

MATHÉMATIQUES

TOUT LE COURS EN FICHES

Licence 1 • CAPES

— Claire David

Maître de conférences à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

— Sami Mustapha

Professeur à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

2^e édition

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Illustration de couverture : © delabo - Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements		d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
--	--	--

© Dunod, 2017

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077194-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Comment utiliser cet ouvrage ?	VIII
Avant-propos	X

Partie 1 Calculus

Nombres réels	2
Fiche 1 Les ensembles de nombres	2
Fiche 2 Intervalles, voisinages, bornes	6
Limites	8
Fiche 3 Limite d'une fonction en un point	8
Fiche 4 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$	12
Fiche 5 Propriétés des limites – Opérations sur les limites	14
Fiche 6 Notations de Landau	16
Fonctions numériques	18
Fiche 7 Domaine de définition d'une fonction, graphe	18
Focus La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind	21
Fiche 8 Comment définir une fonction ?	22
Fiche 9 Majorations et minorations	24
Fiche 10 Fonctions monotones	26
Fiche 11 Parité, imparité	28
Fiche 12 Symétries	30
Fiche 13 Fonctions périodiques	32
Fonctions usuelles	33
Fiche 14 Fonctions puissances entières	33
Fiche 15 Fonctions polynômes et fonction valeur absolue	35
Focus John Napier et les tables logarithmiques	38
Fiche 16 La fonction logarithme népérien	39
Fiche 17 La fonction exponentielle	41
Fiche 18 Fonctions puissances « non entières »	43
Focus Leibniz et la fonction exponentielle	44
Fiche 19 Fonctions circulaires	45
Fiche 20 Fonctions hyperboliques	47
Focus L'origine de la trigonométrie	49
Continuité	51
Fiche 21 Continuité d'une fonction en un point	51
Fiche 22 Fonctions continues sur un intervalle	55

Dérivabilité	58
Fiche 23 Dérivabilité en un point	58
Fiche 24 Dérivabilité sur un intervalle	61
Focus Les dérivées au fil des disciplines : notations, usages, motivations	65
Fiche 25 Dérivées successives	67
Fiche 26 Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle	69
Fiche 27 Formule de Taylor-Lagrange	73
Fonctions réciproques	74
Fiche 28 Fonctions réciproques	74
Fiche 29 Les fonctions trigonométriques inverses	77
Fiche 30 Les fonctions hyperboliques inverses	81
Développements limités	83
Fiche 31 Développements limités	83
Fiche 32 Formule de Taylor-Young	86
Fiche 33 Développements limités usuels	91
Fiche 34 Opérations algébriques et composition des développements limités	94
Développements asymptotiques	97
Fiche 35 Développements asymptotiques	97
Convexité	98
Fiche 36 Convexité	98
Équations différentielles linéaires du 1^{er} et 2nd ordre	102
Fiche 37 Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre homogènes	102
Fiche 38 Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre avec second membre	105
Focus Fabrication du savon (saponification d'un ester en milieu basique)	113
Fiche 39 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	115
Focus Oscillations libres d'un système masse-ressort amorti	121
Fonctions de plusieurs variables	124
Fiche 40 Topologie	124
Fiche 41 Fonctions de plusieurs variables	130
Fiche 42 Les systèmes de coordonnées usuelles	132
Fiche 43 Limites, continuité et dérivation	134
Exercices	142
Corrigés	147

Partie 2 Algèbre

Le plan complexe – Les nombres complexes	179
Focus Les nombres complexes	180
Fiche 44 Le corps des nombres complexes	182

