PCSI/PTSI

Colles de **mathématiques**

Rémi Coutens

NOUVEAUX PROGRAMMES !

410 EXERCICES CORRIGÉS

- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

PCSI/PTSI

Colles de **mathématiques**

PCSI/PTSI



Colles de **mathématiques**

Rémi Coutens

ellipses

Collection Colles de Prépas
dirigée par François Pantigny

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur
www.editions-ellipses.fr

Je remercie M. Pantigny pour ses pertinents conseils, ses compétences en LaTeX et ses magnifiques illustrations. Merci également à Emmanuelle Guillant pour son amitié fidèle.

Ce livre est dédié à mes enfants pour les joies et la fierté qu'ils me procurent.

ISBN 9782340-048690
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Bienvenue en PCSI et en PTSI !
En arrivant en classe préparatoire, les interrogations orales de mathématiques suscitent quelques appréhensions. Elles deviendront rapidement moins impressionnantes et vous comprendrez que cette spécificité du système des « prépas » est extrêmement efficace pour assimiler les notions et progresser.

Néanmoins, le cours étant conséquent, l'étudiant ne se sent pas toujours au point le jour de l'interrogation. Nous proposons une gamme d'exercices pour permettre de s'entraîner davantage.

Dans l'objectif d'une préparation efficace, les exercices de ce livre sont classés en trois catégories :

- Les « exercices axés sur le calcul ». Souvent application quasiment directe du cours, ils ont pour objectif, via la pratique calculatoire, de vérifier la connaissance et la compréhension des notions du cours.
- Les « exercices axés sur le raisonnement ». Ces exercices demandant plus de recul, leur objectif est de renforcer l'assimilation des concepts.
- Les « exercices avec questions ouvertes ». Ces exercices amènent l'étudiant à avoir sa propre réflexion, à construire sa démonstration ou son contre-exemple selon les cas.

Plutôt que l'originalité ou la difficulté, nous avons privilégié des exercices qui nous ont paru formateurs. Néanmoins, certains exercices, signalés par une ou deux étoiles, sont d'un niveau plus élevé.

Les corrections des exercices figurent après la liste des énoncés. Chaque exercice est entièrement corrigé, parfois de plusieurs manières lorsque cela nous a semblé utile.

En début de chaque chapitre se trouve une figure, réalisée par M. Pantigny, qui illustre soit une notion, soit un exercice. Nous encourageons le lecteur à faire le plus souvent possible ses propres représentations.

Enfin, permettons-nous un conseil. Parmi vos camarades de classe, les membres de votre « trinôme » seront ceux que vous côtoierez le plus. N'hésitez pas à en faire de véritables partenaires en partageant les exercices de ce livre. Vous pourrez soit travailler le même exercice et confronter vos solutions, soit travailler chacun un exercice différent, lire le corrigé proposé et exposer oralement une solution à vos camarades.

Nous adressons tous nos vœux de réussite aux lecteurs de ce livre.

Sommaire

1	Compléments de calcul algébrique	3
2	Arithmétique	19
3	Trigonométrie, nombres complexes	31
4	Injections, surjections	57
5	Systèmes linéaires	75
6	Suites numériques	85
7	Limites, continuité	101
8	Dérivation	115
9	Fonctions usuelles	135
10	Fonctions circulaires réciproques	157
11	Développements limités	169
12	Équations différentielles linéaires	191
13	Primitives et intégrales	207
14	Séries numériques	231
15	Calcul matriciel	249
16	Polynômes et fractions rationnelles	263
17	Espaces vectoriels	279
18	Applications linéaires	297
19	Matrices des applications linéaires	313
20	Déterminants	329
21	Espaces préhilbertiens (PCSI)	345
22	Géométrie (PTSI)	367
23	Dénombrement, probabilités	389
24	Variables aléatoires	403

Compléments de calcul algébrique

1

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x.\frac{1-x^{10}}{1-x}$
	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^2.\frac{1-x^9}{1-x}$
		x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^3.\frac{1-x^8}{1-x}$
			x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^4.\frac{1-x^7}{1-x}$
				x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^5.\frac{1-x^6}{1-x}$
					x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^6.\frac{1-x^5}{1-x}$
						x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^7.\frac{1-x^4}{1-x}$
							x^8	x^9	x^{10}	$x^8.\frac{1-x^3}{1-x}$
								x^9	x^{10}	$x^9.\frac{1-x^2}{1-x}$
									x^{10}	$x^{10}.\frac{1-x}{1-x}$
x	$2x^2$	$3x^3$	$4x^4$	$5x^5$	$6x^6$	$7x^7$	$8x^8$	$9x^9$	$10x^{10}$	

Une somme en triangle.

Le calcul de la somme de chaque colonne est immédiat.
La somme de chaque ligne est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
Le calcul se fait donc sans problème (on a supposé $x \neq 1$).
En égalant les deux manières de calculer la somme de tous les termes du carré, on obtient

$$\sum_{k=1}^{10} kx^k = \sum_{k=1}^{10} x^k \frac{1-x^{11-k}}{1-x}$$

Or le membre de droite se calcule aussi avec des suites géométriques... On retrouve le résultat de l'exercice n° 5.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Formule du binôme de Newton*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la valeur des sommes suivantes :

1) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}$,
2) $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$,
3) $U_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}2^k$,
4) $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}5^{n-k}$,
5) $W_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{-k}$,
6) $X_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^{k/2}$.

Exercice 2

Montrer, à l'aide de la formule de Pascal, que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+n}{n} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

1) Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Vérifier $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.
2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

Exercice 4 *Formule du pion*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k 3^{n-k} = 2n5^{n-1}$.

Exercice 5 *Somme de termes d'une suite géométrique et application*

Soient x un réel et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n \text{ et } T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1) Rappeler les valeurs de $S_n(1)$ et de $T_n(1)$.
2) Pour $x \neq 1$, rappeler la valeur de $S_n(x)$, calculer $(1-x)T_n(x)$ et en déduire $T_n(x)$.
3) Pour $x \neq 1$, retrouver $T_n(x)$ en remarquant que $T_n(x) = S_n'(x)$.

Exercice 6 *Sommes doubles*

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

1) $A_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}(i+j)\right)$.
2) $B_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} ij\right)$.
3) $C_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\max(i,j)\right)$.

Exercice 7 *Classique*

1) Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le produit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Exercice 8 *Produit d'entiers pairs (respectivement impairs) consécutifs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n) \text{ et } q_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1).$$

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n et q_n à l'aide de factorielles.

Exercice 9 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$.

Exercice 10 Calculer la somme $S = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \binom{n}{i}(j+i)$.

Exercice 11

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \cos(\pi/4)\cos(\pi/8)\cdots\cos(\pi/2^{n+2}) = \prod_{k=0}^{n} \cos(\pi/2^{k+2}).$$

1) Rappeler la valeur de p_0.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier p_n à l'aide de l'égalité $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les sommes A_n et B_n suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 2^k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^k.$$

1) Justifier que A_n et B_n sont des entiers et que $A_n + \sqrt{2}B_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}$.
2) Montrer que $A_n^2 - 2B_n^2 = 1$.
3) Préciser de même des entiers C_n et D_n tels que $C_n + \sqrt{2}D_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}$. Donner la valeur $C_n^2 - 2D_n^2$.

Exercice 13 *Somme dans un colonne du triangle de Pascal*

1) Montrer que pour tous p et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant p$, on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} \qquad (\star)$$

2) Retrouver, à l'aide de $(\star)$, la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$, puis celle de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 14 *Somme double*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j} \right) = \frac{n^2}{2}.$$

Indication : On pourra remarquer que $\frac{i}{i+j} = \frac{i+j-j}{i+j}$.

