

Thierry Alhalel
Florent Arnal
Laurent Chancogne

Mathématiques **BUT**

GEII • GIM • GMP • MP •
INFO • R&T • GCCD

Tout le programme

des 3 années

- L'essentiel du cours
- Exercices
- Corrigés détaillés

DUNOD

Relecture scientifique : Jean-Marie Monier

© Dunod, 2026
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-089714-8

Table des matières

I	Bases	3
1	Généralités sur les fonctions	5
1.1	Introduction	6
1.2	Généralités	6
1.3	Trigonométrie	9
1.4	Variations d'une fonction	14
1.5	Fonctions usuelles	15
1.6	Limites	19
1.7	Continuité d'une fonction	28
1.8	Fonctions réciproques - Focus sur arctan	31
1.9	Exercices	34
2	Dérivation	45
2.1	Généralités	46
2.2	Dérivées et limites usuelles en 0	47
2.3	Opérations sur les dérivées	47
2.4	Dérivation d'une fonction réciproque - Focus sur arctan	48
2.5	Applications de la dérivation	49
2.6	Exercices	51
3	Intégration	61
3.1	Sommes de Riemann	62
3.2	Primitives	63
3.3	Intégrale et primitives	64
3.4	Intégration par parties (IPP)	66
3.5	Changements de variables	67
3.6	Intégrales généralisées	68
3.7	Exercices	70
4	Suites numériques	79
4.1	Généralités	80
4.2	Suites arithmétiques	81
4.3	Suites géométriques	82
4.4	Suites arithmético-géométriques	83
4.5	Exercices	84

5	Nombres complexes et applications	89
5.1	Forme algébrique	90
5.2	Nombres complexes et géométrie	91
5.3	Module d'un nombre complexe	92
5.4	Arguments d'un nombre complexe non nul	93
5.5	Formes trigonométriques et exponentielles	94
5.6	Linéarisation des fonctions trigonométriques	96
5.6.1	Formules d'Euler	96
5.6.2	Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$	96
5.7	Racines du polynôme $az^2 + bz + c$	97
5.7.1	Racines carrées	97
5.7.2	Équations du second degré à coefficients réels	97
5.8	Exercices	99
II	Probabilités et statistiques	107
6	Probabilités	109
6.1	Dénombrement	110
6.2	Probabilités	111
6.3	Variables aléatoires discrètes	115
6.4	Lois usuelles discrètes	119
6.5	Généralités sur les variables aléatoires à densité	122
6.6	Lois continues usuelles	126
6.7	Convergence en loi	131
6.8	Table de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$	134
6.9	Exercices	135
7	Statistiques descriptives et inférentielles	149
7.1	Statistique descriptive à 2 variables	150
7.2	Distribution d'échantillonnage des moyennes	156
7.3	Estimation	158
7.4	Tests d'hypothèse	160
7.5	Exercices	163
III	Algèbre et analyse	169
8	Calcul matriciel	171
8.1	Définition et interprétation des matrices	172
8.2	Opérations simples sur les matrices	173
8.3	Multiplication matricielle	174
8.4	Transposition	175
8.5	Matrices carrées	176
8.6	Matrices carrées inversibles	177
8.7	Système linéaire d'équations — algorithme du pivot de Gauss	178
8.8	Exercices	181

9	Déterminants des matrices carrées	197
9.1	Déterminant d'une matrice carrée	198
9.2	Propriétés des déterminants	200
9.3	Méthode de Cramer	200
9.4	Exercices	203
10	Géométrie Vectorielle	207
10.1	Vecteurs et produit scalaire de vecteurs de $\mathbb{R}^3$	208
10.2	Produit vectoriel	209
10.3	Produit mixte	210
10.4	Double produit vectoriel	211
10.5	Exercices	211
11	Polynômes et fractions rationnelles	215
11.1	Polynômes	216
11.1.1	Introduction	216
11.1.2	Division euclidienne	216
11.1.3	Racine - multiplicité	217
11.1.4	Polynômes irréductibles	218
11.2	Fractions rationnelles	219
11.2.1	Fractions rationnelles irréductibles	219
11.2.2	Décomposition en éléments simples	220
11.3	Exercices	222
12	Séries Numériques	229
12.1	Somme partielle	230
12.2	Convergence et divergence	231
12.3	Séries de Riemann	232
12.4	Critères de d'Alembert et de Cauchy	233
12.5	Critère de Comparaison	234
12.6	Convergence absolue et semi-convergence	235
12.7	Exercices	236
13	Séries de Fourier	243
13.1	Rappels de calcul intégral	244
13.2	Séries trigonométriques	244
13.3	Séries de Fourier	245
13.4	Développement en série de Fourier	247
13.5	Exercices	248
14	Dérivées partielles et opérateurs vectoriels	263
14.1	Notion de fonctions réelles de plusieurs variables	264
14.2	Dérivées partielles	265
14.3	Différentielles et dérivées totales	267
14.4	Dérivation vectorielle, nabla et vecteur gradient	269
14.5	Opérateurs divergent et opérateur rotationnel	270
14.6	Opérateur Laplacien	272
14.7	Exercices	272