Fiche 45	Représentation géométrique des nombres complexes	185
Fiche 46	Inversion des nombres complexes	188
Fiche 47	Propriétés fondamentales des nombres complexes	190
Fiche 48	Complément : les polynômes de Tchebychev	192
Fiche 49	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes	195
Fiche 50	Factorisation des polynômes dans le corps $\mathbb{C}$	198
Fiche 51	Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples	203
Fiche 52	Transformations du plan : translations, homothéties	214
Fiche 53	Transformations du plan : rotations	216
Fiche 54	Transformations du plan : similitudes	218
Focus	<i>Transformations complexes, fractales, et représentations de la nature</i>	222
Matrices		224
Fiche 55	Matrices de taille 2×2	224
Fiche 56	Déterminant de matrices de taille 2×2	226
Fiche 57	Matrices de taille 3×3	228
Fiche 58	Déterminant de matrices de taille 3×3	231
Fiche 59	Matrices de taille $m \times n$	234
Fiche 60	Opérations sur les matrices	236
Fiche 61	Matrices remarquables	238
Fiche 62	Introduction aux déterminants de matrices de taille $n \times n$	242
Fiche 63	Inversion des matrices carrées	244
Focus	<i>Les matrices et leurs applications</i>	249
Fiche 64	Systèmes linéaires	251
Fiche 65	Vecteurs	255
Fiche 66	Barycentres	259
Fiche 67	Droites, plans	263
Fiche 68	Produit scalaire	266
Focus	<i>Produit scalaire, espaces fonctionnels et calcul numérique</i>	270
Fiche 69	Produit vectoriel	271
Fiche 70	Aires et volumes	273
Focus	<i>Géométrie euclidienne – ou non ? Encore des matrices !</i>	275
Transformations linéaires du plan		277
Fiche 71	Bases et transformations linéaires du plan	277
Fiche 72	Changement de base en dimension 2, et déterminant d'une application linéaire	281
Fiche 73	Conjugaison – Matrices semblables de taille 2×2	283
Fiche 74	Opérateurs orthogonaux en dimension 2	285
Fiche 75	Rotations vectorielles du plan	287
Transformations linéaires de l'espace		290
Fiche 76	Bases de l'espace $\mathbb{R}^3$	290
Fiche 77	Transformations linéaires de l'espace $\mathbb{R}^3$	291

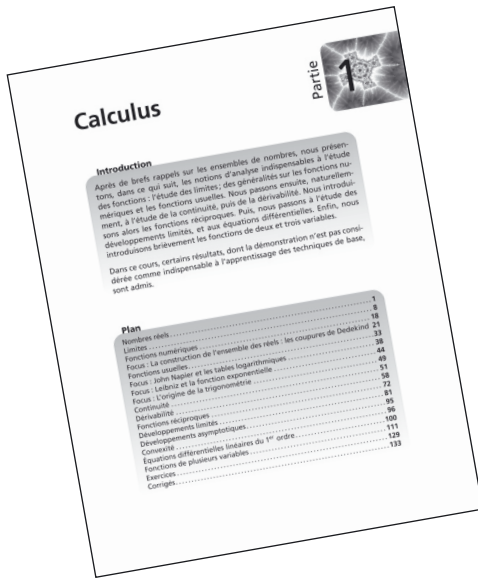
Fiche 78	Changement de base en dimension 3	295
Fiche 79	Conjugaison – Matrices semblables de taille 3×3	297
Fiche 80	Opérateurs orthogonaux de l'espace $\mathbb{R}^3$	299
Fiche 81	Rotations vectorielles de l'espace $\mathbb{R}^3$	301
L'espace $\mathbb{R}^n$		303
Fiche 82	Vecteurs en dimension n , $n \geq 2$	303
Fiche 83	Espace engendré par une famille de vecteurs – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$	305
Fiche 84	Transformations linéaires de l'espace $\mathbb{R}^n$	308
Fiche 85	Changement de base	312
Fiche 86	Conjugaison – Matrices semblables de taille $n \times n$	314
Fiche 87	Réduction des matrices carrées	316
Focus	<i>Groupe spécial orthogonal et cristallographie</i>	320
Focus	<i>Diagonalisation – La toupie de Lagrange (et de Michèle Audin)</i>	322
Espaces vectoriels		323
Fiche 88	Les espaces vectoriels	323
Fiche 89	Sous-espaces vectoriels	327
Fiche 90	Somme de sous-espaces vectoriels	329
Fiche 91	Projecteurs, symétries	330
Exercices		332
Corrigés		340