Exercice 15 *Somme triangulaire*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier :

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} \right) = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Exercice 16 ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{k+1}$.

2) En déduire :

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

3) Montrer que $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n}$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Tous les calculs qui suivent utilisent $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

1) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} = (1-1)^n = 0$, car $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque
Pour $n = 0$, on aurait $S_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} 1^k (-1)^{0-k} = \binom{0}{0} 1^0 (-1)^{0-0} = 1$.

2) $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

Remarque
Ce résultat montre que la somme de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n.

3) Pour $k = 0$, on a $2^k = 2^0 = 1$ et $\binom{n}{0} = 1$. D'où :

$$U_n = -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = -1 + (2+1)^n = -1 + 3^n.$$

4) De même, pour $k = n$, on a $5^{n-k} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$. D'où :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 1^k 5^{n-k} - 1 + (1+5)^n = -1 + 6^n.$$

5) $W_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

6) On a $2^{k/2} = \left(2^{k/2}\right)^k = \left(\sqrt{2}\right)^k$. Donc :

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{2}\right)^k = \left(1 + \sqrt{2}\right)^k.$$

Exercice 2

Rappelons que la formule de Pascal donne la valeur de la somme de deux coefficients adjacents (colonnes k et $k+1$) d'une même ligne m du triangle de Pascal :

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$ ».

- Initialisation

  On a $\sum_{k=0}^{0} \binom{p+k}{k} = \binom{p}{0} = 1$ et $\binom{p+1}{0} = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors en isolant le dernier terme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}\right) + \binom{p+n+1}{n+1} && \text{d'après } \mathcal{P}(n)\\ &= \binom{p+n+1}{n} + \binom{p+n+1}{n+1} && \text{formule de Pascal}\\ &= \binom{p+n+1+1}{n+1}.\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$.

Exercice 3

1) Puisque $p \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ et $\binom{k}{p}$ s'expriment à l'aide de factorielles et on a :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{n!}{p!} \cdot \frac{1}{(n-k)!(k-p)!}.$$

De même, $p \leqslant n$ et $n-k \leqslant n-p$ donc :

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)!}{(k-p)!(n-p-k+p)!} = \frac{n!}{p!} \cdot \frac{1}{(k-p)!(n-k)!}.$$

D'après ces deux égalités, on a $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.

2) Si $k < p$, on a $\binom{k}{p} = 0$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} &= 0 + \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} && \text{d'après 1)}\\ &= \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} && \text{linéarité}\\ &= \binom{n}{p} \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n-p}{k-p} && \text{changement d'indice}\\ &= \binom{n}{p} \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^{i+p} \binom{n-p}{i} && (-1)^{i+p} = (-1)^p(-1)^i\\ &= \binom{n}{p}(-1)^p \sum_{i=0}^{n-p} \binom{n-p}{i}(-1)^i && \text{formule du binôme}\\ &= \binom{n}{p}(-1)^p(1-1)^{n-p}.\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \begin{cases}(-1)^n & \text{si } p = n,\\ 0 & \text{si } p \in [\![1, n-1]\!]\end{cases}$, car $0^{n-p} = \begin{cases}1 & \text{si } p = n,\\ 0 & \text{si } p \in [\![1, n-1]\!]\end{cases}$.

Exercice 4

1) Comme $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Puisque k et n sont non nuls, on a $k! = k(k-1)!$ et $n! = n(n-1)!$. D'où :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Comme $(n-1)-(k-1) = n-1-k+1 = n-k$, on a montré $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2) On commence par isoler le terme pour $k = 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k 3^{n-k} &= 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^k 3^{n-k} && \text{question précédente}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}2^k 3^{n-k} && \text{linéarité de la somme}\\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}2^k 3^{n-k} && \text{changement d'indice}\\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}2^{i+1} 3^{n-1-i} && \text{linéarité de la somme}\\
&= 2n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}2^{i} 3^{n-1-i} && \text{formule du binôme}\\
&= 2n(2+3)^{n-1}\\
&= 2n5^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 5 *Somme de termes d'une suite géométrique et application*

1) On a $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et on sait que $T_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) On sait que pour $x \neq 1$, $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x).

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}\\
xT_n(x) &= x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n && L_1 - L_2\\
(1-x)T_n &= 1 + x + \cdots + x^{n-1} - nx^n && \sum_{k=0}^{n-1} x^k = S_{n-1}(x) = \frac{1-x^n}{1-x}\\
&= \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \neq 1, \quad T_n(x) = \frac{1 - x^n - nx^n(1-x)}{(1-x)^2}.$$

CORRECTIONS

3) Pour $x \neq 1$, $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et par linéarité de la dérivation, $T_n(x) = S_n'(x)$. Donc :

$$\forall x \neq 1, \quad T_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Exercice 6

1) En utilisant la linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left((n+1)i + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}(n+1) \\ &= n(n+1)^2. \end{aligned}$$

(i ne dépend pas de j ; $\sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2$; linéarité de la somme ; $\mathrm{Card}[\![0,n]\!] = n+1$)

2) En utilisant la linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(i\sum_{j=0}^{i} j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} i\frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{24}(3n^2+3n+4n+2) \\ &= \frac{n(n+1)}{24}(3n^2+7n+2). \end{aligned}$$

($\sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2$; linéarité de la somme ; $\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$; $\sum_{i=0}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$)

3) • Première méthode

Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\sum_{j=0}^{n} \max(i,j) = i + i + \cdots + i + (i+1) + (i+2) + \cdots + n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \max(i,j) &= \sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j \\ &= i(i+1) + \sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{i} j \\ &= i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}. \end{aligned}$$

(i ne dépend pas de j ; on fait apparaître $\sum_{j=0}^{n} j$; $\sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2$)

D'où :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{i(i+1)}{2}\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n}1+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}i \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(6n+6+2n+1+3) \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(4n+5). \end{aligned}$$

linéarité de la somme ; $\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

- Seconde méthode (par regroupement de termes)

Pour i et $j \in [\![0,n]\!]$, on a $\max(i,j) \in [\![0,n]\!]$.
Et pour $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\max(i,j)=k \iff (i=k \text{ et } j \leqslant k) \text{ ou } (i<k \text{ et } j=k).$$

Il y a donc $k+1+k=2k+1$ couples (i,j) d'entiers naturels tels que $\max(i,j)=k$.
D'où, en notant $M_k = \{(i,j) \in [\![0,n]\!] \mid \max(i,j)=k\}$:

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{(i,j)\in M_k} k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(2k+1) \\ &= 2\sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2+3) \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(4n+5). \end{aligned}$$

$\text{card}(M_k) = 2k+1$; linéarité de la somme ; $\sum_{n=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{n=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 7

1) On a $\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}=\frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$.
En choisissant $a=1$ et $b=-1$, on a $a+b=0$ et $a=1$, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de la question précédente, on fait apparaître une somme télescopique :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

CORRECTIONS

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Donc :

$$P_n = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdots \frac{1}{(n-1) \cdot n} \cdot \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Remarque

On pouvait écrire $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} k} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 8 *Produit d'entiers pairs (respectivement impairs) consécutifs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour p_n, on factorise par 2 dans chacun des n facteurs :

$$p_n = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n) = 2^n\big(1 \cdot 2 \cdots (n-1)(n)\big) = 2^n n!.$$

Pour q_n, tous les facteurs sont impairs, on introduit les facteurs pairs de 2 à $2n$ et on divise par p_n :

$$q_n = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On pouvait écrire $q_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{p_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Exercice 9

Le membre de droite de l'égalité fait penser à une somme téléscopique. On transforme le quotient à l'aide de la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1}^2 - \sqrt{k}^2} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Remarque

Si on ne pense pas à transformer les termes de la somme, on peut démontrer le résultat fourni par l'énoncé par récurrence.

