat{a}_{1,2}x_2 + \cdots \cdots \cdots \cdots + \widehat{a}_{1,p}x_p & = & \widehat{b}_1 \\ \widehat{a}_{2,2}x_2 + \cdots \cdots \cdots \cdots + \widehat{a}_{2,p}x_p & = & \widehat{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{a}_{n,2}x_2 + \cdots \cdots \cdots \cdots + \widehat{a}_{n,p}x_p & = & \widehat{b}_n \end{array}\right.$$

Dans le système obtenu, on voit apparaître une équation linéaire :

$$\widehat{a}_{1,1}x_1 + \widehat{a}_{1,2}x_2 + \cdots \cdots \cdots \cdots + \widehat{a}_{1,p}x_p = \widehat{b}_1$$

et un système à $p-1$ inconnues formé par les $n-1$ dernières lignes :

$$\left(\widehat{S}\right) : \left\{\begin{array}{lcl} \widehat{a}_{2,2}x_2 + \cdots + \widehat{a}_{2,p}x_p & = & \widehat{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{a}_{n,2}x_2 + \cdots + \widehat{a}_{n,p}x_p & = & \widehat{b}_n \end{array}\right.$$

- Deux cas se présentent :
  (a) si le système $\left(\widehat{S}\right)$ à tous ses coefficients nuls, le système est échelonné ;
  (b) sinon, pour ce faire, on peut itérer le processus précédent au système $\left(\widehat{S}\right)$.

Maintenant que le système est échelonné on fonctionne de la façon suivante :

- s'il y a au moins une équation de compatibilité non compatible alors le système n'a pas de solution ;
- si toutes les équations auxiliaires sont satisfaites, le système est compatible. Deux cas de présentent :
  (a) si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, on décide alors d'attribuer aux inconnues en trop le statut de paramètres. On recherche alors les autres inconnues en fonctions de ces paramètres ;
  (b) si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations, on détermine alors les inconnues en commençant par la dernière équation et en "remontant".

On note

$$(S) : \left\{\begin{array}{l} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{array}\right.$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on a :

$$(S) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1}{\iff} \begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ \left(m - m^3\right) z = 2m\,(1-m) \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$$

On factorise le coefficient de z dans L_2 avec :

$$m - m^3 = m\left(1 - m^2\right) = m\,(1-m)\,(1+m).$$

Donc,

$$(S) \iff \begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ m\,(1-m)\,(1+m)\,z = 2m\,(1-m) \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$$

On remplace L_3 par $L_3 - mL_1$

$$(S) \iff \begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ m\,(1-m)\,(1+m)\,z = 2m\,(1-m) \\ \left(1 + m^2\right) y - m^2\,(1+m)\,z = 1 - m - 2m^2 \end{cases}$$

On factorise le trinôme du second degré du membre de droite de la dernière équation.

On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$ donc $m_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = \dfrac{1}{2}$ et $m_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = -1$ et ainsi

$$1 - m - 2m^2 = -2\left(m - \frac{1}{2}\right)(m+1) = (-2m+1)\,(m+1).$$

Le système devient :

$$(S) \iff \begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ m\,(1-m)\,(1+m)\,z = 2m\,(1-m) \\ \left(1 + m^2\right) y - m^2\,(1+m)\,z = (-2m+1)\,(m+1) \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ \left(1 + m^2\right) y - m^2\,(1+m)\,z = (-2m+1)\,(m+1) \\ m\,(1-m)\,(1+m)\,z = 2m\,(1-m) \end{cases}$$

Le système est maintenant échelonné, on va pouvoir distinguer les cas (**rappel 1.5**).

- **Si $m = 0$** alors le système devient :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$. Il y a trois inconnues pour deux équations et alors l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{(0,1,z),z\in\mathbb{R}\}$.

- **Si $m=1$** alors le système devient :

$$(S)\Longleftrightarrow\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2y-2z=-2 \\ 0=0 \end{cases}\underset{L_2\leftrightarrow\frac{1}{2}L_2}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} x-y+z=2 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftrightarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} x-y+z=2 \\ x=1 \end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} -y+z=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent au système suivant : $\begin{cases} z=1+y \\ x=1 \end{cases}$

Il y a trois inconnues pour deux équations et alors l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{(1,y,1+y),y\in\mathbb{R}\}$.

