

MPSI

MATHS

**1 DEVOIR CORRIGÉ
PAR SEMAINE**



avec corrigés commentés

Vincent Devinck



MPSI

MATHS

**1 DEVOIR CORRIGÉ
PAR SEMAINE**



Vincent DEVINCK

Professeur agrégé
et docteur en mathématiques
Professeur en classe préparatoire MPSI
au lycée Auguste Mariette (Boulogne-sur-Mer)



Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-115798

Dépôt légal : juin 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce livre est destiné aux étudiants de classe préparatoire de la filière MPSI et aux élèves de Terminale qui s'appêtent à intégrer cette formation.

Cet ouvrage contient une trentaine de problèmes portant sur des thèmes variés, et parcourant tout le programme de mathématiques de MPSI ; les sujets constituent la première partie du livre. Pour chacun d'eux, les thèmes abordés sont précisés et un temps de résolution est indiqué. À la fin de chaque problème, le lecteur pourra trouver des mots clés qui lui permettront de détecter quelles sont les notions, propriétés et formules qu'il est nécessaire de maîtriser pour traiter le sujet.

Dans la suite de l'ouvrage, un corrigé est proposé pour chaque devoir, le plus pédagogique possible, dans le souci d'exposer clairement les idées et les démarches du raisonnement. Chacun des corrigés est parsemé de nombreux commentaires ; on y rappelle des points de cours ou de méthodologie importants. Enfin, une dizaine de corrigés se terminent par un extrait de copie d'étudiant, tous les extraits sont commentés et un barème est parfois indiqué.

Faisons enfin un point sur l'utilisation de ce livre. Pour travailler un sujet, il faut d'abord maîtriser son cours. Insistons ensuite sur le fait qu'il ne serait d'aucune utilité de lire le corrigé sans avoir réfléchi au préalable aux différentes questions. Lorsqu'une notion de cours ou un point de méthodologie n'est pas acquis, c'est alors l'occasion de le retravailler (en reprenant par exemple les différents exemples qui l'illustrent dans le cours de mathématiques de l'élève).

Je remercie vivement les élèves du lycée Mariette de Boulogne-sur-Mer (et notamment Lina, Mathéo, Kenzo, Mathieu, Bastien et Nicolas) qui ont eu à cœur de participer à cet ouvrage en m'autorisant à exploiter leurs copies.

Bon courage !

Vincent Devinck

Sommaire

Index thématique	5
Introduction	9

Devoirs

■ Devoir 1.....	13	■ Devoir 16.....	57
■ Devoir 2.....	16	■ Devoir 17.....	60
■ Devoir 3.....	19	■ Devoir 18.....	63
■ Devoir 4.....	22	■ Devoir 19.....	66
■ Devoir 5.....	25	■ Devoir 20.....	69
■ Devoir 6.....	28	■ Devoir 21.....	72
■ Devoir 7.....	31	■ Devoir 22.....	75
■ Devoir 8.....	33	■ Devoir 23.....	77
■ Devoir 9.....	35	■ Devoir 24.....	80
■ Devoir 10.....	38	■ Devoir 25.....	83
■ Devoir 11.....	41	■ Devoir 26.....	86
■ Devoir 12.....	44	■ Devoir 27.....	89
■ Devoir 13.....	48	■ Devoir 28.....	92
■ Devoir 14.....	51	■ Devoir 29.....	95
■ Devoir 15.....	54	■ Devoir 30.....	98

Corrigés

■ Corrigé du devoir 1	103	■ Corrigé du devoir 16	316
■ Corrigé du devoir 2	115	■ Corrigé du devoir 17	327
■ Corrigé du devoir 3	125	■ Corrigé du devoir 18	335
■ Corrigé du devoir 4	134	■ Corrigé du devoir 19	348
■ Corrigé du devoir 5	158	■ Corrigé du devoir 20	362
■ Corrigé du devoir 6	173	■ Corrigé du devoir 21	369
■ Corrigé du devoir 7	187	■ Corrigé du devoir 22	383
■ Corrigé du devoir 8	195	■ Corrigé du devoir 23	395
■ Corrigé du devoir 9	217	■ Corrigé du devoir 24	406
■ Corrigé du devoir 10	227	■ Corrigé du devoir 25	420
■ Corrigé du devoir 11	241	■ Corrigé du devoir 26	434
■ Corrigé du devoir 12	261	■ Corrigé du devoir 27	445
■ Corrigé du devoir 13	274	■ Corrigé du devoir 28	456
■ Corrigé du devoir 14	287	■ Corrigé du devoir 29	470
■ Corrigé du devoir 15	301	■ Corrigé du devoir 30	480

Index thématique

Les tableaux suivants vous permettront de choisir les devoirs à travailler, suivant l'avancement de votre cours.

Ceux-ci sont généraux mais, en amont de chaque problème, des sous-thèmes plus précis peuvent être indiqués.