Exercice 10

- Premier calcul par $S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{i}(j+i)\right)$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} s_i &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{i}(j+i) \\ &= \binom{n}{i}\sum_{j=1}^{n} j + \binom{n}{i} i \sum_{j=1}^{n} 1 \\ &= \binom{n}{i}\frac{n(n+1)}{2} + \binom{n}{i} in. \end{aligned}$$

Puis $S = \sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} + n\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} i$.

D'une part, la somme de la ligne n du triangle de Pascal est une application classique de la formule du binôme :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n.$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - \binom{n}{0} = 2^n - 1.$$

D'autre part, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on sait transformer $i\binom{n}{i}$ (voir exercice 4) :

$$i\binom{n}{i} = i\frac{n!}{i!(n-i)!} = n\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n\binom{n-1}{i-1}.$$

On obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} i = n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1}.$$

D'où finalement :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}(2^n - 1) + n^2 2^{n-1}.$$

- Second calcul par $S = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(j+i)\right)$.

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} t_j &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(j+i) \\ &= j\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} i \\ &= j(2^n - 1) + n2^{n-1}. \end{aligned}$$

voir les calculs précédents

Puis :

$$S = \sum_{j=1}^{n} t_j = (2^n - 1)\sum_{j=1}^{n} j + n2^{n-1}\sum_{j=1}^{n} 1 = (2^n - 1)\frac{n(n+1)}{2} + n^2 2^{n-1}.$$

Exercice 11

1) On sait que $p_0 = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\sin(\pi/2^{k+1}) = 2\sin(\pi/2^{k+2})\cos(\pi/2^{k+2})$ en utilisant $\theta = \pi/2^{k+2}$. Comme $\pi/2^{k+2} \in]0, \pi[$, son sinus est nul et on a :

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin(\pi/2^{k+1})}{2\sin(\pi/2^{k+2})} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\prod_{k=0}^{n} \sin(\pi/2^{k+1})}{\prod_{k=0}^{n} \sin(\pi/2^{k+2})} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi/2^{n+2})} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\sin(\pi/2^{n+2})}. \end{aligned}$$

il y a $n+1$ facteurs

on simplifie par $\prod_{k=1}^{n} \sin(\pi/2^{k+1}) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\pi/2^{k+2})$

$\sin(\pi/2) = 1$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 12

1) Les coefficients du binôme sont des entiers (naturels) ainsi que 2 élevé à une puissance entière naturelle. Donc A_n et B_n sont des entiers (sommes de produits d'entiers).

D'après la formule du binôme, $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p}\left(\sqrt{2}\right)^p$.

Si p est pair, il existe un unique $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $p = 2k$ et le terme de la somme vaut $\binom{2n}{2k}\left(\sqrt{2}\right)^{2k} = \binom{2n}{2k}2^k$.

La somme des termes d'indice pair est donc A_n.

Si p est impair, il existe un unique $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $p = 2k+1$ et le terme de la somme vaut $\binom{2n}{2k+1}\left(\sqrt{2}\right)^{2k+1} = \binom{2n}{2k+1}2^k\sqrt{2}$.

La somme des termes d'indice impair est donc $\sqrt{2}B_n$ (après factorisation par $\sqrt{2}$).

En séparant les termes selon la parité de l'indice, on obtient $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} = A_n + \sqrt{2}B_n$.

2) On a $A_n^2 - 2B_n^2 = \left(A_n + \sqrt{2}B_n\right)\left(A_n - \sqrt{2}B_n\right)$.

Comme à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} &= \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p}(-1)^p\left(\sqrt{2}\right)^p \\ &= \sum_{p \text{ pair}} \binom{2n}{p}\left(\sqrt{2}\right)^p - \sum_{p \text{ impair}}^{n} \binom{2n}{p}\left(\sqrt{2}\right)^p \\ &= A_n - \sqrt{2}B_n. \end{aligned}$$

$(-1)^p = 1$ si p est pair
$(-1)^p = 1$ si p est impair

Donc $A_n^2 - 2B_n^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} = (1-2)^{2n} = (-1)^{2n} = 1$.

3) Comme précédemment, on va développer $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}$, puis séparer les termes selon la parité de l'indice :

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} &= \sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}\left(\sqrt{2}\right)^p \\ &= \sum_{p\text{ pair}}\binom{2n+1}{p}\left(\sqrt{2}\right)^p + \sum_{p\text{ impair}}\binom{2n+1}{p}\left(\sqrt{2}\right)^p \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}2^k + \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1}2^k.\end{aligned}$$

En notant $C_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}2^k$ et $D_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1}2^k$, on a deux entiers C_n et D_n tels que $C_n + \sqrt{2}D_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}$.

On vérifie alors qu'on a aussi $C_n - \sqrt{2}D_n = \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}$ puis que :

$$C_n^2 - D_n^2 = \left(C_n+\sqrt{2}D_n\right)\left(C_n-\sqrt{2}D_n\right) = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1} = \left(1-2\right)^{2n+1} = -1.$$

Exercice 13

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ ».

- Initialisation

On a $\sum_{k=p}^{p}\binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$ et $\binom{p+1}{p+1} = 1$, donc $\mathcal{P}(p)$ est vraie.

- Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \left(\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}\right) + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1} \quad \text{(d'après } \mathcal{P}(n)\text{)} \\ &= \binom{n+1+1}{p+1}. \quad \text{(formule de Pascal)}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

2) D'une part, on a $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$ d'après $(\star)$ pour $p=1$.

D'autre part, on a classiquement :

$$\binom{k}{1} = \frac{k!}{1!(k-1)!} = k \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On retrouve $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

CORRECTIONS

De même, d'après $(\star)$ pour $p=2$, $\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$. Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}k(k-1) \qquad \text{linéarité} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k-1) \qquad \text{on ajoute un terme nul} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k. \qquad k(k-1)=k^2-k\end{aligned}$$

D'après les résultats précédents :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=2\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}(2n-2+3)=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.$$

Exercice 14

En utilisant l'indication fournie, on a :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{j}{i+j}\right)\right) \qquad \frac{i}{i+j}=\frac{i+j-j}{i+j}=1-\frac{j}{i+j} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}1\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j}\right). \qquad \text{par linéarité}\end{aligned}$$

On a $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}1\right)=\sum_{i=1}^{n}n=n^2$. Regardons la seconde somme $S'=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j}\right)$:

$S'=S_1+S_2+\cdots S_n$ où $S_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j}=\frac{1}{i+1}+\frac{2}{i+2}+\cdots+\frac{n}{i+n}$.

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{1+1}+\frac{2}{1+2}+\cdots+\frac{n}{1+n} \\ S_2 &= \frac{1}{2+1}+\frac{2}{2+2}+\cdots+\frac{n}{2+n} \\ \vdots &= \vdots \\ S_n &= \frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{n}{n+n}.\end{aligned}$$

En groupant les termes par colonnes, on obtient :

$$S'=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+2}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k+n}=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m}{k+m}\right).$$

Les indices étant muets, on obtient $S'=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{j+i}\right)=S$, car $\frac{i}{j+i}=\frac{i}{i+j}$.

D'où $2S=n^2$ et donc $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}\right)=\frac{n^2}{2}$.

Exercice 15 *Somme triangulaire*

Utiliser $S = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}\right) = \sum_{j=1}^{n} j\left(\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}\right)$ ne permet pas de conclure.