15 Calcul des incertitudes	279
15.1 Présentation des incertitudes	280
15.2 Introduction à la propagation des incertitudes	280
15.3 Calcul des incertitudes en quadrature (moderne)	282
15.4 Incertitude de type A et incertitude de type B	284
15.5 Calcul des incertitudes de type A	284
15.6 Calcul des incertitudes systématiques (de type B)	286
15.7 Exercices	286
16 Intégrales multiples et applications	291
16.1 Rappels sur le calcul des aires planes par intégration	292
16.2 Calcul du volume des solides de révolution	293
16.3 Intégrales doubles et intégrales triples	294
16.4 Coordonnées cylindriques et coordonnées sphériques	294
16.5 Applications physiques des intégrales multiples	296
16.6 Exercices	297
17 Développements limités	305
17.1 L'essentiel sur les développements limités autour de 0	306
17.2 Exercices	307
18 Équations différentielles	315
18.1 Équations différentielles linéaires	316
18.2 Notion d'ordre	316
18.3 Conditions initiales	317
18.4 Résoudre une équation différentielle du premier ordre à variables sépa- rables	317
18.5 Équations différentielles linéaires du premier ordre	318
18.6 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	319
18.7 Applications des équations différentielles	320
18.8 Exercices	323
19 Transformée de Laplace	333
19.1 La transformée de Laplace est une intégrale	334
19.2 Formules de base	334
19.3 Propriétés de la transformée de Laplace	336
19.4 Formulaire de référence	337
19.5 Transformée de Laplace réciproque	338
19.6 Résolution d'équations différentielles	338
19.7 Exercices	340
IV Mathématiques discrètes	347
20 Graphes non orientés	349
20.1 Introduction	350
20.2 Premières notions et notations	350
20.3 Théorème fondamental	352

20.4	Chaînes, cycles, connexité	353
20.5	Graphes eulériens	354
20.6	Codage d'un graphe	355
20.7	Coloriage d'un graphe	358
20.8	Exemples d'optimisations dans un graphe	359
20.8.1	Chaîne la plus courte - Algorithme de Dijkstra	359
20.8.2	Arbre couvrant minimal - Algorithme de Kruskal	361
20.9	Exercices	364
21	Arithmétique	377
21.1	Division euclidienne	378
21.2	Nombres premiers	378
21.2.1	Test de primalité	379
21.2.2	Décomposition en facteurs premiers	380
21.3	Congruences	381
21.4	PGCD	382
21.4.1	Algorithme d'Euclide	383
21.4.2	Relation de Bézout	383
21.4.3	Nombres premiers entre eux	384
21.4.4	Théorème de Gauss	384
21.5	Équations diophantiennes	385
21.6	Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	385
21.7	Cryptographie - Principe du RSA	386
21.7.1	Principe du RSA (Rivest, Shamir, Adleman)	386
21.7.2	Pourquoi $(M^e)^d \equiv M \pmod{n}$?	386
21.8	Exercices	388
V	Méthodes numériques	393
22	Les bases de Python	395
22.1	Les principales opérations numériques	396
22.1.1	Nombres complexes	396
22.2	Utiliser les fonctions d'une bibliothèque	397
22.2.1	Quelques fonctions et constantes du module math	397
22.2.2	Un peu d'aléatoire	397
22.3	Variables et affectation	397
22.4	Chaînes de caractères	399
22.5	La fonction « input »	400
22.6	Conversion de type	400
22.7	Types composés	401
22.7.1	Les séquences	401
22.7.2	Les chaînes de caractères	402
22.7.3	Les tuples	403
22.7.4	Les listes	404
22.7.5	Objets itérables	406
22.8	Fonctions	407
22.9	Structures de contrôle	408