Partie 3 Analyse

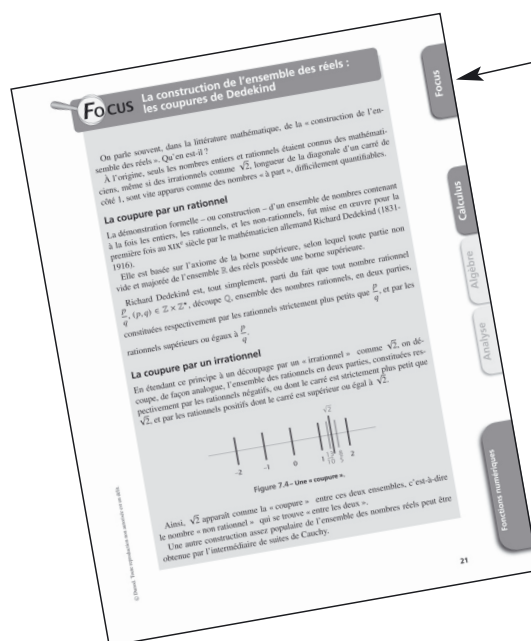
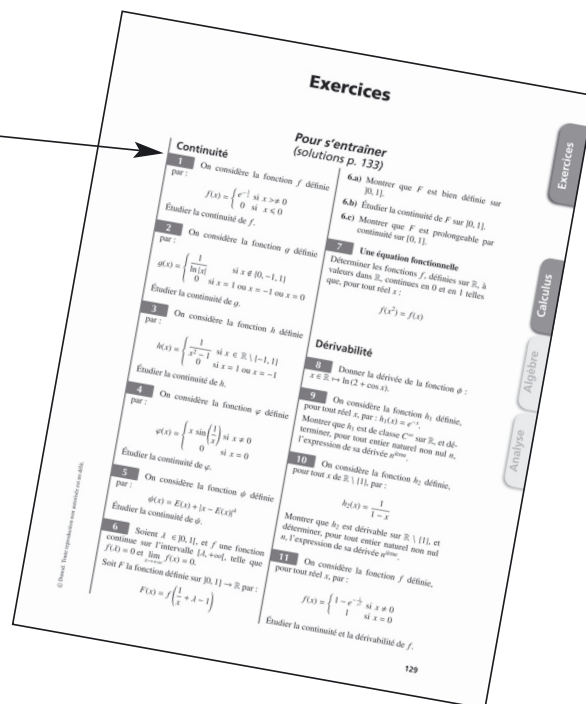
Suites		385
Fiche 92	Qu'est-ce qu'une suite ? L'espace des suites et opérations sur les suites	386
Fiche 93	Les différents types de suites	389
Focus	<i>Suites arithmético-géométriques et finance</i>	394
Fiche 94	Étude d'une suite	395
Fiche 95	Majorants, minorants d'une suite réelle – Croissance et décroissance	398
Fiche 96	Techniques d'étude des suites réelles	400
Fiche 97	Convergence	402
Fiche 98	Convergence des suites monotones	405
Fiche 99	Opérations sur les limites de suites	407
Fiche 100	Convergence des suites homographiques réelles	410
Fiche 101	Suites extraites	415
Fiche 102	Suites de Cauchy	417
Fiche 103	Comparaison des suites réelles	419
Focus	<i>Suites et systèmes dynamiques – L'attracteur de Hénon</i>	423

Intégrales	424
Fiche 104 Qu'est-ce qu'une intégrale ?	424
Fiche 105 Intégrale d'une fonction en escaliers	426
Fiche 106 Intégrale d'une fonction continue par morceaux	431
Fiche 107 Calcul intégral	438
Fiche 108 Primitives de fractions rationnelles	444
Fiche 109 Calcul approché d'intégrales	446
Focus <i>Intégrale de Riemann vs intégrale de Lebesgue</i>	453
Exercices	455
Corrigés	461
Annexes	490
Formulaire de trigonométrie	490
Dérivées usuelles	492
Dérivées des fonctions réciproques usuelles	493
Primitives usuelles	494
Limites usuelles des fonctions puissances	495
Bibliographie	497
Index	499

Comment utiliser cet ouvrage ?



Des exercices corrigés pour s'entraîner



Des focus pour découvrir des applications des mathématiques ou approfondir un point du cours

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants du cycle L1 des filières universitaires scientifiques, ou des classes préparatoires. Il se base sur nos cours donnés en première année de Licence à l'UPMC (université Pierre et Marie Curie).

Face aux demandes croissantes de nos étudiants, qui recherchaient un ouvrage de référence complet mais abordable, ainsi que des exercices d'application corrigés, nous nous sommes lancés dans la conception de ce livre qui, nous l'espérons, sera un outil utile pour les générations d'étudiants à venir.