Problèmes Thèmes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Calcul algébrique		✓	✓							
Nombres complexes et trigonométrie				✓		✓	✓	✓		
Polynômes et fractions rationnelles								✓		
Structures algébriques, applications, arithmétique				✓					✓	
Espaces vectoriels							✓			
Matrices et applications linéaires									✓	
Suites numériques			✓			✓				
Fonctions usuelles et études de fonctions	✓	✓			✓	✓				✓
Calcul intégral et intégration							✓	✓		✓
Équations différentielles					✓					
Continuité, dérivabilité et convexité	✓	✓								✓
Analyse asymptotique						✓				

Problèmes	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Thèmes										
Nombres complexes et trigonométrie	✓	✓								
Polynômes et fractions rationnelles	✓				✓					
Structures algébriques, applications, arithmétique			✓				✓		✓	
Déterminants					✓					
Espaces vectoriels	✓		✓		✓		✓		✓	
Matrices et applications linéaires	✓		✓				✓	✓	✓	
Suites numériques		✓		✓		✓				
Séries numériques										✓
Fonctions usuelles et études de fonctions				✓				✓		
Calcul intégral et intégration		✓				✓		✓		✓
Continuité, dérivabilité et convexité		✓		✓				✓		✓
Analyse asymptotique						✓		✓		✓
Dénombrement, probabilités et variables aléatoires			✓							✓

Problèmes	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Thèmes										
Calcul algébrique				✓			✓	✓		
Nombres complexes et trigonométrie			✓	✓						
Polynômes et fractions rationnelles	✓		✓	✓	✓	✓			✓	
Matrices et applications linéaires	✓				✓					
Suites numériques			✓	✓		✓				
Séries numériques						✓				
Fonctions usuelles et études de fonctions				✓						
Calcul intégral et intégration		✓			✓	✓				
Continuité, dérivabilité et convexité		✓					✓			
Analyse asymptotique	✓	✓				✓	✓			
Dénombrement, probabilités et variables aléatoires								✓	✓	✓

Introduction

Quelques conseils méthodologiques pour réussir son année de MPSI

L'objectif de ce court chapitre introductif est de donner des conseils éclairés afin d'appréhender dans les meilleures conditions sa première année de MPSI en mathématiques.

Le programme de mathématiques en MPSI est dense, plus conceptuel qu'au lycée, mais il est loin d'être insurmontable. Selon le découpage choisi par l'enseignant, on comptera approximativement une trentaine de chapitres au programme, dont 90% concernent l'algèbre et l'analyse, équitablement répartis. Les 10% restants correspondent aux probabilités qui, même si elles peuvent paraître sous-représentées dans le programme, sont presque toujours évaluées dans les épreuves de mathématiques de chaque banque de concours.

Beaucoup de notions au programme ont déjà été étudiées au lycée ; celles-ci sont reprises, les résultats vus en Première et en Terminale sont démontrés, puis des concepts plus abstraits sont introduits afin de développer de nouveaux outils et de démontrer d'autres théorèmes.

Le rythme du cours en classe préparatoire devient plus soutenu, et avec dix heures de cours et deux heures de travaux dirigés (ce sont les séances d'exercices) au programme, du retard et des lacunes peuvent vite s'installer si l'on n'est pas suffisamment organisé. Il est donc nécessaire de fournir un travail sérieux et régulier, afin de progresser tout au long de l'année.

Une première étape cruciale est de s'imposer un temps de travail suffisant, chaque jour de la semaine, dans un environnement calme, tout en cherchant une méthode de travail personnelle qui soit efficace. Cette étape peut prendre du temps, mais il faudra persévérer. Signalons que la classe préparatoire est un marathon sur deux années, dans lequel l'objectif est de progresser tout au long de la formation, tant du point de vue des résultats que dans sa méthode de travail, afin d'affronter les concours dans les meilleures conditions possibles.

Donnons maintenant quelques conseils concrets pour le travail des mathématiques en MPSI. Il est tout d'abord primordial d'être en phase avec le professeur en classe, afin d'intégrer un maximum de notions pendant le cours ; c'est autant de notions qu'il ne sera pas nécessaire de chercher à comprendre seul devant son cours de mathématiques le soir. Aussi, il est important de travailler son cours au fur et à mesure, en reprenant notamment le cours de la journée pour la séance suivante. Enfin, le conseil le plus important que tout enseignant de mathématiques pourrait donner est de s'appropriier les notions en

travaillant à l'écrit : lire un cours de mathématiques ne présente aucun intérêt. En effet, c'est en cherchant à reproduire seul le raisonnement qui a permis à l'enseignant de résoudre un exercice, ou de démontrer un théorème, que l'on comprend les enjeux de la démonstration. Cette étape de recherche personnelle permet surtout de mettre le doigt sur ce qui n'a pas été compris : en se donnant un temps suffisant et raisonnable pour reproduire seul une démonstration de cours ou pour résoudre un exercice, on peut naturellement être bloqué et ne pas réussir. En consultant son cours, on comprend alors ce qui faisait défaut, ce qui est très constructif : à la prochaine tentative, il sera possible d'aller plus loin dans le raisonnement !