22.9.1	Instructions conditionnelles	408
22.9.2	Boucles et itérations	410
22.10	Exercices	411
23	Graphique avec matplotlib	415
23.1	Exemples de graphiques	416
23.2	Exercices	424
24	Résolution de systèmes d'équations linéaires	427
24.1	Méthode du pivot de Gauss	428
24.1.1	Représentation des matrices en python	428
24.1.2	Résolution de systèmes réguliers	428
24.2	Exercices	430
25	Résolution d'équations	433
25.1	Méthode de Newton	436
25.2	Exercices	439
26	Intégration numérique	443
26.1	Problématique	444
26.1.1	Méthodes de Newton-Cotes	444
26.2	Méthodes des rectangles	445
26.2.1	Méthode des rectangles à gauche	445
26.2.2	Méthode des rectangles à droite	446
26.2.3	Méthode des rectangles du point milieu	446
26.3	Méthode des trapèzes	447
26.4	Méthode de Simpson	448
26.5	Mise en œuvre	450
26.6	Exercices	450
27	Résolution d'équations différentielles	455
27.1	Problématique	456
27.2	Méthode d'Euler	457
27.3	Convergence	460
27.4	Méthodes de résolution explicites	461
27.5	Exercices	463

Introduction

Cet ouvrage de mathématiques s'adresse principalement aux étudiants de BUT1,2 et 3 des IUT dans les formations suivantes : informatique (INFO), réseaux et télécommunications (R&T), génie industriel et maintenance (GIM), génie électrique et informatique industrielle (GEII), mesures physiques (MP), génie mécanique et productique (GMP) et génie civil construction durable (GCCD). Le livre couvre l'essentiel des programmes de mathématiques des ces formations, il se découpe en grandes parties :

- Bases, partie qui s'adresse en priorité à la première année ;
- Probabilités et statistiques ;
- Algèbre et analyse ;
- Mathématiques discrètes ;
- Méthodes numériques (utilisation du langage python).

Chaque chapitre commence par un cours synthétique suivi d'exercices tous corrigés de façon détaillée.

Les auteurs espèrent que cet ouvrage pourra aussi intéresser des étudiants de BTS et de Licences, voire des étudiants de quatrième année dans des formations techniques.

Des suppléments en ligne sur le site **dunod.com** sont disponibles et permettent d'aller plus loin en accédant aux codes python de la dernière partie. Il faut noter également que quatre chapitres supplémentaires sont disponibles uniquement en version numérique sur le site **dunod.com**.

- Espaces vectoriels et diagonalisation de matrices ;
- Test du χ^2 ;
- Transformée de Fourier ;
- Transformée en Z.

Les auteurs souhaitent bonne chance et bon travail au lecteur !

Première partie

Bases

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

Objectifs

- Résoudre des équations et inéquations,
- Étudier le comportement d'une fonction,
- Identifier et interpréter les propriétés d'une fonction dans une démarche de modélisation ou d'analyse d'un phénomène.



Conseil

- Bien maîtriser cette partie afin d'aborder sereinement plusieurs chapitres faisant intervenir des fonctions.

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Généralités	6
1.3	Trigonométrie	9
1.4	Variations d'une fonction	14
1.5	Fonctions usuelles	15
1.6	Limites	19
1.7	Continuité d'une fonction	28
1.8	Fonctions réciproques - Focus sur arctan	31
1.9	Exercices	34

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons rappeler et compléter des notions d'enseignement secondaire afin d'avoir des bases solides pour aborder sereinement les chapitres suivants. Nous aborderons, notamment, les notions fondamentales d'analyse sur les fonctions.

1.2 Généralités

Domaine de définition



Définition 1.1

On appelle fonction numérique d'une variable réelle x toute application f dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de réels. On note :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé l'ensemble de définition de f .



Remarque

Si la fonction n'est connue que par la donnée de son expression $f(x)$, on convient que le domaine de définition est l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe.