On remarque qu'on a une somme double indexée par les couples (i,j) tels que $j \in [\![1,n]\!]$ et $i \in [\![j,n]\!]$. Notons T_n l'ensemble de ces couples. On a :

$$T_n = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid j \leqslant i\}.$$

On peut décrire T_n comme étant l'ensemble des couples (i,j) tels que $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,i]\!]$. Écrivons alors :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}\right) && \text{i ne dépend pas de j}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right) && \sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} && \text{linéarité de la somme}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 && \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{i=1}^{n} 1 = n\\
&= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2}\\
&= \frac{n(n+3)}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 16

1) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a $\binom{2n}{k} = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}$ et :

$$\binom{2n}{k+1} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!} = \frac{(2n)!}{(k+1)k!(2n-k-1)!}\cdot\frac{(2n-k)}{(2n-k)} = \frac{2n-k}{k+1}\binom{2n}{k}.$$

Or :

$$\frac{2n-k}{k+1} \geqslant 1 \iff 2n-k \geqslant k+1 \iff 2n-1 \geqslant 2k \iff n-1 \geqslant k.$$

Comme les coefficients du binôme sont positifs, on a bien :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!],\quad \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{k+1}.$$

2) On vient de voir :

$$\binom{2n}{0} \leqslant \binom{2n}{1} \leqslant \cdots \binom{2n}{n-1} \leqslant \binom{2n}{n},$$

ce qui prouve le résultat pour les $k \in [\![0,n]\!]$.

CORRECTIONS

Pour les $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on peut reprendre la démonstration du 1) (la suite des coefficients décroît à partir du rang n) ou utiliser la symétrie des coefficients :

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} \leqslant \binom{2n}{n},$$

car $2n - k \leqslant 2n - n - 1 \leqslant n$.
En conclusion :

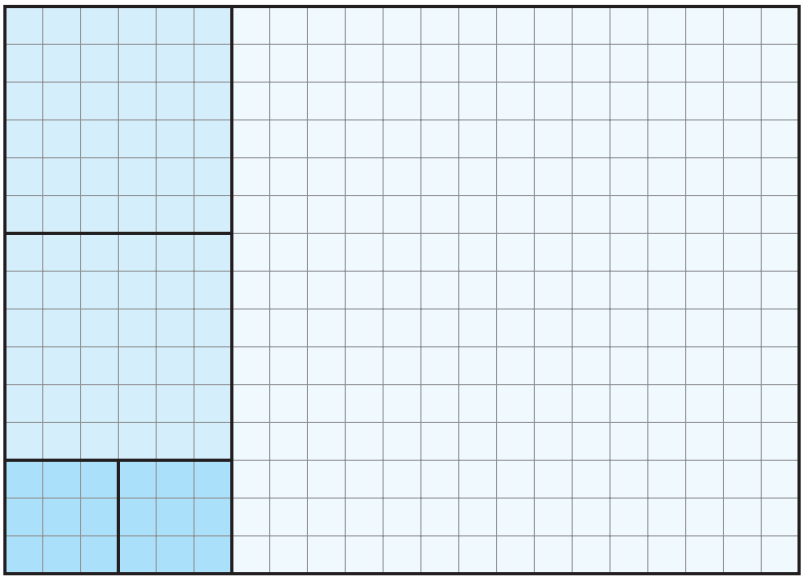
$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

3) En ajoutant les $2n+1$ inégalités précédentes, on a $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leqslant (2n+1)\binom{2n}{n}$.

D'après la formule du binôme de Newton, on a $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$, donc en divisant par $2n+1 > 0$, on obtient $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n}$.

« *La somme de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n.* »

Arithmétique 2



Voici une interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide de calcul du PGCD.

Quel est le plus grand carré avec lequel on peut paver un rectangle de longueur 21 et de largeur 15 ?

On commence par mettre le plus grand nombre possible de carrés de côté 15. On peut en mettre un. Il reste à paver un rectangle de largeur 6 et de longueur 15. On met dans ce rectangle le plus grand nombre possible de carrés de côté 6. On peut en mettre 2 (quotient de la division de 15 par 6) et il reste une bande de largeur 3 (reste de la division de 15 par 6). On voit que l'on peut paver cette bande avec deux carrés de côté 3.

Le PGCD de 21 et de 15 est donc égal à 3.

Pour deux entiers non nuls a et b, on notera $a \wedge b$ (respectivement $a \vee b$) le PGCD (respectivement le PPCM) de a et de b.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Calculs de PGCD*

1) Calculer de deux manières le PGCD de 24 et 60.
2) Calculer le PGCD de 1 071 et 1 029.

Exercice 2 Calculer $96 \wedge 180$ et $96 \vee 180$.

Exercice 3 *Divisibilité par 9*

1) Préciser le quotient et le reste de la division euclidienne de 1 467 par 9.
2) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, 9 divise $10^k - 1$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note s la somme des chiffres de l'écriture de n (en base 10).
   Montrer que n est un multiple de 9 si, et seulement si, s l'est.
   Indication : On pourra considérer $n - s$.

Exercice 4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 5

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres compris entre 1000 et 9999 qui s'écrivent (en base 10) avec quatre chiffres pairs distincts et $\mathcal{D}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ qui sont des multiples de 9.

1) Préciser $\max \mathcal{P}$, $\min \mathcal{P}$ et $\operatorname{card} \mathcal{P}$.
2) Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de $\mathcal{D}$.
3) Combien y a-t-il de nombres multiples de 9 et écrits (en base 10) avec quatre chiffres pairs distincts ?

Exercice 6 ⋆

Combien de nombres écrits avec six chiffres en base 10 sont multiples de 164 et se terminent par 164 ? Parmi eux, préciser le plus petit et le plus grand.

Exercice 7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 6 divise $5n^3 + n$.

Exercice 8

Combien a-t-on de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $\frac{a+b}{2024} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?

Exercice 9

Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tels que le PGCD de $(3n + 15)$ et de $(2n + 8)$ soit 6 :

$$(3n + 15) \wedge (2n + 8) = 6.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 10 *Avantages du système sexagésimal*

1) Quel est le plus petit nombre n entier naturel divisible par tous les nombres de 1 à 6 ?
2) Quelles formes peut prendre la décomposition en facteurs premiers d'un nombre n ayant exactement douze diviseurs positifs ?
   Quel est le plus petit des nombres ayant exactement douze diviseurs positifs ?

Exercice 11 ⋆

Déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la somme $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ soit un nombre compris entre 100 et 999 et dont l'écriture en base 10 a 3 chiffres identiques.
Indication : Décomposer 111 en produit de nombres premiers

Exercice 12 *Nombre de diviseurs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note d_n le nombre des diviseurs positifs de n.

1) Donner les diviseurs positifs de 4 et en déduire d_4.
   Déterminer d_{12} et d_{81}.
2) Montrer que n est le carré d'un entier si, et seulement si, d_n est impair.

Exercice 13

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $3^n - 1$ est pair.
Pour quels nombres entiers positifs n le nombre $3^n - 1$ est-il divisible par 4 ?

Exercice 14

Soit p un nombre premier.

1) Soit n un entier non nul. Justifier :
$$p \text{ divise } n^2 \quad \Longrightarrow \quad p \text{ divise } n.$$
2) En déduire que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 15 ⋆

Soit n un naturel non nul. On note :

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divise } n\}, \quad N = \text{card}(\mathcal{D}), \quad P = \prod_{d \in \mathcal{D}} d.$$

Donner une relation entre P, N et n.

D'après Mines-Ponts

Exercice 16 ⋆⋆

1) *Lemme*
Soient n_1 et n_2 deux entiers dont le reste dans la division euclidienne par 4 est 1.
Montrer que le reste dans la division euclidienne de $n_1 n_2$ par 4 est aussi 1.

2) On considère l'ensemble $\mathcal{P}_3$ des nombres premiers dont le reste dans la division euclidienne par 4 est 3.
En raisonnant par l'absurde, montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_3$ est infini.
Indication : On pourra introduire un nombre bien choisi de la forme $N = 4k + 3$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 17

Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $b > a$.