En MPSI, la quasi-totalité des propriétés et théorèmes sont démontrés (certains sont admis dans le programme), ce qui peut dérouter les élèves en début d'année. Les démonstrations sont essentielles pour comprendre la structure des mathématiques et les concepts étudiés. Notons que beaucoup d'enseignants exigent des étudiants de connaître un certain nombre d'entre elles pour les colles (c'est-à-dire les interrogations orales), et pour cause : il n'est pas rare que la démonstration d'un résultat soit demandé le jour du concours. On peut également être confronté à un exercice théorique dont la résolution est proche de certaines démonstrations dans le cours de mathématiques. Connaître les résultats au programme et savoir les démontrer est donc un indicateur d'une bonne maîtrise des notions.

DEVOIRS





Étude d'une famille de fonctions

Thèmes abordés

- ▷ Fonction exponentielle
- ▷ Études de fonctions
- ▷ Continuité



Temps de résolution : 1 heure et 30 minutes

★ ★ ★

Énoncé du problème

Le but du problème est l'étude d'une fonction notée g_k , où k est *une constante réelle fixée* telle que :

$$0 < k < e$$

Dans la partie I, on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie II.

I – Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (2 - x)e^x - k$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. (a) Étudier le sens de variations de f et dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
(b) Calculer $f(1)$ et donner son signe.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet exactement deux solutions, l'une appartenant à $]-\infty, 1[$ et l'autre appartenant à $]1, +\infty[$.
Dans la suite, on notera α_k la solution appartenant à $]-\infty, 1[$ et β_k celle appartenant à $]1, +\infty[$.
(b) En déduire le signe de f sur \mathbb{R} .

4. En exploitant l'égalité $f(\alpha_k) = 0$, montrer que :

$$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$$

On démontrerait de la même manière (et il n'est pas demandé de le faire) que :

$$e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$$

II – Étude d'une fonction g_k

5. Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = e^x - kx$$

- (a) Étudier le sens de variations de u sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variations de u .
(b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x - kx > 0$$

On rappelle que $0 < k < e$.

6. Soit g_k la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

- (a) Déterminer les limites de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_k(x) = \frac{kf(x)}{(e^x - kx)^2},$$

la fonction f ayant été introduite dans la partie I.

- (c) En déduire le tableau de variations de g_k sur \mathbb{R} . Calculer $g_k(1)$.
7. On nomme M_k et N_k les points de la courbe \mathcal{C}_k d'abscisses respectives α_k et β_k .
(a) En utilisant la question 4. (partie I), montrer que :

$$g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$$

On montrerait de la même manière (et il n'est pas demandé de le faire) que

$$g_k(\beta_k) = \frac{1}{\beta_k - 1}.$$

- (b) Déduire de la question précédente que lorsque k varie, les points M_k et N_k sont sur une même courbe fixe \mathcal{H} dont on donnera une équation.
8. Représentations graphiques pour des valeurs particulières de k .
(a) Déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

- (b) Prouver que $\alpha_2 = 0$.
- (c) Représenter graphiquement les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{H} sur le même graphique.
On donne $\alpha_1 = -1, 1$, $\beta_1 = 1, 8$ et $\beta_2 = 1, 6$.



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Théorème de la bijection, croissances comparées, études de fonctions, calculs de limites



Inégalités logarithmiques

Thèmes abordés

- ▷ Fonction logarithme népérien
- ▷ Études de fonctions
- ▷ Manipulations d'inégalités et calculs de limites
- ▷ Dérivabilité d'une fonction en un point



Temps de résolution : 1 heure et 45 minutes

★ ★ ★

Énoncé du problème

I – Étude d'une fonction

On admettra dans cette première partie les deux propriétés suivantes :

$$\mathcal{P} : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

et :

$$\mathcal{Q} : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

Celles-ci seront démontrées dans la partie III.

On considère la fonction :

$$f : \begin{cases}]-1, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{(1+t) \ln(1+t)}{t} \end{cases}$$

1. Justifier que f admet des limites finies en -1 et en 0 , notées respectivement ℓ_{-1} et ℓ_0 .

On peut donc prolonger par continuité la fonction f à l'intervalle $[-1, +\infty[$ en posant :

$$f(-1) = \ell_{-1} \quad \text{et} \quad f(0) = \ell_0$$

Dans la suite, on note encore f ce prolongement.

2. Montrer que f n'est pas dérivable en -1 mais qu'elle l'est en 0 . Préciser la valeur de $f'(0)$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[-1, +\infty[$.
On dressera notamment le tableau de variations de f et on précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Représenter graphiquement l'allure de la courbe de f .