Exemple 1.1



Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$. Le réel $f(x)$ existe si et seulement si $9-x^2 > 0$. Comme $9-x^2 = (3-x) \times (3+x)$, on en déduit que le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]-3; 3[$.

Représentation graphique d'une fonction



Définition 1.2

On se place dans un repère orthonormal du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'ensemble des points M de coordonnées $M(x; f(x))$ est appelé courbe représentative de f ou graphe de f .



Remarque

La courbe représentative de f a pour équation $y = f(x)$.

Parité d'une fonction



Définition 1.3

Un ensemble D inclus dans $\mathbb{R}$ est centré en 0 si $\forall x \in D, -x \in D$.



Définition 1.4 (Fonction paire)

Soit f une fonction dont le domaine de définition est centré en 0.

La fonction f est paire si, pour tout x appartenant à D , on a : $f(-x) = f(x)$.



Exemple 1.2

Considérons $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 3}{x^4}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, centré en 0.
 $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(-x) = \frac{2(-x)^2 + 3}{(-x)^4} = \frac{2x^2 + 3}{x^4} = f(x)$. La fonction f est donc paire.



À retenir

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 1.5 (Fonction impaire)

Soit f une fonction dont le domaine de définition D est centré en 0.

La fonction f est impaire si, pour tout x appartenant à D , on a : $f(-x) = -f(x)$.



Exemple 1.3

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x$.
 Pour tout réel x , on a : $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x)$.
 f est donc impaire.
 Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x^2$.
 g est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. En considérant $g(1) = 4$ et $g(-1) = 2$, on constate que g n'est ni paire, ni impaire.



À retenir

- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.
- Si f est une fonction impaire définie en 0 alors $f(0) = 0$.
- Pour étudier une fonction paire ou impaire, on peut restreindre l'intervalle d'étude (en considérant, par exemple, $\mathbb{R}^+$ au lieu de $\mathbb{R}$).

Fonction composée et applications graphiques



Définition 1.6 (Composée de deux fonctions)

Soient deux fonctions $u : I \rightarrow J$ et $v : J \rightarrow \mathbb{R}$.

La composée de u par v , notée $v \circ u$, est définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.



Exemple 1.4

On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos(x)$.

On a : $v \circ u : x \mapsto \cos(x^2)$ et $u \circ v : x \mapsto (\cos(x))^2$.



Propriété 1.1 (Translation de courbes)

On se place dans un repère orthogonal du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda$ est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $\lambda \vec{j}$.
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x + \lambda)$ est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $-\lambda \vec{i}$.



Exemple 1.5

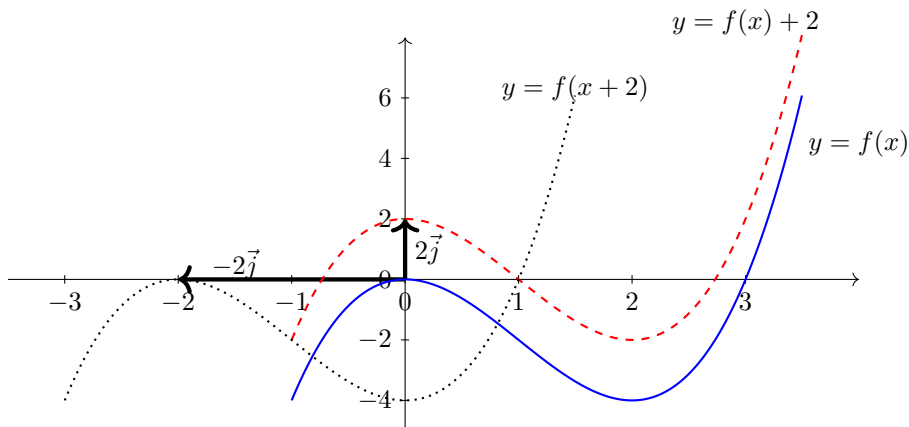


FIGURE 1.1 – Courbes représentatives de f , $x \mapsto f(x + 2)$ et $x \mapsto f(x) + 2$

**Exemple 1.6**

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
 $f(x) = (x + 1)^2 - 2$. La courbe de f peut donc s'obtenir à partir de celle de la fonction $x \mapsto x^2$ par translation de vecteur $\vec{u} = -\vec{i} - 2\vec{j}$.

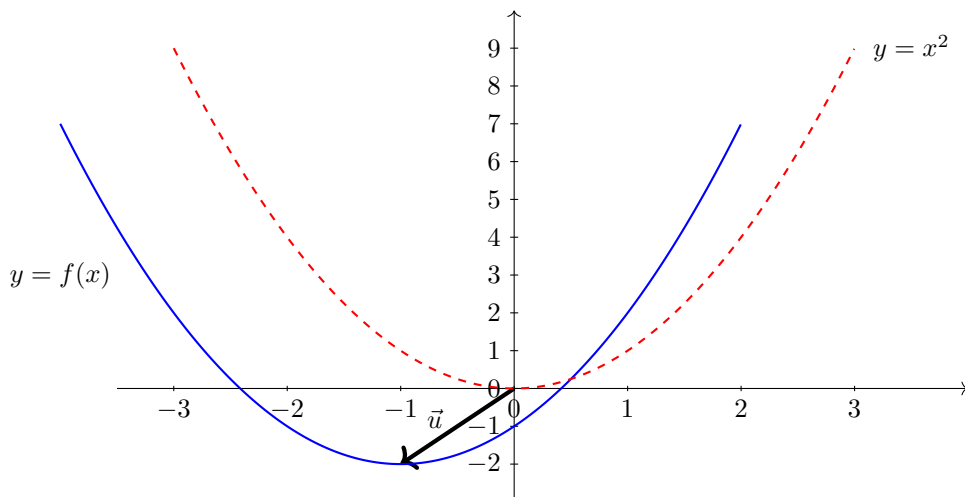


FIGURE 1.2 – Courbes représentatives de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 + 2x - 1$

1.3 Trigonométrie

Mesure principale d'un angle

**Propriété-définition 1.2 (Mesure principale d'un angle)**

On appelle mesure principale d'un angle l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

**Exemple 1.7**

Afin d'obtenir la mesure principale de $\frac{47\pi}{3}$, il peut être utile déterminer l'entier pair le plus proche de $\frac{47}{3}$. Il s'agit de 16 et on peut écrire

$$\frac{47}{3} = 16 - \frac{1}{3} \text{ soit } \frac{47\pi}{3} = 8 \times 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

Ainsi, la mesure principale d'un angle de mesure $\frac{47\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

Généralités sur les fonctions circulaires

Dans tout ce chapitre, le plan sera rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'origine O .



Définition 1.7

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens direct. Soit M un point sur ce cercle tel que $(\vec{u}; \vec{OM}) = x$. $\cos(x)$ correspond à l'abscisse de M et $\sin(x)$ correspond à l'ordonnée de M .

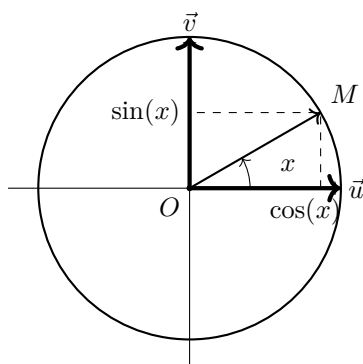


FIGURE 1.3 – Cercle trigonométrique

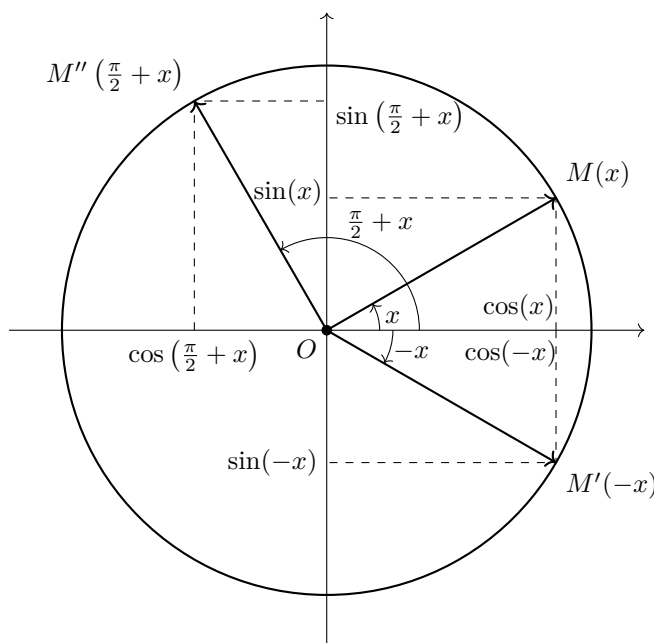


FIGURE 1.4 – Cercle trigonométrique avec les points associés à x , $-x$ et $x + \frac{\pi}{2}$

