JOÃO RODRIGUES DA SILVA NETO

Noções de curvas parametrizadas:

teorema fundamental das curvas

1ª edição

Caicó-RN

Ravenia Adail Silva Vieira Lima

2019

@João Rodrigues da Silva Neto, 2019. Proibida a reprodução parcial ou total desta obra sem autorização escrita do autor

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

Silva Neto, João Rodrigues da, 1994-.
S586n Noções de curvas parametrizadas [recurso eletrônico] : teorema fundamental das curvas / João Rodrigues da Silva Neto. – Caicó, RN: R. A. S. V. Lima, 2019.
52 p.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Bibliografia: p. 49-50
ISBN 978-65-901575-1-5

1. Curvas planas. 2. Geometria diferencial. 3. Matemática – Estudo e ensino. II. Título.

CDD 516.36

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

PREFÁCIO

Este livro aborda a teoria inicial de curvas parametrizadas, correspondente aos primeiros passos da geometria diferencial, que a parte da matemática que estuda entes geométricos utilizando elementos do cálculo diferencial. Dessa forma, um certo conhecimento prévio sobre cálculo diferencial é necessário para um melhor entendimento da obra.

É interessante salientar, que antes de aborda a geometria diferencial propriamente dita, a presenta obra, no capítulo 1, introduz os conceitos e propriedades dos vetores, tanto no plano quanto no espaço euclidiano.

No capítulo 2, é apresentada a definição de curvas parametrizadas, bem como os invariantes geométricos, denominados por torção e curvatura, estabelecendo resultados e exemplos que culminam no teorema fundamental das curvas.

Com o intuito de elaborar um material completo sobre geometria diferencial, onde o objetivo principal é abordar os principais resultados, bem como suas respectivas demonstrações, de maneira clara e objetiva, este pequeno livro é o primeiro

resultado desse esforço. Tal desejo se expande para outras áreas da matemática, como álgebra linear, evidentemente tudo deve ter um início, portanto é com grande satisfação que apresento tal obra como o primeiro passo dessa empreitada.

Agradeço inicialmente a Deus, pela oportunidade de elaborar tal obra, também agradeço a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN), a Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), onde fiz minha graduação e mestrado respectivamente. Gostaria também de agradecer a todos os futuros leitores.

SUMÁRIO

1 VETORES 5

1.1 Vetores em $\mathbb{R}^2$ 5

1.1.1 Produto Interno 15

1.2 Vetores em $\mathbb{R}^3$ 19

2 CURVAS 26

2.1 Curvas parametrizadas 26

2.2 Invariantes Geométricos 34

2.3 Teorema Fundamental das Curvas 41

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 49

1 VETORES

Nesse capítulo são estabelecidos os conceitos e características de vetores planos e espaciais, que servira de base no decorrer do livro. Tais conceitos e características são muito utilizados quando deseja-se estabelecer magnitude, sentido e direção em determinado estudo, a física e as engenharias de maneira geral utilizam dessa abordagem em diversas situações, como por exemplo nos estudos de mecânica clássica.

1.1 Vetores em $\mathbb{R}^2$

Abordaremos os vetores tanto de forma geométrica quanto de forma algébrica, dado que a primeira terá um mais o objetivo de exemplificação e ilustração do que qualquer outra coisa. Dessa forma, um vetor é um segmento de reta orientado determinado por um ponto inicial A e um final B, indicaremos por $\overrightarrow{AB}$.

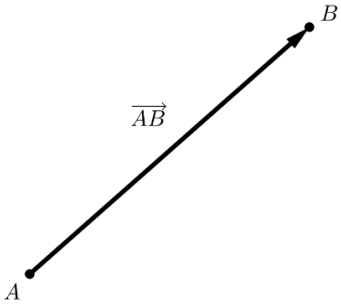

Figura 1: Vetor

Quando dois vetores possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido consideramos esses vetores iguais.