Cet ouvrage est donc le fruit d'un compromis : dans ce volume condensé, nous avons essayé de donner suffisamment d'éléments recouvrant l'ensemble des mathématiques de première année. Cet ouvrage correspond aussi à l'arrivée des nouveaux programmes universitaires et des classes préparatoires. Pour mieux assurer la jonction avec les mathématiques enseignées au lycée, nous avons opté, pour la première partie d'analyse, relative à l'étude des fonctions, à une présentation de type « Calculus », inspirée de l'esprit des « textbooks » anglo-saxons, qui permet d'aborder plus facilement le reste du programme, plus « classique », sur les suites et le calcul intégral. Pour l'algèbre, la présentation reprend celle de l'ouvrage *Calcul Vectoriel* (Collection *Sciences Sup*), en allant un peu plus loin : $\mathbb{R}^n$, réduction, espaces vectoriels.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction, nous demandons l'indulgence du lecteur pour les éventuelles imperfections qui pourraient subsister ; qu'il n'hésite pas à nous les signaler.

Claire David
Claire.David@upmc.fr

Sami Mustapha
Sami.Mustapha@upmc.fr

Remerciements

Nous remercions vivement toutes les personnes dont la relecture et les remarques ont contribué à améliorer la version initiale du manuscrit :

les membres du comité de lecture, pour leur relecture extrêmement minutieuse et leurs remarques très pertinentes ;

- Sylvie Benzoni, Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan.
- Laurent Di Menza, Université de Reims, Laboratoire de Mathématiques de Reims (LMR).
- Jean-Pierre Escofier, Université de Rennes, Institut Mathématique de Rennes.
- Sandrine Gachet, Professeur de Mathématiques, Lycée Gustave Eiffel, Dijon.
- Chloé Mullaert, Professeur de Mathématiques, Lycée Paul Valéry, Paris.
- Laure Quivy, ENS Cachan et Université Paris XIII, Centre de Mathématiques et leurs applications (CMLA).
- Lamia Attouche, étudiante à l'UPMC, Paris.
- Alexis Prel, étudiant à l'UPMC, Paris.

mais aussi Albert Cohen, Ramona Anton, Patrick Polo, Adnène Benabdessellem, Matthieu Solnon, Eugénie Poulon, Daniel Hoehener, Julien Piera Vest, Laurent Kaczmarek, Romain Cayla.

Calculus

Partie

1

Introduction

Après de brefs rappels sur les ensembles de nombres, nous présentons, dans ce qui suit, les notions d'analyse indispensables à l'étude des fonctions : l'étude des limites ; des généralités sur les fonctions numériques et les fonctions usuelles. Nous passons ensuite, naturellement, à l'étude de la continuité, puis de la dérivabilité. Nous introduisons alors les fonctions réciproques. Puis, nous passons à l'étude des développements limités, et aux équations différentielles. Enfin, nous introduisons brièvement les fonctions de deux et trois variables.

Dans ce cours, certains résultats, dont la démonstration n'est pas considérée comme indispensable à l'apprentissage des techniques de base, sont admis.

Plan

Nombres réels	2
Limites	8
Fonctions numériques	18
<i>Focus : La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind</i>	21
Fonctions usuelles	33
<i>Focus : John Napier et les tables logarithmiques</i>	38
<i>Focus : Leibniz et la fonction exponentielle</i>	44
<i>Focus : L'origine de la trigonométrie</i>	49
Continuité	51
Dérivabilité	58
<i>Focus : Les dérivées au fil des disciplines : notations, usages, motivations</i>	65
Fonctions réciproques	74
Développements limités	83
Développements asymptotiques	97
Convexité	98
Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} et 2 nd ordre	102
<i>Focus : Fabrication du savon (saponification d'un ester en milieu basique)</i>	113
<i>Focus : Oscillations libres d'un système masse-ressort amorti</i>	121
Fonctions de plusieurs variables	124
Exercices	142
Corrigés	147

Les ensembles de nombres

Un **ensemble** E est une collection d'objets, qui constituent les « éléments » de l'ensemble. Le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini, ou infini.

1. Notation

Pour décrire l'ensemble, on utilise des accolades, à l'intérieur desquelles on écrit les éléments de l'ensemble.