1) Quels sont les entiers b tels que $2022^a - 1$ divise $2022^b - 1$?

2) Quels sont les entiers b tels que $(2022^b - 1) \wedge (2022^a - 1) = 2021$?

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) • Par la décomposition en produits de nombres premiers
On a facilement $24 = 2^3 \times 3$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Donc $24 \wedge 60 = 2^2 \times 3 \times 5^0 = 12$.
• Par l'algorithme d'Euclide
Par divisions successives :
$60 = 2 \times 24 + 12$ puis $24 = 2 \times 12 + 0$. Donc $24 \wedge 60 = 12$ (dernier reste non nul).

2) On voit que l'algorithme d'Euclide va être plus rapide.
On a $1\,071 = 1\,029 + 42$, puis $1\,029 = 24 \times 42 + 21$ et $42 = 2 \times 21$. Donc $1\,071 \wedge 1\,029 = 21$.

Remarque
Factoriser un nombre (particulièrement un nombre assez grand) est souvent difficile. La plupart des techniques de chiffrement reposent d'ailleurs sur cela.
Néanmoins, sur l'exemple proposé, on peut voir que 1 071 est divisible par 9. On peut alors faire les calculs suivants : $1\,071 = 9 \times 119 = 9 \times 7 \times 17$. On constate ensuite que 7 et 3 divisent 1 029 mais pas 9 ni 17. Donc $1\,071 \wedge 1\,029 = 21$

Exercice 2

- Par l'algorithme d'Euclide

  On a par divisions successives $180 = 96 + 84$, $96 = 84 + 12$, puis $84 = 7 \times 12 + 0$.
  Donc $96 \wedge 180 = 12$.
  Puis $96 = 12 \times 8$ et $180 = 12 \times 15$, donc $96 \vee 180 = 12 \times 8 \times 15 = 1440$.
- Par la décomposition en produits de nombres premiers

  Ici, les factorisations en facteurs premiers sont rapides et on trouve :

$$96 = 3 \times 32 = 2^5 \times 3, \quad 180 = 4 \times 45 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

On en déduit que $96 \wedge 180 = 2^2 \times 3 = 12$ et $96 \vee 180 = 2^5 \times 3^2 \times 5 = 1440$.

Exercice 3

1) Le calcul donne $1\,467 = 163 \times 9 + 0$. Le quotient de la division euclidienne de 1 467 par 9 est donc 163 et le reste est nul.

2) On sait que $10^k - 1 = (10 - 1)(10^{k-1} + 10^{k-2} + \cdots + 10 + 1)$.
   Puisque $10 - 1 = 9$ et que $10^{k-1} + 10^{k-2} + \cdots + 10 + 1$ est un entier, 9 divise $10^k - 1$.

   Remarque
   $10^0 - 1 = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$10^k - 1 = \underbrace{99\cdots9}_{k \text{ fois}} = 9 \times \underbrace{11\cdots1}_{k \text{ fois}}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $n = c_p c_{p-1} \cdots c_1 c_0$ son écriture en base 10. Ainsi les chiffres c_k appartiennent à $[\![0, 9]\!]$ et on a :

$$n = c_p 10^p + c_{p-1} 10^{p-1} + \cdots + c_1 10 + c_0 \quad \text{et} \quad s = c_p + c_{p-1} + \cdots + c_1 + c_0.$$

D'où $n - s = c_p(10^p - 1) + c_{p-1}(10^{p-1} - 1) + \cdots c_1(10 - 1) + 0$.
Une somme de multiples de 9 étant un multiple de 9, on a $n - s$ est un multiple de 9.
On en déduit que n est un multiple de 9 si, et seulement si, s l'est.

Exercice 4

En développant par la formule du binôme, on a $(n+1)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k - 1 = 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^k$.

Pour $k \in [\![2, n]\!]$, $\binom{n}{k}$ est un entier et n^2 divise n^k. Donc n^2 divise $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^k$.

Le terme pour $k = 1$ vaut $\binom{n}{1} n = n \times n = n^2$.

Donc $(n+1)^n - 1 = n^2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^k$ est divisible par n^2.

Exercice 5

On va utiliser qu'un nombre est un multiple de 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de 9 (voir exercice 3).

1) Soit $n \in \mathcal{P}$. On note $abcd$ son écriture en base 10 ($n = d + 10c + 100b + 1000a$).

   Les quatre chiffres a, b c et d étant pairs, ils appartiennent à $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

   On a facilement $\max \mathcal{P} = 8\,642$ et $\min \mathcal{P} = 2\,046$ (le chiffre des milliers ne peut pas être nul).

   Il y a 4 possibilités pour le premier chiffre $a \neq 0$. Ce chiffre choisi, il y a 4 possibilités pour le deuxième chiffre b, puis 3 pour c et 2 possibilités pour d.

$$\text{card}\,\mathcal{P} = 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96.$$

2) Comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, on a $\max \mathcal{D} \leqslant \max \mathcal{P} = 8\,642$.

   Comme $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ n'est pas divisible par 9, $8\,642 \notin \mathcal{D}$.

   Puis $\max P \setminus \{8\,642\} = 8640$ qui, lui, est multiple de 9, car $8 + 6 + 4 + 0 = 18$.

   Donc $8\,640 \in \mathcal{D}$ et $8\,640 = \max \mathcal{D}$.

   De même, $2\,046 = \min \mathcal{P} \notin \mathcal{D}$, car $2 + 0 + 4 + 6 = 12$ n'est pas un multiple de 9.

   On a la même conclusion avec 2 048 (car $2 + 0 + 4 + 8 = 14$).

   Ces quatre remarques montrent que pour obtenir un multiple de 9, l'unique façon est d'utiliser les chiffres 0, 4, 6 et 8.

   Donc $\min \mathcal{D} = 4\,068$.

3) Pour construire un nombre $n = abcd \in \mathcal{D}$, on a vu que la seule possibilité est d'utiliser les quatre chiffres 0, 4, 6 et 8.

   Comme $a \neq 0$, il y a 3 possibilités pour le premier chiffre. Ce chiffre choisi, il y a 3! permutations possibles pour les trois autres.

   Il y a donc $3 \times 3! = 18$ nombres solutions du problème posé.

Exercice 6

Si n s'écrit avec six chiffres et se termine par 164, il existe un entier $a \in [\![100, 999]\!]$ tel que $n = 1000a + 164$.
Si 164 divise n, il divise $1000a$. Or $164 = 2 \times 82 = 2^2 \times 41$. Comme 41 est un nombre premier qui ne divise pas 1000, il doit diviser a.
Réciproquement, si a est un multiple de 41, $1000a$ est divisible par 4×41.

Il y a autant de solutions que de multiples de 41 entre 100 et 999.

Comme $100 = 2 \times 41 + 18$ et $999 = 24 \times 41 + 15$, les multiples de 41 entre 100 et 999 sont les $41k$ avec $k \in [\![3, 24]\!]$.
Il y a 22 nombres à six chiffres multiples de 164 et se terminant par 164.
Le plus petit est obtenu avec $a = 3 \times 41$, c'est $m = 123\,164$.
Le plus grand est obtenu avec $a = 41 \times 24$, c'est $M = 984\,164$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que 2 et 3 divisent $5n^3 + n = n(5n^2 + 1)$.

- $5n^3 + n$ est pair

  Si n est pair, $5n^3$ est également pair donc $5n^3 + n$, car c'est une somme de deux nombres pairs.

  Si n est impair, $5n^3$ est un produit de nombres impairs donc est également impair.