II – Une inégalité

Soient a et b des nombres réels strictement positifs tels que $a \leq b$. On considère la fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{cases}$$

5. Montrer que la fonction g est croissante sur \mathbb{R}_+^* .
6. En déduire que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq \ln(2)^2$$

III – Démonstration des propriétés \mathcal{P} et \mathcal{Q}

7. Démontrer la propriété \mathcal{P} .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction :

$$f_n : \begin{cases}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t) + \sum_{k=1}^n \frac{(-t)^k}{k} \end{cases}$$

8. Justifier que la fonction f_n est dérivable sur $] - 1, +\infty[$ et donner une expression de f'_n sans symbole somme.
9. Déterminer les variations de f_n sur $] - 1, +\infty[$, selon que n soit pair ou impair.
En déduire le signe de la fonction f_n sur $] - 1, +\infty[$ selon la parité de n .
10. (a) Justifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

- (b) En déduire que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

11. (a) Justifier que la fonction :

$$\varphi : t \mapsto \frac{\ln(1+t) - t + \ln(1-t) + t}{t^2}$$

admet une limite en 0 à déterminer.

(b) En déduire la limite :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-t) + t}{t^2}$$

et conclure quant à la propriété \mathcal{L} .



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Propriétés de la fonction logarithme népérien, limite d'une fonction en un point, dérivabilité d'une fonction en un point, croissances comparées, inégalité de concavité du logarithme



Inégalité de Hardy

Thèmes abordés

- ▷ Sommes simples, sommes doubles
- ▷ Produits
- ▷ Manipulations d'inégalités
- ▷ Limites de suites



Temps de résolution : 1 heure et 30 minutes

★ ★ ★

Énoncé du problème

L'objectif de ce problème est de démontrer le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k},$$

appelée *inégalité de Hardy*.

I – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des nombres réels quelconques.

1. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2$$

2. En déduire l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

II – Inégalité de Hardy

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, \dots, a_n des nombres réels strictement positifs. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$S_k = a_1 + \dots + a_k = \sum_{\ell=1}^k a_\ell$$

3. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_k = k(k+1)$$

(a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer S_k .

(b) Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

(c) Montrer alors que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

On revient ici au cas général : a_1, \dots, a_n désignent des nombres réels strictement positifs quelconques.

4. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \leq \left(\sum_{\ell=1}^k a_\ell \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell} \right)$$

5. En déduire que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{k}{S_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell}$$

6. Montrer alors que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 4 \sum_{\ell=1}^n \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$$

7. Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

8. En déduire l'inégalité de Hardy.

III – Optimalité de la constante 2 dans l'inégalité de Hardy

Le but de cette dernière partie est de démontrer que la constante 2 du membre de droite de l'inégalité de Hardy est *optimale*.

On considère ici un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

L'objectif est de montrer qu'on a nécessairement $\lambda \geq 2$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{h_n} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

(b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = +\infty$.

10. En considérant la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = k,$$

montrer que $\lambda \geq 2$.



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Manipulations de sommes simples et doubles, gestion d'une somme télescopique, inégalité de convexité de la fonction exponentielle, théorème de comparaison pour les suites



Devoir 4

Homographies du plan complexe préservant \mathbb{U}

Thèmes abordés

- ▷ Nombres complexes
- ▷ Applications



Temps de résolution : 2 heures

★ ★ ★

Énoncé du problème

On note \mathbb{U} le cercle unité du plan complexe, c'est-à-dire :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On appelle *homographie du plan complexe associée à (a, b, c, d)* l'application h qui à tout nombre complexe z tel que $cz + d \neq 0$ associe le nombre complexe :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

L'objectif de ce problème est de caractériser les homographies h du plan complexe, dont le domaine de définition contient \mathbb{U} , et qui préservent l'ensemble \mathbb{U} , c'est-à-dire telles que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

I – Résultats préliminaires

Dans les trois questions suivantes, nous établissons trois résultats techniques qui seront utiles dans la suite.

1. Établir que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta)$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\left(\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2 \operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = 0 \right) \implies a = b = 0$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = |b|$. Justifier qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = be^{i\theta}$.

II – Étude de deux familles d’homographies

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. On considère les deux applications φ_θ et $\psi_{\alpha,\theta}$ d’expressions :

$$\varphi_\theta(z) = \frac{e^{i\theta}}{z} \quad \text{et} \quad \psi_{\theta,\alpha}(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$$

4. Préciser les ensembles de définition des applications φ_θ et $\psi_{\theta,\alpha}$, notés respectivement \mathcal{D}_θ et $\Delta_{\theta,\alpha}$.

Justifier que les ensembles obtenus contiennent \mathbb{U} .

5. Montrer que l’application φ_θ préserve l’ensemble \mathbb{U} et justifier l’égalité $\varphi_\theta(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.

6. Montrer que l’application $\psi_{\theta,\alpha}$ préserve l’ensemble \mathbb{U} .

7. Montrer que :

$$(\psi_{\theta,\alpha})^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{U},$$

où $(\psi_{\theta,\alpha})^{-1}(\mathbb{U})$ désigne l’image réciproque de \mathbb{U} par l’application $\psi_{\theta,\alpha}$.