Suivant les cas, on peut, simplement, placer, à l'intérieur des accolades, la liste des éléments de l'ensemble ; ainsi, dans le cas d'un ensemble E avec un nombre fini d'éléments $e_1, \dots, e_n$, où n est un nombre entier positif, on écrit :

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ou bien, dans le cas d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée $\mathcal{P}$, on écrit

$$E = \left\{x \mid \mathcal{P}(x)\right\} \quad \text{ou encore} \quad \{x, \mathcal{P}(x)\} \quad \text{ou encore} \quad \{x ; \mathcal{P}(x)\}$$

ce qui désigne ainsi l'ensemble des éléments x tels que la propriété $\mathcal{P}$ soit vérifiée pour x .

Exemples

1. $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres 1, 2, 3 et 4.
2. $\{3, 4, 5, 6, \dots\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.
3. $\left\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid x \text{ est impair} \right\} = \{1, 3, 5\}$.

► Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls, est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► Les nombres pairs

L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$$

► $k\mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

Étant donné un entier naturel k , $k\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels multiples de k :

$$k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$$

► Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire des entiers qui sont soit positifs ou nuls, ou négatifs ou nuls, est noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► $\alpha \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$

Étant donné un réel α , $\alpha \mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels de la forme αk , où k est un entier :

$$\alpha \mathbb{Z} = \{\alpha k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple

$$2\pi \mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

► Les nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec $q \neq 0$, est noté $\mathbb{Q}$.

► Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

► $\overline{\mathbb{R}}$

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est ce que l'on appelle la « droite réelle achevée », ou encore, l'adhérence de $\mathbb{R}$)

► La notation « $\star$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $\star$ », cela signifie que l'on exclut 0 ; ainsi, $\mathbb{N}^\star$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls ; $\mathbb{Z}^\star$ désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls ; etc.

► La notation « $+$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $+$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres positifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^+$ (qui est aussi égal à $\mathbb{N}$), désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls ; $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

► La notation « $-$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $-$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres négatifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}^-$ (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}$), désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls ; $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

► La notation « $\star_+$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $\star_+$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}_+^\star$ (qui est aussi égal à $\mathbb{N}^\star$), désigne l'ensemble des entiers strictement positifs ; $\mathbb{R}_+^\star$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs ; etc.

► La notation « $\star_-$ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « $\star_-$ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement négatifs de cet ensemble ; ainsi, $\mathbb{Z}_-^\star$ (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}^\star$), désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs ; $\mathbb{R}_-^\star$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs ; etc.

Propriété

On a :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où le symbole $\subset$ signifie « inclus dans ».

2. Les ensembles

► Ensemble vide

Un ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide**, et noté $\emptyset$.

Exemple

$\{n \in 3\mathbb{N}, n \text{ pair}\}$ ne contient aucun nombre : c'est l'ensemble vide.

► Intersection d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **intersection**, notée $E_1 \cap E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E_1 et à E_2 :

$$E_1 \cap E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$$

► Union d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **union**, notée $E_1 \cup E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E_1 , ou à E_2 :

$$E_1 \cup E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$$

► Différence de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **différence**, notée $E_1 \setminus E_2$, est l'ensemble E_1 privé de E_2 :

$$E_1 \setminus E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ et } x \notin E_2\}$$

Exemples

1. $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ est l'ensemble des réels différents de 1 et de 2.
2. $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas multiples de π .

► Complémentaire d'un ensemble

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 tels que E_2 soit inclus dans E_1 (que l'on écrit $E_2 \subset E_1$), l'ensemble $E_1 \setminus E_2$ est le complémentaire de E_2 dans E_1 , noté $\complement_{E_1} E_2$:

$$\complement_{E_1} E_2 = E_1 \setminus E_2$$

Exemple

$$\complement_{\mathbb{R}} \{0\} = \mathbb{R}^*$$

► Produit cartésien de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2$, est l'ensemble des couples d'éléments de la forme (x_1, x_2) , où le premier élément x_1 appartient à E_1 , et le second, x_2 , à E_2 :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Exemples

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in \mathbb{R} \text{ et } x_2 \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des couples de réels.
2. $\mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2), n_1 \in \mathbb{N} \text{ et } n_2 \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des couples d'entiers naturels.