  D'où $5n^3 + n$ est pair, car c'est une somme de deux nombres impairs.

- $5n^3 + n$ est multiple de 3

  Si n est un multiple de 3, le résultat est évident.

  Sinon, le reste r de la division de n par 3 est 1 ou 2. On a alors $n = 3q + r$ en notant q le quotient de la division. Donc :

$$\begin{aligned} 5n^3 + n &= 5(3q + r)^3 + 3q + r \\ &= 5(27q^3 + 3 \cdot 9q^2 r + 3 \cdot 3qr^2 + r^3) + 3q + r \\ &= 3(45q^2 + 45q^2 + 15qr^2 + q) + 5r^3 + r. \end{aligned}$$

(formule du binôme)

D'où $5n^3 + n$ est la somme d'un multiple de 3 et de $5r^3 + r = \begin{cases} 6 & \text{si } r = 1, \\ 42 & \text{si } r = 2 \end{cases}$.

Or 6 et 42 sont des multiples de 3, donc dans tous les cas, 3 divise $n(5n^2 + 1)$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 6 divise $5n^3 + n$.

Exercice 8

Comme $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, $a + b \neq 0$ et $ab \neq 0$. Et on a :

$$\frac{a+b}{2024} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff \frac{a+b}{2024} = \frac{a+b}{ab} \iff ab = 2024.$$

Il s'agit de compter le nombre de diviseurs $a \in \mathbb{N}^*$ de 2024 (b étant alors égal à $2024/a$).

On a $2024 = 4 \times 506 = 8 \times 253$. Or 253 est un multiple de 11 (car $2 + 3 = 5$), plus précisément $253 = 23 \times 11$.

La décomposition de 2024 en facteurs premiers est donc $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$.

Un diviseur a de 2024 est de la forme $2^\alpha \times 11^\beta \times 23^\gamma$ avec $\alpha \in [\![0, 3]\!]$, $\beta \in [\![0, 1]\!]$ et $\gamma \in [\![0, 1]\!]$.

Il y a donc $4 \times 2 \times 2 = 16$ diviseurs de 2024, donc 16 couples (a, b) solutions.

Exercice 9

En utilisant $a \wedge b = b \wedge (a - b)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 3n + 15 &= (2n + 8) + (n + 7) \\ 2n + 8 &= (n + 7) + (n + 1) \\ n + 7 &= (n + 1) + 6. \end{aligned}$$

$(3n + 15) \wedge (2n + 8) = (2n + 8) \wedge (n + 7)$

$(2n + 8) \wedge (n + 7) = (n + 7) \wedge (n + 1)$

Donc $(3n + 15) \wedge (2n + 8) = (n + 1) \wedge 6$. D'où :

$$(3n + 15) \wedge (2n + 8) = 6 \iff (n + 1) \wedge 6 = 6 \iff 6 \text{ divise } (n + 1).$$

On peut conclure en disant que les entiers recherchés sont les $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 6k - 1 = 6(k - 1) + 5$, c'est-à-dire ceux dont le reste dans la division euclidienne par 6 est 5.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 10

1) La décomposition en produit de nombres premiers d'un nombre divisible par tous les nombres de 1 à 6 doit faire intervenir les facteurs 2^2, 3 et 5.

Le nombre $60 = 4 \times 3 \times 5$ est le plus petit d'entre eux.

Remarque

C'est probablement une des raisons pour lesquelles les Mésopotamiens utilisèrent la base 60 dès le III^e^ millénaire av. J.-C.

2) On distingue différents cas selon le nombre de nombres premiers divisant n. On désigne par $p_1, p_2, ..., p_m$ les nombres premiers divisant n.

- Si $n = p^a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$, il a $a+1$ diviseurs. Pour avoir 12 diviseurs, il faut et il suffit que $a = 11$.
- Si $n = p_1^a p_2^b$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, il a $(a+1)(b+1)$ diviseurs. Quitte à échanger p_1 et p_2, on peut supposer $a \geqslant b$:

$$(a+1)(b+1) = 12 \iff \begin{cases} a + 1 = 6 \\ b + 1 = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a + 1 = 4 \\ b + 1 = 3 \end{cases}$$

Donc $n = p_1^5 p_2$ ou $p_1^3 p_2^2$.

- Si $n = p_1^a p_2^b p_3^c$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, il a $(a+1)(b+1)(c+1)$ diviseurs. Ces 3 facteurs étant supérieurs à 2, on obtient 12 avec deux facteurs égaux à 2 et l'autre égal à 3. Donc $n = p_1 p_2 p_3^2$.

Comme on cherche n le plus petit possible, on choisira des nombres premiers dans l'ordre croissant 2, 3, 5, 7...

Et les exposants les plus élevés doivent porter sur les nombres les plus petits, car si pour des entiers naturels, $p < q$ et $a < b$ entraînent $p^{b-a} < q^{b-a}$ donc $p^b q^a < p^a q^b$.

- Le plus petit des p^11 est $2^{11} = 2048$.
- Le plus petit des $p_1^5 p_2$ est $2^5 \times 3 = 96$
  Le plus petit des $p_1^3 p_2^2$ est $2^3 \times 3^2 = 72$.
- Le plus petit des $p_1 p_2 p_3^2$ est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Le plus petit des nombres ayant 12 diviseurs est 60.

Exercice 11

Comme $1 + 1 + 1 = 3$, on sait que 111 est divisible par 3. On trouve $111 = 3 \times 37$ et 37 est un nombre premier.

Un nombre compris en 100 et 999 et ayant 3 chiffres identiques est de la forme $ccc = 111c$ avec $c \in [\![1, 9]\!]$.

On sait que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On cherche donc les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\exists c \in [\![1, 9]\!], \quad n(n+1) = 2 \times 3 \times 37 \times c \qquad (\star)$$

• Analyse
On suppose que n convient. On a alors 37 divise n ou $n+1$.
Premier cas : 37 divise n. On montre par l'absurde que $n = 37$.
Si $n \neq 37$, on a $n \geqslant 2 \times 37 = 74$ et $n+1 \geqslant 75$. Donc $n(n+1) \geqslant 37 \times 150$. Mais $2 \times 3 \times 37 \times c \leqslant 6 \times 37 \times 9 \leqslant 37 \times 54$. C'est impossible.
Donc $n = 37$. Alors $n+1 = 38$ et $n(n+1) = 37 \times 2 \times 19$. Mais $19 = 3c$ est impossible.
Il n'y a pas de $c \in [\![1, 9]\!]$ vérifiant $(\star)$.
Second cas : 37 divise $n+1$. On montre comme précédemment que $n+1 = 37$.
Donc $n = 36$. Alors $n(n+1) = 36 \times 37 = 2 \times 3 \times 37 \times 6$. Donc $c = 6$.
• Synthèse
Pour $n = 36$, on a $S_{36} = \frac{36 \times 37}{2} = 6 \times 3 \times 37 = 6 \times 111 = 666$.
En conclusion $n = 6$ est solution et c'est la seule solution du problème posé.

Exercice 12

1) Les diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4. Donc $d_4 = 3$.
De même, $12 = 3 \times 2^2$ ayant pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6 et 12, $d_{12} = 6$.
Et $d_{81} = 5$, car $81 = 3^4$ a pour diviseurs 1, 3, 9, 27 et 81.

2) • Première méthode (par regroupement)
Si d est un diviseur de n, il existe $d' \in \mathbb{N}^*$ tel que $dd' = n$ et d' est également un diviseur de n.
Et on a : $d = d' \iff n = d^2 \iff d = \sqrt{n}$.
Si $d \neq d'$, alors l'un des deux est strictement inférieur à $\sqrt{n}$.
Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs positifs de n, $\mathcal{A}$ l'ensemble des $d \in \mathcal{D}$ qui sont strictement inférieurs à $\sqrt{n}$ et $\mathcal{A}'$ l'ensemble des $d \in \mathcal{D}$ strictement supérieurs à $\sqrt{n}$.
L'application $d \mapsto n/d$ est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$. Donc, $\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \operatorname{card}(\mathcal{A}')$.
⋆ Si n n'est pas un carré, alors $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$.
Dans ce cas $\operatorname{card}(\mathcal{D}) = \operatorname{card}(\mathcal{A}) + \operatorname{card}(\mathcal{A}') = 2\operatorname{card}(\mathcal{A})$.
⋆ Si n est un carré, alors $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \cup \{\sqrt{n}\}$ et $\operatorname{card}(\mathcal{D}) = 2\operatorname{card}(\mathcal{A}) + 1$.
Finalement : n est un carré si, et seulement si, le nombre de ses diviseurs positifs est impair.
• Seconde méthode (par la décomposition en facteurs premiers)
On sait qu'il existe une suite finie $p_1, p_2, \dots, p_r$ de nombres premiers distincts et des naturels $v_1, v_2, \dots, v_r$ tels que :

$$n = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_r^{v_r}.$$

On a l'équivalence suivante :

$$n \text{ est un carré} \iff \text{pour tout } k \in [\![1, r]\!],\ v_k \text{ est pair.}$$

D'autre part, un entier naturel d est un diviseur de n si, et seulement si, $d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ avec $(k_1, k_2, \dots, k_r) \in [\![0, v_1]\!] \times [\![0, v_2]\!] \times \cdots \times [\![0, v_r]\!]$.

$$\operatorname{card}(\mathcal{D}) = \operatorname{card}\left(\prod_{i=1}^{r} [\![0, v_i]\!]\right) = \prod_{i=1}^{r} (1 + v_i).$$

Or, un produit de facteurs est impair si, et seulement si, tous ses facteurs le sont, donc :

$$\text{card}(\mathcal{D}) \text{ est impair} \iff \text{pour tout } k \in [\![1, r]\!],\ v_k \text{ est pair.}$$

On a ainsi montré que n est un carré si, et seulement si, le nombre de ses diviseurs positifs est impair.

Exercice 13

Puisque 3^n est produit de nombres impairs, 3^n est impair. Donc $3^n - 1$ est pair.
On a $3^n - 1 = (3-1)(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1)$. On en déduit que $3^n - 1$ est un multiple de 4 si, et seulement si, $q = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1$ est pair.
Or q est une somme de n termes impairs, donc il est pair si, et seulement si, n est pair.
En conclusion, $3^n - 1$ est divisible par 4 si, et seulement si, n est pair.

Remarque

Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et on a :

$$3^{2k} - 1 = 9^k - 1 = (9-1)(9^{k-1} + 9^{k-2} + \cdots + 9 + 1),$$

donc $3^{2k} - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 14

1) Soit n un entier non nul.

   $\Rightarrow$ Si p divise n, alors il divise $n^2 = n \cdot n$.

   $\Leftarrow$ On suppose que p divise n^2. Alors p intervient dans la décomposition en produit de nombres premiers de n^2.
   Or celle-ci se déduit de celle de n par élévation au carré, donc fait intervenir les mêmes nombres premiers que celle de n. Donc p divise n.

2) On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe deux entiers a et b premiers entre eux tels que $\sqrt{p} = a/b$.
   On a alors $pb^2 = a^2$. Donc p divise a^2. D'après 1), p divise a. Donc $a = pq$ avec $q \in \mathbb{Z}$.
   On en déduit $pb^2 = p^2q^2$, donc $b^2 = pq^2$. D'où p divise b, car il divise b^2.
   On a p divise a et b ce qui contredit $a \wedge b = 1$.
   On a montré que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 15

Si d est un diviseur de n, il existe $d' \in \mathbb{N}^*$ tel que $dd' = n$ et d' est également un diviseur de n.
L'application $f : d \mapsto n/d$ est une bijection de $\mathcal{D}$ sur lui-même. Par réindexation, on a donc :

$$P = \prod_{d\in\mathcal{D}} d = \prod_{d\in\mathcal{D}} \frac{n}{d} = \frac{\prod_{d\in\mathcal{D}} n}{\prod_{d\in\mathcal{D}} d} = \frac{n^N}{P}.$$

En conclusion, $P^2 = n^N$.

Exercice 16

1) Soient n_1 et n_2 deux entiers dont le reste dans la division euclidienne par 4 est 1.
Il existe deux entiers q_1 et q_2 tels que $n_1 = 4q_1 + 1$ et $n_2 = 4q_2 + 1$.

On a alors $n_1 n_2 = 4(4q_1q_2 + q_1 + q_2) + 1$. Comme $4q_1q_2 + q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$ (et $1 \in [\![0, 3]\!]$), le reste dans la division euclidienne de n_1n_2 par 4 est aussi 1.

2) On raisonne par l'absurde. On suppose que $\mathcal{P}_3$ est fini et on écrit :

$$\mathcal{P}_3 = \{p_0, p_1, ..., p_n\}$$

avec $p_0 = 3 < p_1 = 7 < p_2 = 11 < ... < p_n$.
On pose $N = 4p_1p_2 \cdots p_n + 3$.

Le nombre N est impair (comme somme d'un nombre pair et de 3).

Le nombre 3 ne divise pas N, car il ne divise pas $4p_1p_2 \cdots p_n$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, p_k divise $4p_1p_2 \cdots p_n$ et ne divise pas 3, donc p_k ne divise pas N.

Aucun nombre premier appartenant à $\mathcal{P}_3$ ne divise N.

Donc N est un produit de nombres premiers impairs dont le reste dans la division euclidienne par 4 est 1.
En utilisant le lemme vu au 1), on obtient (de proche en proche) que N a lui-même un reste égal à 1.

Or $N = 4p_0p_1p_2 \cdots p_n + 3$, donc le reste dans la division euclidienne par 4 est 3. Ces deux résultats sont incompatibles.

L'hypothèse « $\mathcal{P}_3$ est fini » entraînant une contradiction, on a prouvé que $\mathcal{P}_3$ est infini.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 17

1) On commence par chercher la division euclidienne de $2022^b - 1$ par $2022^a - 1$. La première étape du calcul donne :

$$(2022^b - 1) = 2022^{b-a}(2022^a - 1) + 2022^{b-a} - 1.$$

Si $b - a > a$, on continue : $(2022^{b-a} - 1) = 2022^{b-2a}(2022^a - 1) + 2022^{b-2a} - 1$.
De proche en proche, on a en notant $b = aq + r$ la division euclidienne de b par a :

$$(2022^b - 1) = N(2022^a - 1) + 2022^{b-aq} - 1,$$

où N est l'entier $2022^{b-a} + 2022^{b-2a} + \cdots + 2022^{b-qa}$.
Comme $N \in \mathbb{N}$ et $2022^{b-aq} - 1 = 2022^r - 1 < 2022^a - 1$ (car $r \in [\![0, a-1]\!]$), on a, par unicité, trouvé la division euclidienne de $2022^b - 1$ par $2022^a - 1$. Comme le reste de cette division est $2022^r - 1$:

$2022^a - 1$ divise $2022^b - 1 \iff 2022^r - 1 = 0 \iff r = 0 \iff a$ divise b.

CORRECTIONS

2) D'après la division euclidienne précédente, on déduit que :

$$(2022^a - 1) \wedge (2022^b - 1) = (2022^a - 1) \wedge (2022^r - 1)$$

où $r = b - qa$ est le reste de la division euclidienne de b par a.