8. (a) Justifier que les applications :

$$\varphi_\theta \circ \varphi_\theta \quad \text{et} \quad \psi_{-\theta, -\alpha e^{i\theta}} \circ \psi_{\theta,\alpha}$$

sont bien définies sur les ensembles \mathcal{D}_θ et $\Delta_{\theta,\alpha}$ respectivement, puis les calculer.

- (b) En déduire que les applications :

$$\varphi_\theta : \mathcal{D}_\theta \longrightarrow \mathcal{D}_\theta \quad \text{et} \quad \psi_{\theta,\alpha} : \Delta_{\theta,\alpha} \longrightarrow \Delta_{-\theta, -\alpha e^{i\theta}}$$

sont bijectives et déterminer leurs applications réciproques.

- (c) En déduire l’image directe de \mathbb{U} par l’application $\psi_{\theta,\alpha}$, c’est-à-dire l’ensemble $\psi_{\theta,\alpha}(\mathbb{U})$.

III – Caractérisation des homographies préservant \mathbb{U}

Nous souhaitons démontrer dans cette partie que les seules homographies qui préservent l’ensemble \mathbb{U} sont celles présentées dans la partie I.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et h l’homographie d’expression :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

On suppose que $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

9. Établir que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{a}b e^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{c}d e^{-i\theta})$$

10. En déduire les relations :

$$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \quad \text{et} \quad \bar{a}b = \bar{c}d$$

11. Conclure quant à l'expression de h si $a = 0$.

12. On suppose maintenant que $a \neq 0$.

(a) Montrer que :

$$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$$

(b) Montrer que $|a| \neq |c|$.

(c) Conclure quant à l'expression de l'homographie h .

On a donc démontré que les homographies du plan complexe qui préservent l'ensemble \mathbb{U} sont les applications φ_θ et $\psi_{\theta,\alpha}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Images directe et réciproque d'un ensemble par une application, composition d'applications, notion d'application bijective et de bijection réciproque, propriétés du module



Résolution d'une équation fonctionnelle

Thèmes abordés

- ▷ Généralités sur les fonctions
- ▷ Équations différentielles



Temps de résolution : 2 heures

* * *

Énoncé du problème

Soit $k \in \mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est solution du problème (*) si f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et si :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = kf\left(\frac{1}{x}\right)$$

I – Quelques exemples

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé. On note f_λ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\lambda : x \mapsto (\lambda + \ln(x))\sqrt{x}$$

1. (a) Étudier les variations de f_λ sur \mathbb{R}_+^* . On dressera son tableau de variations.
- (b) Donner une équation cartésienne de la tangente (T_λ) à la courbe représentative de f_λ en le point d'abscisse 1.
- (c) Montrer que les droites (T_λ) sont *concourantes*, c'est-à-dire passent toutes par un même point (indépendant de λ).
- (d) Sur un même graphique, tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ pour :

$$\lambda = -2, \quad \lambda = -3 \quad \text{et} \quad \lambda = -4$$

2. On note (E) l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

dont on cherche les solutions sur \mathbb{R}_+^* .

- (a) Résoudre l'équation différentielle (E).
 (b) Résoudre le problème de Cauchy suivant sur \mathbb{R}_+^* :

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ y(1) = \lambda \end{cases}$$

3. Montrer que l'on peut choisir λ de telle sorte que f_λ soit une solution de (\star) . On précisera la valeur du réel k associé.

II – Résolution dans le cas $k = -\frac{1}{2}$

Dans cette partie, on suppose que f est une solution de (\star) dans le cas où $k = -\frac{1}{2}$.

4. On note g la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

- (a) Montrer que g est une fonction constante.
 (b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) - \frac{f(x)}{2x} = -\frac{f(1)}{\sqrt{x}}$$

5. Montrer que si $f(1) = 0$, alors f est la fonction nulle.
 6. On suppose que $f(1) \neq 0$. À l'aide des résultats de la partie I, déterminer une expression de f .

III – Résolution dans le cas $k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

On suppose désormais que $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$.

On note (E_k) l'équation différentielle suivante dont on cherche les solutions définies sur \mathbb{R}_+^* :

$$x^2 y'' + k^2 y = 0 \tag{E_k}$$

7. Démontrer qu'il existe un nombre réel $\alpha > \frac{1}{2}$ à déterminer tel que la fonction $y : x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E_k) sur \mathbb{R}_+^* .

Dans la suite, α désigne le nombre réel obtenu.

8. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On considère la fonction :

$$z : x \mapsto \frac{y(x)}{x^\alpha}$$

de telle sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = x^\alpha z(x)$$

Montrer que y est solution de (E_k) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle linéaire (E'_k) d'ordre 1 à déterminer.

9. Résoudre (E'_k) .
10. En déduire que l'ensemble des solutions de (E_k) est celui des fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* de la forme :

$$x \mapsto ax^\alpha + bx^{1-\alpha},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

11. Déterminer les solutions de (\star) dans le cas $k \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Équation différentielle linéaire du premier ordre, équation différentielle linéaire du second ordre, problème de Cauchy, caractérisation des fonctions (dérivables) constantes sur un intervalle, tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point



Irrationalité de π

Thèmes abordés

- ▷ Suites numériques
- ▷ Suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$
- ▷ Trigonométries circulaire et hyperbolique
- ▷ Comparaison de suites



Temps de résolution : 3 heures

★ ★ ★

Énoncé du problème

On considère la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}} \quad (*)$$

1. Étudier les variations de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

sur son domaine de définition, ainsi que le signe de $x \mapsto f(x) - x$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bien définie.
3. On suppose que $c_0 \in]1, +\infty[$. Représenter graphiquement la fonction f et la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer la limite de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

I – Convergence de deux suites couplées

On définit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par leurs premiers termes $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et par les relations de récurrences couplées :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{cases}$$

4. Justifier l'existence des deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Étudier le cas $a_0 = b_0$.
6. On suppose que $a_0 < b_0$.
 - (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $a_n < b_n$.
 - (b) En déduire que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite.

De la même manière, on peut montrer que si $a_0 > b_0$, alors on a $a_n > b_n$ pour tout entier naturel n et les deux suites sont encore adjacentes dans ce cas.

II – Limites des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Pour tout entier naturel n , on pose $q_n = \frac{a_n}{b_n}$.

7. Montrer que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (*) et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = b_n q_{n+1}$$

8. On suppose que $a_0 < b_0$.
 - (a) Justifier l'existence et l'unicité du nombre $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $q_0 = \cos(\alpha)$.
 - (b) Montrer que :

$$q_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad b_1 = b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

- (c) Pour tout entier naturel n , donner plus généralement l'expression de q_n , b_n et a_n en fonction de α , b_0 et n .
 - (d) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de limite $b_0 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.
9. *Étude d'un exemple*

On suppose, dans cette question uniquement, que :

$$a_0 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad b_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$A_n = \frac{1}{a_n} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{b_n}$$

Justifier que les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent de limite π .

10. On se place maintenant dans le cas $a_0 > b_0$.
 - (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{ch}(x) = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$$

(b) Donner brièvement :

- ★ l'expression de q_n et b_n en fonction de α , b_0 et n ;
- ★ ainsi que la limite de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

III – Vitesse de convergence

Dans cette partie, on suppose que $a_0 < b_0$.

11. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}}{2}(b_n - a_n)$$

12. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{4}$$

13. Conclure que $a_n - b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{4^n}\right)$.

Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Étude pratique d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, représentation graphique d'une suite, théorème de la limite monotone, formules de duplication du cosinus et du sinus, raisonnement par récurrence, théorème de la bijection, fonctions ch et sh, équivalents usuels, définition d'une suite dominée par une autre au voisinage de $+\infty$



Deux familles génératrices d'un même espace vectoriel

Thèmes abordés

- ▷ Espaces vectoriels (généralités et cadre de la dimension finie)
- ▷ Nombres complexes
- ▷ Trigonométrie
- ▷ Calcul intégral



Temps de résolution : 1 heure et 15 minutes

★ ★ ★

Énoncé du problème

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n et g_n les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \cos(x)^n$$

En particulier, les fonctions f_0 et g_0 sont constantes égales à 1. On pose encore :

$$F_n = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) \quad \text{et} \quad G_n = \text{Vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

Ainsi définis, F_n et G_n sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (espace des fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs réelles).

L'objectif de cet problème est de démontrer que :

$$F_n = G_n$$

I – Le cas particulier $n = 2$

Dans cette partie, on travaille exclusivement dans le cas où $n = 2$.

1. Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \quad f_k \in G_2$$

En déduire l'inclusion $F_2 \subset G_2$.

2. Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. Quelle est la dimension de F_2 ? Justifier.
3. Montrer que la famille (g_0, g_1, g_2) est libre. Quelle est la dimension de G_2 ?

4. Conclure.

Dans toute la suite du problème, on cherche à démontrer l'égalité annoncée dans le préambule pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

II – Une inclusion

5. Un calcul préliminaire.

Soient $p, q \in \mathbb{R}$.

(a) Justifier que :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

(b) En déduire que :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+2} + f_n = 2f_{n+1}f_1$$

7. Montrer alors que pour tout entier naturel n , on a $f_n \in G_n$.

8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n \subset G_n$.

III – Utilisation de la dimension

9. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $I_{k,\ell} = \int_0^{2\pi} f_k(t)f_\ell(t) dt$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) En utilisant la question précédente, montrer que la famille (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre.
- (b) En déduire la dimension de F_n .
- (c) Justifier que $\dim(G_n) \leq n + 1$.
- (d) Conclure que $F_n = G_n$.