► Produit cartésien de trois ensembles

Étant donnés trois ensembles E_1 , E_2 et E_3 , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2 \times E_3$, est l'ensemble des triplets d'éléments de la forme (x_1, x_2, x_3) , où le premier élément x_1 appartient à E_1 , le second, x_2 , à E_2 , et le troisième, x_3 , à E_3 :

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x_1, x_2, x_3), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \text{ et } x_3 \in E_3\}$$

► Produit cartésien de n ensembles, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Étant donnés un entier naturel $n \geq 2$, et n ensembles $E_1, \dots, E_n$, leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times \dots \times E_n$, est l'ensemble des n -uplets d'éléments de la forme $(x_1, \dots, x_n)$, où $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$:

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$$

► Application

Étant donnés deux ensembles E et F , une **application** φ de E dans F associe, à chaque élément de E , un et un seul élément de F . E est l'ensemble de départ, F , celui d'arrivée.

Pour tout élément x de E , l'unique élément de F ainsi mis en relation avec x par l'application φ est noté $\varphi(x)$, et appelé image de x . x est un antécédent de $\varphi(x)$. On écrit :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Exemples

1.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, appelée application identité de $\mathbb{N}$.

2.

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

est une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

► Fonction

Étant donnés deux ensembles de nombres E et F , une *fonction* f de E dans F associe, à chaque élément x de E , au plus un élément de F appelé alors image de x par f (ce qui signifie donc que tous les éléments de E n'ont pas nécessairement une image par f). E est l'ensemble de départ, F , celui d'arrivée. L'ensemble des éléments de E possédant une image par f est appelé domaine de définition de f , et noté $\mathcal{D}_f$. Elle permet de définir une application de $\mathcal{D}_f$ dans F .

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Elle permet de définir une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

Intervalles, voisinages, bornes

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée, appelée **droite des réels**, où il faut pouvoir se repérer. À cet effet, on introduit les notions d'intervalle et de voisinage d'un point.

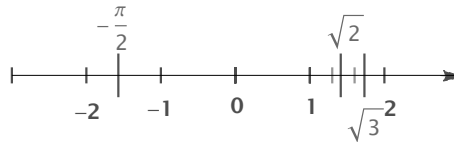


Figure 2.1 – La droite des réels.

1. Intervalles

► Intervalle fermé et borné (ou segment)

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$$

► Intervalle ouvert

On appelle intervalle ouvert tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

ou $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\} \quad , \quad b \in \mathbb{R}$

ou encore $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

où $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels.

► Intervalle ouvert et borné

On appelle intervalle ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

► Intervalle semi-ouvert et borné

On appelle intervalle semi-ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$

► Intervalle fermé

Par convention, tout ensemble de la forme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

ou $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\} \quad , \quad b \in \mathbb{R}$

est considéré comme étant un intervalle fermé.

► Ensemble vide

L'ensemble, noté $\emptyset$, qui ne contient aucun nombre réel, est aussi un intervalle, appelé ensemble vide.

► Singleton

On appelle singleton un ensemble ne contenant qu'un seul élément, et qui est donc de la forme $\{a\}$, où a est un nombre réel.

► Intervalle

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ l'un des ensembles définis ci-dessus, ou bien $\mathbb{R}$ tout entier.



Un singleton est un intervalle fermé (le singleton $\{a\}$ est donc assimilé à l'intervalle fermé $[a, a]$).

► Adhérence d'un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Son adhérence $\bar{I}$ est l'ensemble tel que :

- si I est un segment, alors $\bar{I} = I$;
- si I est de la forme $]a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\bar{I} = [a, b]$;
- si I est de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$;
- si I est de la forme $] - \infty, a[$ ou $] - \infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} =] - \infty, a] \cup \{-\infty\}$;
- si I l'ensemble vide $\emptyset$, alors $\bar{I} = \emptyset$.

2. Voisinage

► Voisinage d'un point

On appelle voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]a - \eta, a + \eta[$, où η est un réel strictement positif et tel que $\eta < a$.



On peut étendre la notion de voisinage à $+\infty$ ou $-\infty$; ainsi, un voisinage de $+\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0, +\infty[$, où x_0 est un nombre réel quelconque. De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $] - \infty, x_0[$, où x_0 est un nombre réel quelconque.