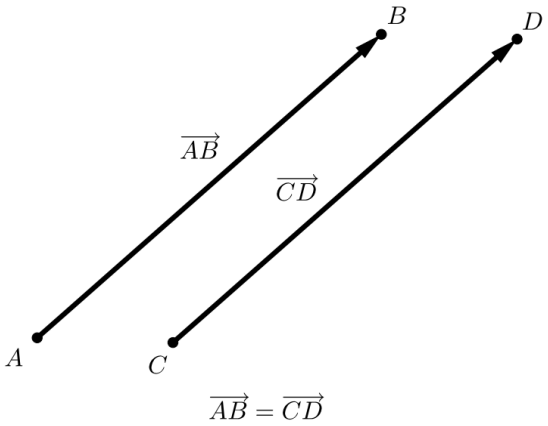

Figura 2: Vetores iguais

Considerando um sistema de coordenadas ortogonais em um plano, é fácil observar que um mesmo vetor pode ser representado em qualquer lugar desse plano, consequente mente qualquer vetor pode ser representado de forma que o seu ponto inicial coincida com o a origem O, ficando assim determinado pelo seu ponto final A, ou seja, o vetor $\overrightarrow{OA}$ é determinado pelo ponto $A(x, y)$, onde x e y são a coordenadas do ponto A, assim podemos estabelecer que $\overrightarrow{OA} = \vec{A} = (x, y)$, onde x e y são

chamadas de componentes do vetor. É interessante perceber que um par ordenado (x, y), pode representar tanto um vetor quanto ponto, por esse motivo é comum colocar um seta acima da letra que corresponde a um vetor para diferencia-lo de um ponto, contudo quando o contexto for claro tal formalismo é geralmente dispensado.

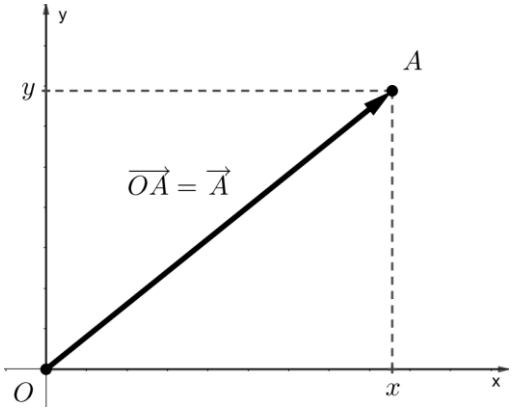

Figura 3: Vetor com ponto inicial na origem

Como afirmado anteriormente, vetores que possuem o mesmo comprimento, sentido e direção são iguais, consequentemente ao considerarmos o vetor com ponto inicial na origem $O(0,0)$ e ponto final em $A(a, b)$ podemos translada-lo pelo plano cartesiano simplesmente adicionando valores iguais

nas respectivas abcissas e ordenadas dos ponto inicial e final, isto é, considerando o vetor $u = (a, b)$ e ao adicionarmos α unidades nas abcissas e β unidades nas ordenadas, transladamos o vetor u de tal forma que o seu ponto inicial agora é (α, β) e o ponto final é $(a + \alpha, b + \beta)$.

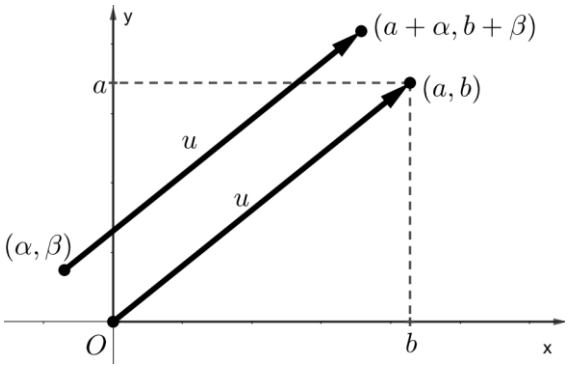

Figura 4: Vetor transladado

Nesse caso, dado um vetor $\overrightarrow{PQ}$, com $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_Q, y_q)$, o ponto final desse vetor quando o inicial encontra-se na origem é $(x_q - x_p, y_q - y_p)$, ou seja

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_q - x_p, y_q - y_p)$$

Exemplo 1: Encontre vetor $\overrightarrow{PQ}$, com $P = (3,4)$ e $Q = (6,5)$.

Resolução:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (6 - 3{,}5 - 4) = (3{,}1)$$

O ponto $(0{,}0)$ determina o **vetor nulo**, que pode der denotado apenas por $\mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{0} = (0{,}0)$. Qualquer ponto é o vetor nulo.

Como é de se esperar, o comprimento de um vetor é a distância entre o seu ponto inicial e final, esse comprimento é também chamado de módulo do vetor ou norma do vetor, denotaremos a norma de um vetor u por $\|u\|$. Assim, dado um vetor $u = (a, b)$ a norma desse vetor é a distância entre a origem e o ponto (a, b), ou seja,

$$\|u\| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo 2: Determine a norma do vetor $u = (2{,}5)$

Resolução:

$$\|u\| = \sqrt{(2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