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Espace vectoriel de dimension finie, sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice d'un espace vectoriel, famille libre, dimension d'un espace vectoriel, théorème de la base extraite, technique de l'angle moitié, raisonnement par récurrence, formule des produits (permettant de linéariser une expression de la forme $\sin(p)\sin(q)$ où $p, q \in \mathbb{R}$)



Calcul d'une intégrale généralisée

Thèmes abordés

- ▷ Calcul intégral
- ▷ Fractions rationnelles
- ▷ Trigonométrie



Temps de résolution : 2 heures

★ ★ ★

Énoncé du problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la fonction :

$$\varphi_n : \begin{cases}]0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^{2n}} dt \end{cases}$$

- (a) Montrer que la fonction φ_n est bien définie et est monotone sur $]0, 1]$.
 (b) Justifier que φ_n est dérivable sur $]0, 1]$ et calculer sa dérivée. Retrouver le sens de variation obtenu à la question 1.(a).

2. Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1], \quad \varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt = \frac{1}{2} \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\omega_k = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$.

- (a) Donner la forme scindée sur \mathbb{C} du polynôme $Q_n = X^{2n} + 1$.
 (b) Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{C}(X)$, la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{1 + X^{2n-2}}{1 + X^{2n}}$$

- (c) En déduire que :

$$F_n = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\omega_k)^2}{X^2 - 2 \cos(\omega_k)X + 1}$$

(d) i. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\pi}{2}$$

ii. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\sin(\omega_k)^2}{t^2 - 2 \cos(\omega_k)t + 1} dt = (\pi - \omega_k) \sin(\omega_k)$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{2 \sin(\theta)}$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\theta) = \frac{\sin(n\theta)^2}{\sin(\theta)}$$

5. En déduire la valeur des sommes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\omega_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \sin(\omega_k)$$

6. Conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_n(x) = \frac{\pi}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Théorème fondamental de l'analyse, changement de variable, primitive de l'inverse d'une fonction polynomiale du second degré, factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, calcul de sommes trigonométriques



Matrices magiques et semi-magiques

Thèmes abordés

- ▷ Calcul matriciel
- ▷ Structures algébriques (groupes et anneaux)



Temps de résolution : 1 heure et 30 minutes

* * *

Énoncé du problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On souhaite étudier la notion de matrice *semi-magique* dont la définition est la suivante.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite *semi-magique* s'il existe $\sigma(A) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sigma(A) \right) \quad \text{et} \quad \left(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sigma(A) \right)$$

Autrement dit, A est une matrice semi-magique si et seulement si toutes ses lignes et toutes ses colonnes donnent la même somme.

On note $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

I – Généralités

1. Montrer que la matrice J est semi-magique et donner la valeur de $\sigma(J)$.
2. Soient $A, B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$A + \lambda B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma(A + \lambda B) = \sigma(A) + \lambda \sigma(B)$$

3. Étude de l'ensemble $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$

(a) Justifier que $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir que :

$$A \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, JA = AJ = \lambda J) \quad (*)$$

et préciser la valeur de $\sigma(A)$.

(c) En déduire que pour tous $A, B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$AB \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$$

(d) Établir que $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$.

(e) Soit $A \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\sigma(A) \neq 0, \quad A^{-1} \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$$

II – Matrices magiques dans le cas $n = 3$

Dans toute cette partie, on se place dans le cas $n = 3$ et on étudie les matrices *magiques* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *magique* si elle est semi-magique et si de plus :

$$\sigma(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1}$$

On note $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Soient $A, B \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $A + \lambda B \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

5. Montrer que :

$$\forall A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad \sigma(A) = 3a_{2,2} \quad (**)$$

6. Montrer que si $A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

7. À l'aide de (**), déterminer quelles sont les matrices symétriques et antisymétriques de $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

8. (a) Montrer que (ici uniquement, n est quelconque) :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! (S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), M = S + A,$$

où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) En déduire que toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique.

9. Conclure que :

$$\text{Mag}_3(\mathbb{R}) = \{ \alpha J + \beta K + \gamma L \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \},$$

où :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Produit matriciel de deux matrices (formule), structure de sous-groupe, structure de sous-anneau, matrice symétrique, matrice antisymétrique, raisonnement par analyse-synthèse



Calcul de la limite d'une suite d'intégrales

Thèmes abordés

- ▷ Fonctions usuelles
- ▷ Continuité
- ▷ Dérivabilité
- ▷ Calcul intégral
- ▷ Intégration



Temps de résolution : 2 heures

★ ★ ★

Énoncé du problème

Les parties I et II sont indépendantes, mais sont utilisées dans la partie III.

I – Calculs d'intégrales

Pour tout nombre réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_a(t) = t^a$$

1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur \mathbb{R}_+). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ si $a \geq 1$.

Soient a et b deux nombres réels positifs ou nuls. On pose :

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t)g_b(1-t) dt$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a, b)$. Comparer $I(a, b)$ et $I(b, a)$.
3. Soient a et b deux nombres réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre les intégrales $I(a+1, b)$ et $I(a, b+1)$.
4. Calculer $I(a, 0)$. En déduire que, pour tout entier naturel b , on a :

$$I(a, b) = \frac{b!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b+1)}$$

5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p, q)$ à l'aide de factorielles.
6. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2p+1} \cos(\theta)^{2q+1} d\theta,$$

où p et q sont deux entiers naturels.