**Propriété 1.3**

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Pour tout x réel, on a : $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

**Propriété 1.4**

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

**Remarque**

La relation $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ induit que la courbe d'équation $y = \cos(x)$ se déduit de la courbe d'équation $y = \sin(x)$ par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$. On a également la relation : $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$. Les deux relations précédentes permettent d'exprimer un sin sous la forme d'un cos et inversement.

**Définition 1.8**

La fonction tangente, notée $\tan$, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

**Propriété 1.5**

θ	0° (0)	30° ($\frac{\pi}{6}$)	45° ($\frac{\pi}{4}$)	60° ($\frac{\pi}{3}$)	90° ($\frac{\pi}{2}$)
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

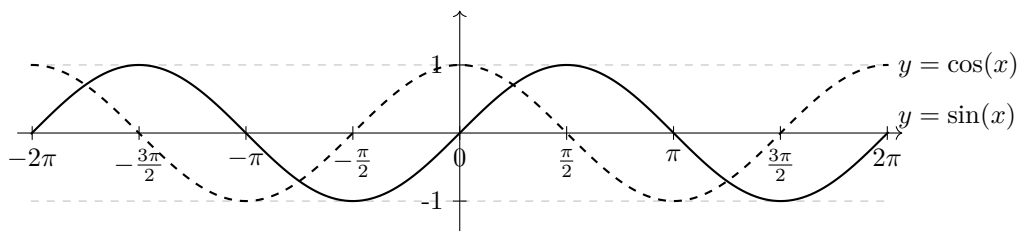
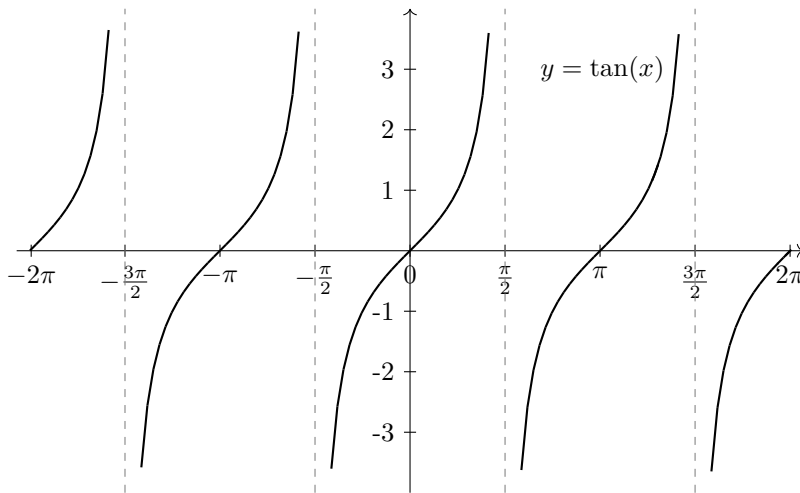


FIGURE 1.5 – Représentation graphique des fonctions cos et sin sur $[-2\pi; 2\pi]$

FIGURE 1.6 – Représentation de la fonction $\tan$

Périodicité



Définition 1.9

Une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ est dite périodique de période T si T est le plus petit réel positif tel que :

- $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x + T \in \mathcal{D}$
- $\forall x \in \mathcal{D}, f(x + T) = f(x)$.



Propriété 1.6

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques de période 2π .

La fonction $\tan$ est périodique de période π sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.



Exemple 1.8

Soient A et ω des réels strictement positifs.

Déterminons la période T de la fonction $f : t \mapsto A \cos(\omega t)$ définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(t + T) = f(t) \Leftrightarrow A \cos(\omega[t + T]) = A \cos(\omega t)$$

$$f(t + T) = f(t) \Leftrightarrow A \cos(\omega t + \omega T) = A \cos(\omega t)$$

car étant 2π -périodique, on en déduit que : $\omega T = 2\pi$ soit $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

**Propriété 1.7**

Soient A et ω des réels strictement positifs, φ étant un réel.