3. Les intervalles de $\mathbb{R}$

Dans ce qui suit, a, b, x_0 sont des réels tels que $a < b$. Le tableau suivant reprend les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$.

$[a, b]$	Segment
$]a, b[$	Intervalle ouvert et borné
$]a, b]$	Intervalle semi-ouvert et borné (ouvert à gauche, fermé à droite)
$[a, b[$	Intervalle semi-ouvert et borné (fermé à gauche, ouvert à droite)
$\emptyset$	Ensemble vide
$\{a\}$	Singleton
$]x_0, +\infty[$	Voisinage de $+\infty$
$[x_0, +\infty[$	
$] - \infty, x_0[$	Voisinage de $-\infty$
$] - \infty, x_0]$	
$] - \infty, +\infty[$	$\mathbb{R}$ tout entier

Limite d'une fonction en un point

1. Limite finie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $\lim_a f = \ell$.

Exemple

On considère la fonction qui, à tout x de $] -1, 1[$, associe $\sqrt{1 - x^2}$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2} = 0$$

► Notation 0^+

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I .

On dit que f **tend vers 0^+ en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$ ou $\lim_a f = 0^+$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^+ en $+\infty$** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x > A \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim_{+\infty} f = 0^+$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^+ en $-\infty$** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x < -A \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim_{-\infty} f = 0^+$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$



On utilisera aussi la notation 0^+ pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs supérieures.

► Notation 0^-

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I .

On dit que f **tend vers 0^- en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^-$ ou $\lim_a f = 0^-$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^- en $+\infty$** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x > A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim_{+\infty} f = 0^-$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^- en $-\infty$** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x < -A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim_{-\infty} f = 0^-$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^4 = 0^-$$



On utilisera aussi la notation 0^- pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs inférieures.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0^-$$

► Notation a^+ , $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^+ signifie que l'on tend vers a par valeurs supérieures.

► Notation a^- , $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^- signifie que l'on tend vers a par valeurs inférieures.

2. Limite infinie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite « plus l'infini (on note $+\infty$) » en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_a f(x) = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite « moins l'infini (on note $-\infty$) » en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_a f = -\infty$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

3. Limite finie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^+} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x - 1}) = 2$$

4. Limite finie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus petit que a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^-} f = \ell$.

5. Limite infinie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^+} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a^+} f = -\infty$.

6. Limite infinie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^-} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a^-} f = -\infty$.

Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

1. Limite finie d'une fonction en l'infini

Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en « plus l'infini (on note $+\infty$) »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

Si f est définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, et si ℓ désigne encore un réel, on dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en « moins l'infini (on note $-\infty$) »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = 1$$

2. Limite infinie d'une fonction en plus l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

3. Limite infinie d'une fonction en moins l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, en étant négatif, $f(x)$ devient aussi très grand en valeur absolue, en étant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

4. Forme indéterminée

On appelle **forme indéterminée** une limite que l'on ne sait pas déterminer ; cela correspond donc à des quantités que l'on ne peut pas quantifier **de façon exacte**, comme, par exemple, le quotient de $+\infty$ avec $+\infty$.

Propriétés des limites

Opérations sur les limites

1. Propriétés des limites

► Unicité de la limite

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. Si f possède une limite en a , celle-ci est unique.

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de I , et ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Alors, si f est définie dans un voisinage à gauche de a , et dans un voisinage à droite de a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; m et M sont deux réels. Alors :

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < M$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :

$$f(x) < M$$

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > m$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :

$$f(x) > m$$

► Limites et comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; m et M sont deux réels. Alors, **si f et g ont des limites finies en a** , et s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

on a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

► Limites et minoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

► Limites et majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \geq g(x)$, et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

► Théorème des gendarmes

Soient f et g et h trois fonction définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; ℓ est un réel. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$, alors : $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$

2. Opérations sur les limites

► Limite d'une somme de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; ℓ et ℓ' sont deux réels finis. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

► Limite d'un produit de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell \ell'$
ℓ , avec $\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
ℓ , avec $\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	Forme indéterminée
0	$-\infty$	Forme indéterminée

► Limite d'un quotient de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a dans $\bar{I}$; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	ℓ' , avec $\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
ℓ , avec $\ell > 0$	0^+	$+\infty$
ℓ , avec $\ell > 0$	0^-	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	0^+	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	0^-	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée