

SCIENCES SUP



Problèmes corrigés

Master • CAPES • Agrégation

50 PROBLÈMES D'ANALYSE

- ▶ **Corrigés détaillés**
- ▶ **Méthodes**

Jean-Michel Ghidaglia

DUNOD

50 PROBLÈMES D'ANALYSE

Consultez nos parutions sur dunod.com

Dunod Éditeur, édition de livres, Microsoft Press, ETSF, Ediscience, InterEditions

Recherche OK

Édiscience
ETSF
InterEditions
Microsoft Press

Accueil Contact

Sciences et Techniques Informatique Gestion et Management Sciences Humaines

Interviews

Reinventer les RH : urgence !
Gilles Verrier

Ramses 2008 : exigez la nouvelle formule !
Thierry de Montbrial

toutes les interviews

Club Enseignants
Inscrivez-vous !

Événements

Découvrez le vidéoBlog
Profession dirigeant

En librairie ce mois-ci

Développement personnel et coaching : découvrez le NOUVEAU SITE InterEditions.com !

les libraires

Bacchus 2008
Enjeux, stratégies et pratiques dans la filière vitivinicole
Jean-Pierre Couderc, Hervé Hannin, François d'Hauteville, Etienne Montaigne

Profession dirigeant
De la conception du changement à l'action
Gérard Roth, Michal Kurtyka

PYTHON
Petit guide à l'usage du développeur agile
Tarek Ziadé

150 petites expériences de psychologie du sport pour mieux comprendre les champions... et les autres
Yvan Paquet, Pascal Legrain, Elisabeth Rosnet, Stéphane Rusinek

LES BIBLIOTHEQUES DES METIERS

Bibliothèque du DSI
Gestion industrielle
Métiers de la vigne et du vin
Marketing et Communication
Directeur d'établissement social et médico-social
Toutes les bibliothèques

LES NEWSLETTERS

Action sociale
Psychologie
Développement personnel et Bien-être
Entreprise
Expertise comptable
Informatique et NTIC
Industrie
Toutes les newsletters

acheter Mon panier

bibliothèques des métiers newsletters Microsoft®Press ediscience.net expert-sup.com

Notice légale

50 PROBLÈMES D'ANALYSE

Jean-Michel Ghidaglia

Professeur à l'École normale supérieure de Cachan

DUNOD

Une précédente version de cet ouvrage a été publiée aux éditions Springer dans la collection «Scopos» sous le titre *Petits problèmes d'analyse*

Illustration de couverture : Gettyimage®

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
	

© Dunod, Paris, 2008
ISBN 978-2-10-053810-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

AVANT-PROPOS	vii
1 • ÉNONCÉS DES 50 PROBLÈMES	1
1.1 Inégalités fonctionnelles	1
1.2 Topologie dans des espaces vectoriels normés de dimension infinie	4
1.3 Autour des fonctions implicites	10
1.4 Calcul des variations	14
1.5 Équations différentielles	20
1.6 Séries de Fourier	32
1.7 Sommes infinies	42
2 • INDICATIONS	46
3 • SOLUTIONS DÉTAILLÉES ET MÉTHODES	58
INDEX	221

Avant-propos

Cet ouvrage rassemble 50 problèmes qui couvrent une large part de l'Analyse mathématique que l'on rencontre au cours de la Licence à l'Université et dans les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques. Il s'agit de l'analyse mathématique de base que doivent maîtriser les étudiants en Master ainsi que les candidats aux CAPES et à l'Agrégation de mathématiques.

À la section 1, 46 des problèmes sont énoncés de manière « économe » afin que le lecteur puisse réellement s'exercer à chercher plusieurs voies d'attaque pour la résolution de la question posée. Si ces recherches sont infructueuses, des indications (question après question) sont fournies à la section 2. La section 3 du livre étant quant à elle constituée par des corrigés détaillés où l'on insiste particulièrement sur *les méthodes classiques en Analyse*. À cet effet, un paragraphe intitulé « Commentaires » complète chaque corrigé afin d'y apporter un éclairage supplémentaire.

D'autre part 4 des problèmes de la section 1 (numérotés 10, 24, 36 et 45) sont des problèmes dont l'énoncé est extrêmement détaillé et de ce fait ils ne nécessitent pas d'indication. Ils sont tout autant corrigés en profondeur et ce corrigé est encore suivi de commentaires.

Il est à noter que les 50 problèmes sont *entièrement* indépendants tant au niveau de leur énoncé que de leur solution. Il est donc possible (et conseillé) de les aborder dans un ordre arbitraire.

Il ne s'agit pas d'un livre d'exercices, il ne s'agit pas non plus (loin s'en faut) d'un livre de cours. Il s'agit d'un manuel pour *apprendre des mathématiques* et être capable d'en comprendre certains des ressorts.

En effet, il est séduisant de croire que les mathématiques (à condition paraît-il qu'elles soient « correctement » présentées) peuvent s'apprendre linéairement. On commence par les définitions, puis les théorèmes en passant par quelques lemmes et propositions, on observe quelques exemples, on fait quelques exercices et ensuite on passe à une autre leçon. Il n'en n'est rien (heureusement), les mathématiques - comme toutes les autres sciences - s'apprennent et se comprennent par des allers et retours incessants entre théorie et application, calculs sordides et réflexion.

Nous souhaitons que ceux qui travailleront à l'aide de cet ouvrage (complété par un cours de base d'Analyse) pourront ainsi en tirer utilement partie.

Le principe de la numérotation est le suivant. Le premier numéro se rapporte à l'énoncé, le deuxième est le numéro de la section alors que le troisième indique la question traitée.

Cet ouvrage est une version révisée et augmentée du volume « Petits problèmes d'analyse » paru en 1999 chez Springer et aujourd'hui épuisé. Je tiens à remercier Véronique Almadovar qui a assuré la réalisation technique du manuscrit et Emmanuel Lorin pour sa relecture attentive et critique de son contenu. Ce travail n'aurait certainement pas été possible sans le support intellectuel que procure l'ambiance créatrice du Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, laboratoire commun à l'École Normale Supérieure de Cachan et au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS).

Jean Michel Ghidaglia
jmg@cmla.ens.cachan.fr

Énoncés des 50 problèmes

Nous donnons ci-dessous les énoncés. Bien que *totalement indépendants* entre eux, ils ont été regroupés par thèmes principaux.

1.1 INÉGALITÉS FONCTIONNELLES

Un point de vue très fécond consiste à considérer les fonctions (d'une ou de plusieurs variables réelles par exemple) comme des éléments d'un espace vectoriel normé, ou parfois comme des points d'un espace affine normé. L'idée de base consiste à essayer de transposer à ces espaces, en général de dimension infinie, les résultats « habituels » dans $\mathbb{R}^n$ pour en déduire des résultats sur les fonctions auxquelles on s'était initialement intéressé. Un exemple classique est le théorème du point fixe de Picard qui permet, lorsqu'il est invoqué sur un espace vectoriel normé *complet* de fonctions, de montrer l'existence de solutions pour une équation différentielle (voir par exemple le problème 36). Ces espaces vectoriels où vivent les fonctions en question — $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, ... — sont de dimension *infinie*. Deux différences essentielles apparaissent alors :

- ces espaces ne sont pas forcément complets, c'est justement cette propriété qui est cruciale pour l'application du théorème de point fixe de Picard,
- on dispose sur ces espaces de plusieurs normes qui n'ont aucune raison d'être équivalentes entre elles.

Dans cette première série de problèmes, il s'agit d'établir diverses relations entre normes sur des espaces de fonctions réelles d'une variable réelle. Le problème 5 est consacré à certaines inégalités de Sobolev pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Ces inégalités sont des outils très puissants pour l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment celles de la physique mathématique : équation de la chaleur, équation de Schrödinger, équations de Navier-Stokes, etc. Nous renvoyons aussi aux commentaires à ce problème à la page 76.

Énoncé 1

Soit $u \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ avec $u(0) = u(1) = 0$.

1.1.1. Montrer que $\int_0^1 u^2(x) dx \leq 4 \int_0^1 u'(x)^2 dx$.

1.1.2. Notons $\Sigma = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}), u(0) = u(1) = 0, \int_0^1 u'(x)^2 dx = 1\}$. On admet qu'il existe $v \in \Sigma$ tel que

$$\int_0^1 v^2(x) dx = \max_{w \in \Sigma} \int_0^1 w^2(x) dx. \quad (\star)$$

Expliquer pourquoi l'existence d'un tel v n'est pas immédiate.

1.1.3. Montrer que seules deux fonctions $v \in \mathcal{C}^2([0, 1]) \cap \Sigma$ peuvent vérifier $(\star)$. Calculer alors $c_0 \equiv \int_0^1 v^2(x) dx$.

1.1.4. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ avec $u(0) = u(1) = 0$ on a

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u'(x)^2 dx.$$

1.1.5. Montrer cette inégalité sans faire l'hypothèse qu'il existe $v \in \Sigma$ vérifiant $(\star)$. En déduire alors qu'il existe $v \in \mathcal{C}^2([0, 1]) \cap \Sigma$ vérifiant $(\star)$.

Énoncé 2

Soit u une application continue et 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par u_k le nombre complexe $u_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On note alors $Q(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| |u_k|^2 \in [0, +\infty]$.

2.1.1. Montrer que $Q(u)$ peut être effectivement égal à $+\infty$.

2.1.2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\varphi(t)$ le nombre $\int_0^{2\pi} |u(x+t) - u(x)|^2 dx$. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.1.3. Montrer que $\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \alpha Q(u)$ où α est une constante indépendante de u .

2.1.4. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors

$$Q^2(u) \leq \beta \int_0^{2\pi} u^2(x) dx \int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{dx} \right)^2(x) dx \quad (\star)$$

où β est une constante indépendante de u .

2.1.5. Quelle est la meilleure constante dans $(\star)$?