Les fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**À retenir**

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ induit que $\omega T = 2\pi$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
- Dans ce cas, on peut restreindre l'étude de la fonction f à tout intervalle I de longueur $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- La courbe représentative de f sera obtenue à partir du graphe obtenu sur I par des translations de vecteurs $kT \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Propriété 1.8**

- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow b \equiv a [2\pi] \quad \text{ou} \quad b \equiv -a [2\pi]$.
- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow b \equiv a [2\pi] \quad \text{ou} \quad b \equiv \pi - a [2\pi]$.

**Exemple 1.9**

$$\cos(x) = 0,5 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Formules d'addition et de duplication

On considère a et b deux réels.

**Propriété 1.9 (Formules d'addition)**

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

**Propriété 1.10 (Formules de duplication)**

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$.
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.

**Propriété 1.11 (Linéarisation de $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$)**

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$.
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$.

**Propriété 1.12**

- $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$.
- $\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \sin a \sin b$.
- $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$.
- $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b$.

**Propriété 1.13**

- $\cos a \cos b = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2}$.
- $\sin a \sin b = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}$.
- $\sin a \cos b = \frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{2}$.
- $\cos a \sin b = \frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{2}$.

1.4 Variations d'une fonction

**Définition 1.10**

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$. Soit $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle.

- f est croissante sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est strictement croissante sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est décroissante sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est strictement décroissante sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f est monotone si elle est croissante ou décroissante.
- f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Note**

Si une fonction est croissante (ou décroissante) sur deux intervalles distincts I et J , elle n'est pas nécessairement croissante sur l'union $I \cup J$.

Considérons, par exemple, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, strictement décroissante sur chacun des intervalles $I =]-\infty; 0[$ et $J =]0; +\infty[$.

$f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$ ce qui montre que f n'est pas décroissante sur $I \cup J = \mathbb{R}^*$.

**Propriété 1.14**

Soient f et g deux fonctions définies sur les sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}$, telles que $f(E) \subset F$. Alors :

- Si f et g sont toutes deux croissantes sur respectivement E et F (ou toutes deux décroissantes), alors $g \circ f$ est croissante sur E .
- Si f est croissante sur E et g est décroissante sur F , alors $g \circ f$ est décroissante.
- De plus, si la monotonie de f et de g est stricte, celle de $g \circ f$ l'est également.

**Exemple 1.10**

Considérons les fonctions $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto x + 1$.

Ces deux fonctions sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ donc $f \circ g : x \mapsto (x + 1)^3$ et $g \circ f : x \mapsto 1 + x^3$ sont également strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

En outre, $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$,

$\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

1.5 Fonctions usuelles

La fonction logarithme népérien

**Propriété 1.15**

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

**Propriété 1.16**

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
- $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$.
- $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

**Propriété 1.17**

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\forall p \in \mathbb{R}, \ln(a^p) = p \ln(a)$.

**Exemple 1.11**

Considérons l'équation $(E) : 2 \ln(x - 4) = \ln 3$.

Cette équation n'a de sens que sur $]4; +\infty[$.

$2 \ln(x - 4) = \ln 3 \Rightarrow \ln(x - 4)^2 = \ln 3 \Rightarrow (x - 4)^2 = 3$. Ainsi :

$x - 4 \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ soit $x \in \{4 - \sqrt{3}; 4 + \sqrt{3}\}$.

Le domaine de définition de l'équation étant $]4; +\infty[$, il en résulte que (E) admet pour ensemble-solution $\mathcal{S} = \{4 + \sqrt{3}\}$.

La fonction logarithme décimal

**Propriété 1.18**

La fonction logarithme décimal, notée $\log$ est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

**Remarque**

$\log$ a les mêmes propriétés algébriques et le même sens de variations que $\ln$.

En outre, $\log(10) = 1$ et, pour tout entier n , $\log(10^n) = n$

Fonctions exponentielles

**Définition 1.11**

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$.

**Remarque**

La fonction $\exp$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\ln(e^x) = x$.
- $\forall y > 0$, on a : $e^{\ln y} = y$.