- **Si $m=-1$** alors le système devient : $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 2y=0 \\ 0=-4 \end{cases}$ et ainsi le système est incompatible.
- **Sinon** comme $m(1-m)(1+m)\neq 0$ le système devient :

$$(S)\Longleftrightarrow\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ \left(1+m^2\right)y-m^2(1+m)z=(-2m+1)(m+1) \\ z=\dfrac{2m(1-m)}{m(1-m)(1+m)} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ \left(1+m^2\right)y-m^2(1+m)z=(-2m+1)(m+1) \\ z=\dfrac{2}{1+m} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ \left(1+m^2\right)y-m^2(1+m)\dfrac{2}{(1+m)}=(-2m+1)(m+1) \\ z=\dfrac{2}{1+m} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ \left(1+m^2\right)y-2m^2=(-2m+1)(m+1) \\ z=\dfrac{2}{1+m} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - my + m^2 z = 2m \\ \left(1+m^2\right) y = (-2m+1)(m+1) + 2m^2 \\ z = \dfrac{2}{1+m} \end{array} \right.$$

On va réduire $(-2m+1)(m+1)+2m^2$:
$(-2m+1)(m+1)+2m^2 = -2m^2 - 2m + m + 1 + 2m^2 = 1 - m$ alors

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - my + m^2 z = 2m \\ \left(1+m^2\right) y = 1 - m \\ z = \dfrac{2}{1+m} \end{array} \right.$$

Comme $1 + m^2 \neq 0$ on a :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - my + m^2 z = 2m \\ y = \dfrac{1-m}{1+m^2} \\ z = \dfrac{2}{1+m} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = my - m^2 z + 2m \\ y = \dfrac{1-m}{1+m^2} \\ z = \dfrac{2}{1+m} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = m\dfrac{1-m}{1+m^2} - m^2 \dfrac{2}{(1+m)} + 2m \\ y = \dfrac{1-m}{1+m^2} \\ z = \dfrac{2}{1+m} \end{array} \right.$$

On va réduire $x = m\dfrac{1-m}{1+m^2} - m^2\dfrac{2}{1+m} + 2m$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m-m^2}{1+m^2} - \frac{2m^2}{1+m} + 2m \\ &= \frac{\left(m-m^2\right)(1+m)}{\left(1+m^2\right)(1+m)} - \frac{2m^2\left(1+m^2\right)}{\left(1+m^2\right)(1+m)} + \frac{2m\left(1+m^2\right)(1+m)}{\left(1+m^2\right)(1+m)} \\ &= \frac{m+m^2-m^2-m^3-2m^2-2m^4+\left(2m+2m^3\right)(1+m)}{\left(1+m^2\right)(1+m)} \\ &= \frac{m+m^2-m^2-m^3-2m^2-2m^4+2m+2m^2+2m^3+2m^4}{\left(1+m^2\right)(1+m)} \\ &= \frac{3m+m^3}{\left(1+m^2\right)(1+m)} = \frac{m\left(3+m^2\right)}{\left(1+m^2\right)(1+m)} \end{aligned}$$

et ainsi $\mathscr{S} = \left\{ \left(\dfrac{m\left(3+m^2\right)}{\left(1+m^2\right)(1+m)}, \dfrac{1-m}{1+m^2}, \dfrac{2}{(1+m)} \right) \right\}$.

3 Nombres complexes

I Forme trigonométrique

Exercice 3.1

Déterminer la forme algébrique de $z = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}$.

► **Solution**

Rappel de cours 3.1

Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle **module** de z le réel positif noté $|z|$ défini par :

$$\left[\ |z| = \sqrt{\big(\mathrm{Re}\,(z)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}\,(z)\big)^2}.\ \right]$$

Rappel de cours 3.2

Pour tout réel θ, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ appelé exponentielle complexe, le nombre complexe défini par

$$\left[\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).\ \right]$$

Rappel de cours 3.3

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ dont la forme algébrique est $z = a + \mathrm{i}b$ (où a et b sont des réels).
Pour passer de la forme algébrique de z à une forme trigonométrique, on commence par calculer son module à l'aide de la formule du **rappel 3.1**.

Puis on force la factorisation, dans la forme algébrique de z, par son module, ce qui donne $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\frac{b}{|z|}\right)$. Par construction, le nombre complexe $\left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\frac{b}{|z|}\right)$ est de module égal à 1. On peut donc déterminer θ, à l'aide des angles de référence, comme étant solution du système

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}.$$

Ainsi, $z = |z|\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)$.
Pour finir, on utilise le **rappel 3.2** pour utiliser la notation avec l'exponentielle complexe.
En définitive, une **forme trigonométrique** de z est

$$\left[\ z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\ \right]$$

où θ est appelé un **argument** de z.