On utilisera le changement de variable $t = \sin(\theta)^2$.

II – Étude d'une fonction

Pour tout nombre réel a strictement positif, on note f_a la fonction d'expression :

$$f_a(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x} \right)$$

7. Préciser l'ensemble de définition de f_a .
On note \mathcal{C}_a la courbe représentant la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.
8. Si a et x sont deux nombres réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement :

$$\frac{a}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}$$

9. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations complet).
10. Donner l'allure des courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 sur un même graphique.
11. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)_{n \geq a}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq a \implies y_n = \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n$$

Étudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite y .

III – Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout nombre réel positif ou nul x et pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n} \right)^n u^x du$$

12. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$$

13. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
14. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad u \geq U \implies e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}$$

(c) Montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout nombre réel positif ou nul x , on pose :

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$$

15. Démontrer la relation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+1) = (x+1)F(x)$$

En déduire la valeur de $F(k)$ pour tout entier naturel k .



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Prolongement par continuité d'une fonction en un point, théorème sur la limite de la dérivée, changement de variable, intégration par parties, raisonnement par récurrence, théorème des accroissements finis, croissances comparées, définition de la limite, propriété de croissance de l'intégrale, équivalents usuels



Une même équation pour trois anneaux

Thèmes abordés

- ▷ Nombres complexes
- ▷ Polynômes
- ▷ Fractions rationnelles
- ▷ Espaces vectoriels
- ▷ Trigonométrie
- ▷ Matrices
- ▷ Applications linéaires



Temps de résolution : 2 heures et 30 minutes

★ ★ ★

Énoncé du problème

Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

I – Autour des racines d'un polynôme

On pose $A = (X + 1)^{2n} - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que :

$$\exists B \in \mathbb{R}[X], \quad A = XB$$

On précisera le degré de B , ainsi que ses coefficients dominant et constant.

On note dans la suite b_0 le coefficient constant de B .

2. Déterminer les racines de A dans \mathbb{C} .

On posera $z_0 = 0$, et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront écrites sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

3. Montrer que :

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4. En calculant de deux manières le produit $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$, en déduire les valeurs de Q_n puis de P_n .

5. On pose $F = \frac{1}{A} \in \mathbb{R}(X)$. Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

II – Une équation dans $\mathcal{L}(E)$

On travaille dans un \mathbb{C} -espace vectoriel E différent de l'espace nul. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , Id_E l'application identité de E et θ l'endomorphisme nul de E .

On rappelle que, par convention,

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad f^0 = \text{Id}_E.$$

On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation :

$$(f + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E = \theta,$$

d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

6. Déterminer les homothéties vectorielles solutions de cette équation.

7. Déterminer les valeurs des sommes :

$$S = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

8. Si s est une symétrie vectorielle de E , exprimer :

$$(s + \text{Id}_E)^{2n} - \text{Id}_E$$

en fonction de s et de Id_E .

En déduire les symétries de E qui sont solutions de l'équation proposée.

III – Une équation dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans \mathbb{C} . On note I la matrice identité et 0 la matrice nulle de cet espace vectoriel. On pose :

$$G = \left\{ M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\} \quad \text{où} \quad M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

9. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle :

$$(M + I)^{2n} - I = 0 \quad (*)$$

d'inconnue $M \in G$.

On note E le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

Soit $M = M_{a,b}$ un élément de E tel que $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et u l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice M .

10. Déterminer une base (ε_1) de $E_1 = \text{Ker}(u - (a + 2b)\text{Id}_E)$.
11. Déterminer une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $E_1 = \text{Ker}(u - (a - b)\text{Id}_E)$.
12. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E . On la note \mathcal{C} dans la suite.
13. Déterminer la matrice D de u dans la base \mathcal{C} .
14. On note P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1} en précisant la méthode adoptée et en détaillant les calculs.
15. Exprimer M en fonction de P , D et P^{-1} .
16. Montrer que M est solution de $(*)$ si et seulement si D est solution de $(*)$.
17. Déterminer toutes les matrices D solutions de $(*)$.
18. Conclure quant à l'ensemble des solutions de $(*)$ dans G .



Notions, formules ou propriétés à maîtriser

Forme trigonométrique d'un nombre complexe, ensemble des racines de l'unité, décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, endomorphismes et représentation matricielle, symétries vectorielles, matrices de passages et formules de changement de bases, noyau d'une application linéaire



Calcul de $\zeta(2)$

Thèmes abordés

- ▷ Suites numériques
- ▷ Trigonométrie
- ▷ Continuité
- ▷ Dérivabilité
- ▷ Calcul intégral et intégration



Temps de résolution : 2 heures et 30 minutes

★ ★ ★

Énoncé du problème

L'objectif de ce problème est de montrer que la suite de terme général :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

est convergente et de calculer sa limite, notée $\zeta(2)$.

I – Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \right)_{n \geq 1}$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(p) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p} dt \leq \frac{1}{k^p}$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad S_n(p) - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t^p} dt \leq S_{n-1}(p)$$