À l'aide de l'algorithme d'Euclide, on en déduit :

$$(2022^b - 1) \wedge (2022^a - 1) = (2022^{a \wedge b} - 1).$$

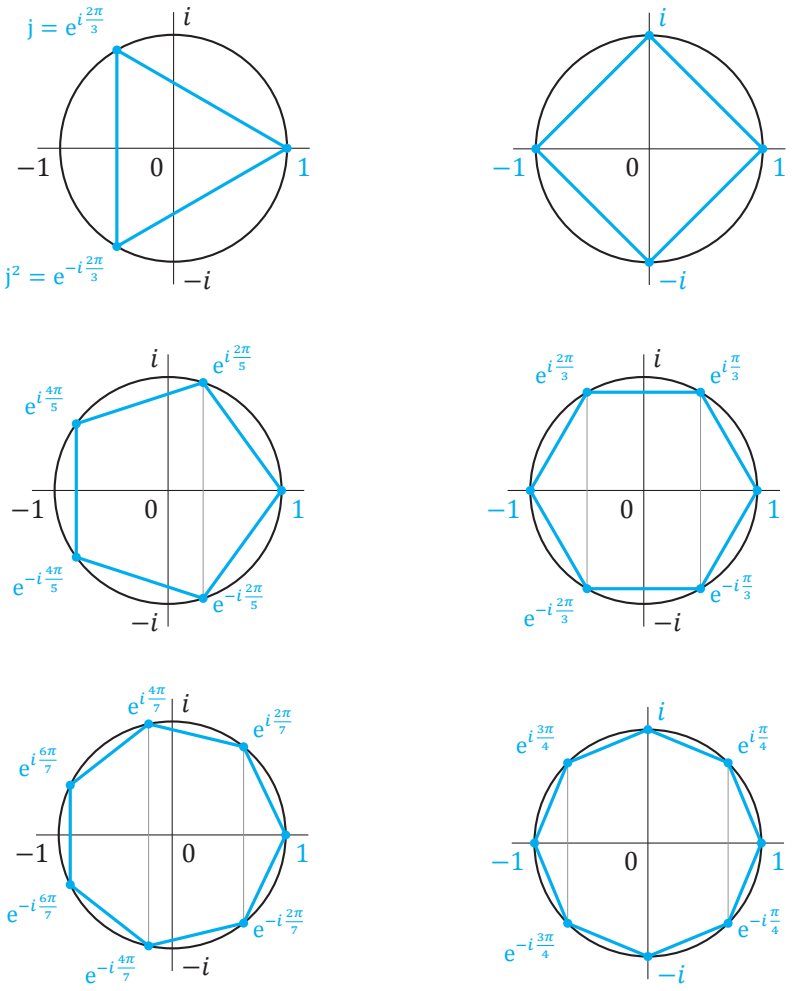
Donc :

$$(2022^b - 1) \wedge (2022^a - 1) = 2021 \iff 2022^{a \wedge b} - 1 = 2021 \iff a \wedge b = 1.$$

« Le petit théorème de Fermat est nettement plus facile à montrer que le grand. »

Trigonométrie, nombres complexes

3



Les n racines n-ièmes de l'unité, pour $n = 3, 4, 5, 6, 7$ et 8

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Linéarisation et antilinéarisation*

1) Linéariser $\sin^5(\theta)$.

2) Déterminer un polynôme P tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P\big(\cos(\theta)\big) = \cos(6\theta).$$

Exercice 2

Résoudre de deux façons l'équation $\cos(3\theta) = \cos(\theta)$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1) Montrer que pour $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$:

$$\tan(t) = \frac{1}{\tan(t)} - \frac{2}{\tan(2t)}.$$

2) Vérifier que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{\tan(x)}.$$

Exercice 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les modules et les parties réelle et imaginaire des complexes suivants :

1) $z_1 = 3\mathrm{i}(2\mathrm{i} - 4)$,
2) $z_2 = (1 + \mathrm{i})^3$,
3) $z_3 = \frac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$,
4) $z_4 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+3\mathrm{i}}$,
5) $z_5 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,
6) $z_6 = \frac{1+\mathrm{i}\theta}{\theta^2-1+2\mathrm{i}\theta}$.

Exercice 5

Montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1)^2} = -\frac{1}{2\sin^2(\theta/2)}$.

Exercice 6

1) Préciser i^4 et en déduire i^n puis $s_n = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

2) Soient $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$.
Mettre sous forme trigonométrique la somme $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

3) Utiliser le résultat précédent pour retrouver la valeur de s_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer les sommes suivantes sans le symbol Σ :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta), \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

Exercice 8

Soit $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$.

1) Préciser j^3 et, plus généralement, j^n en fonction de $n \in \mathbb{Z}$.
2) Calculer $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$ et, plus généralement, $1 + \mathrm{j}^n + \mathrm{j}^{2n}$ en fonction de $n \in \mathbb{Z}$.
3) Préciser les parties réelle et imaginaire de j ainsi que celles de $\frac{1}{1-\mathrm{j}}$.

Exercice 9

Donner la forme trigonométrique de $1 + \mathrm{i}$.
En déduire une expression simple de $(1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

Donner les parties réelle et imaginaire de $z = \frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3} + \frac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3}$.

Exercice 11

1) Déterminer les parties réelle et imaginaire du produit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.
2) En déduire $\tan(\pi/12)$.

Exercice 12 *Racines quatrièmes d'un nombre complexe*

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 13

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Exercice 14

On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + (1-3\mathrm{i})z^2 - (6-\mathrm{i})z + 10\mathrm{i} = 0 \qquad (\star)$$

1) Montrer qu'il existe un unique réel x, que l'on déterminera, solution de $(\star)$.
2) Déterminer α et β tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + (1-3\mathrm{i})z^2 - (6-\mathrm{i})z + 10\mathrm{i} = (z-x)(z^2+\alpha z+\beta).$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\star)$.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$.

Exercice 16

On désigne par ω le complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}$ et on pose :

$$\alpha = \omega + \omega^4 \quad \text{et} \quad \beta = \omega^2 + \omega^3.$$

1) Justifier $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ et en déduire les valeurs de $\alpha + \beta$ et de $\alpha\beta$.
2) En déduire que α et β sont les racines d'un trinôme du second degré que l'on précisera.
3) En déduire $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 17

Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 + 2z^3 + 2 = 0.$$

On donnera les solutions sous leurs formes trigonométriques.

Exercice 18 ⋆

On note $z_0 = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f : z \mapsto -\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,\overline{z} + z_0.$$

1) Préciser $f(0)$ et $f(z_0)$.
2) Montrer que, pour tous z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, $\left|f(z_1) - f(z_2)\right| = |z_1 - z_2|$.
3) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = z$, montrer que $|z| = |z - z_0|$.
4) Soit z un complexe tel que $|z| = |z - z_0|$.
   Montrer que $\overline{z} = -\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z + \overline{z_0}$ et enfin que $f(z) = z$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 19

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|.$$

Exercice 20

Soient $\omega = e^{i\pi/3}$ et $n \in \mathbb{N}$. Justifier $\omega^{n(n+1)(2n+1)} = 1$.

Exercice 21

Résoudre de deux façons (soit sous forme algébrique, soit sous forme trigonométrique) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et vérifier :

$$\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1.$$

Exercice 22

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z(1-z)$.

1) Déterminer les éventuels points fixes de f c'est-à-dire les $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$.
2) Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.
   Indication : On pourra utiliser la forme canonique de $f(z)$.

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par :

$$f : z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1) Déterminer les points fixes de f c'est-à-dire les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$.
2) On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.
   Déterminer l'image directe de $\mathbb{U}$ par f.

Exercice 24

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, montrer l'équivalence :

$$|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+z}{1-z} \text{ est un imaginaire pur.}$$