La forme trigonométrique est bien adaptée au calcul de quotient et de puissance. C'est pour cette raison que nous allons d'abord écrire le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}$ sous forme trigonométrique.
Il faut dans un premier temps calculer le module de $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et de $1-\mathrm{i}$ (**rappel 3.1**) :

$$\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2 \text{ et } |1-\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Puis, on force la factorisation du numérateur et du dénominateur par leurs module respectifs :

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } 1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Enfin, on trouve des arguments θ_1 et θ_2 de ces complexes par identification : $\begin{cases} \cos(\theta_1) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$ convient. D'autre part, $\begin{cases} \cos(\theta_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_2) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{4}$ convient.
Finalement,

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \text{ et}$$
$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Donc,

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}.$$

Rappel de cours 3.4

Soit $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$,

$$\left[\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}.\ \right]$$

Ainsi,

$$\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}.$$

Rappel de cours 3.5

Formule de Moivre
Pour $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$,

$$\left[\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.\ \right]$$

On en déduit que $z=\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}=(\sqrt{2})^{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{140\pi}{12}}=2^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\times35\pi}{4\times3}}=2^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{35\pi}{3}}$.

Puisque, $35\pi=3\times5\times2\pi+5\pi$, on en déduit que : $\frac{35\pi}{3}=5\times2\pi+\frac{5\pi}{3}$.

Et ainsi, $z=2^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(5\times2\pi+\frac{5\pi}{3}\right)}$.

Rappel de cours 3.6

Soit $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$,

$$\left[\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}.\ \right]$$

Par suite, $z=2^{10}\mathrm{e}^{5\times2\pi\mathrm{i}}\times\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}}=2^{10}\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^5\times\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}}$.

Rappel de cours 3.7

$$\left[\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1.\ \right]$$

Donc,

$$z = 2^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = 2^{10}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2^{10}}{2}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 2^9\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$$
$$= 512\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 512 - \mathrm{i}512\sqrt{3}.$$

II Propriétés de la conjugaison

Exercice 3.2

Résoudre l'équation $|z+1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

► **Solution**

Comme $|z+1| \geq 0$ et $|z| + 1 \geq 0$ on a :

$$|z+1| = |z| + 1 \iff |z+1|^2 = \left(|z| + 1\right)^2.$$

Rappel de cours 3.8

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\left[\ |z|^2 = z \times \overline{z}.\ \right]$$

On calcule le carré du membre de gauche :

$$|z+1|^2 = (z+1)(\overline{z+1}).$$

Rappel de cours 3.9

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\left[\ \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}.\ \right]$$

Donc

$$|z+1|^2 = (z+1)(\overline{z} + \overline{1}) = (z+1)(\overline{z}+1)$$
$$= z\overline{z} + z + \overline{z} + 1.$$

Rappel de cours 3.10

Soient $z \in \mathbb{C}$,

$$\left[\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}. \right]$$

Ainsi, en réutilisant le **rappel 3.8**,

$$|z+1|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1.$$

On calcule le carrée du membre de droite :

$$(|z|+1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1.$$

L'égalité $|z+1| = |z|+1$ équivaut donc à $\operatorname{Re}(z) = |z|$.

Rappel de cours 3.11

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\left[z \in \mathbb{R}^+ \iff \operatorname{Re}(z) = |z|. \right]$$

Ainsi l'égalité $|z+1| = |z|+1$ est réalisée si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}^+$.

III Caractérisation des imaginaires purs

Exercice 3.3

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec $|a| = |b| = 1$ et $a \neq b$.
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b}$ est un imaginaire pur.

► **Solution**

Rappel de cours 3.12

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Alors :

$$\left[z \text{ est un imaginaire pur} \iff z + \overline{z} = 0. \right]$$

On pose $Z = \dfrac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b}$.

Rappel de cours 3.13

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\left[\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \right]$$

et si $z' \neq 0$

$$\left[\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}. \right]$$

Alors $Z + \overline{Z} = \dfrac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b} + \dfrac{\overline{z} + \overline{a}\,\overline{b}z - \overline{a} - \overline{b}}{\overline{a} - \overline{b}}$ d'après le **rappel 3.9**.
Puisque a et b sont de module 1, on a d'après le **rappel 3.8**, $a\overline{a} = |a|^2 = 1$ donc $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$ et de même $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
Z + \overline{Z} &= \frac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b} + \frac{\overline{z} + \frac{1}{ab}z - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\
&= \frac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b} + \frac{\overline{z} + \frac{1}{ab}z - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{b-a}{ab}} \\
&= \frac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b} + \left(\overline{z} + \frac{1}{ab}z - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \times \frac{ab}{b-a} \\
&= \frac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b} + \frac{ab\overline{z} + z - b - a}{b-a} \\
&= \frac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b} + \frac{ab\overline{z} + z - b - a}{-(a-b)} \\
&= \frac{z + ab\overline{z} - a - b}{a-b} - \frac{ab\overline{z} + z - b - a}{a-b} = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 3.4

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

► **Solution**

Rappel de cours 3.14

On notera $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Ainsi :

$$\left[\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}. \right]$$