

Pierre Bernard | Mathieu Mansuy
Anne-Charline Chalmin | Oscar Devys | Marie Virat
Julien Freslon | Sylvain Gugger | Daniel Fredon | Jérôme Poineau



MATHS

PC-PSI

EXERCICES INCONTOURNABLES

4^e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

Table des matières

Algèbre

1 Algèbre linéaire	13
1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange	13
1.2 : Somme de projecteurs	14
1.3 : Calcul par blocs	16
1.4 : Propriétés de la trace	18
1.5 : Réduction des matrices de trace nulle	20
1.6 : Racines carrée de $-I_n$	23
1.7 : Matrices de rang 1	25
1.8 : Utilisation d'un polynôme annulateur	28
1.9 : Intersection de p hyperplans	30
1.10 : Déterminant et polynômes de Tchebychev	32
2 Réduction	35
2.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes	35
2.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions	38
2.3 : Réduction d'une matrice de taille 3	41
2.4 : Diagonalisation	44
2.5 : Réduction	48
2.6 : Trigonalisation	50
2.7 : Réduction d'une matrice à paramètres	53
2.8 : Diagonalisation simultanée	55
2.9 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes	57
2.10 : Diagonalisabilité et sous-espaces stables	60
2.11 : Caractérisations des endomorphismes nilpotents	63
2.12 : Théorème de Cayley-Hamilton	67
3 Espaces euclidiens	73
3.1 : Une caractérisation des bases orthonormées	73
3.2 : Un problème de minimisation	74

3.3 : Famille de polynômes orthogonaux	76
3.4 : Une caractérisation des isométries antisymétriques	80
3.5 : Isométries matricielles	82
3.6 : Centre de $O(E)$	84
3.7 : Décomposition d'une isométrie en produit de réflexions	86
3.8 : Applications conservant le produit vectoriel (PSI)	89
3.9 : Étude d'une rotation en dimension 3 (PSI)	90
3.10 : Formes quadratiques	92
3.11 : Quotients de Rayleigh	94
3.12 : Décomposition polaire	96

Topologie

4 Topologie des espaces vectoriels normés	101
4.1 : Réunion et intersection de boules	101
4.2 : Boule unité pas très ronde	104
4.3 : Projection d'un ouvert, d'un fermé de $\mathbb{R}^2$	106
4.4 : Somme d'ouverts, de fermés	108
4.5 : Distance à une partie	110
4.6 : Normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	111
4.7 : Convergence d'une suite en dimension infinie	114
4.8 : Théorème de Cayley-Hamilton	116
4.9 : Application linéaire non continue	120
4.10 : Norme d'application linéaire	121
4.11 : Caractérisation des normes euclidiennes	123
5 Rappels d'analyse et fonctions vectorielles	129
5.1 : Inégalité arithmético-géométrique	129
5.2 : Inégalités de Hölder et de Minkowski	133
5.3 : Continuité des fonctions convexes	136
5.4 : Approximation d'une fonction par interpolation	138
5.5 : Une application des formules de Taylor	140
5.6 : Majoration d'un $\vec{o}$	142
5.7 : Calcul d'un déterminant par dérivation	144
5.8 : Réflexion sur une ellipse	146
5.9 : Tracé de la cardioïde	149
5.10 : Existence de nombres transcendants	152
5.11 : Points de discontinuité d'une fonction monotone	153

Analyse

6 Séries numériques	157
6.1 : Série avec terme général défini par récurrence	157
6.2 : Équivalents de sommes et de restes	159
6.3 : Développement asymptotique	161
6.4 : Transformation d'Abel	165
6.5 : Utilisation d'un produit de Cauchy	168
6.6 : Série alternée un peu cachée	170
6.7 : Règle de Raabe-Duhamel	174
7 Intégrales généralisées	179
7.1 : Un premier calcul d'intégrale	179
7.2 : Deux intégrales trigonométriques	182
7.3 : Changement de variable	185
7.4 : Convergence de l'intégrale de Dirichlet	187
7.5 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	192
7.6 : Convergence et calcul d'une famille d'intégrales	196
7.7 : Étude d'une suite d'intégrales	197
7.8 : Équivalent d'une intégrale	199
8 Suites et séries de fonctions	203
8.1 : Convergence uniforme de suites de fonctions	203
8.2 : Intersion limite et intégrale impossible	206
8.3 : Une suite de fonctions définie par récurrence	208
8.4 : Convergence uniforme d'une série de fonctions	211
8.5 : Fonction ζ de Riemann	215
8.6 : Régularité d'une série de fonctions	220
8.7 : Calcul d'intégrales à l'aide de séries de fonctions	222
8.8 : Une interversion « à la main »	225
8.9 : Intégration et convergence uniforme	228
9 Séries entières	233
9.1 : Calculs de sommes de séries numériques	233
9.2 : Calculs de rayons de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert	236
9.3 : Calculs de rayons de convergence avec la définition	237
9.4 : Domaine de convergence	239
9.5 : Convergence et calcul de la somme	241
9.6 : Théorème d'Abel radial	243
9.7 : Détermination d'une somme	246
9.8 : Développement d'une fonction en série entière	248
9.9 : Calcul de la somme d'une série numérique	249

9.10 : Nombres de Catalan	253
9.11 : Étude du comportement au bord	257
9.12 : Théorème de Liouville	260
10 Équations différentielles	263
10.1 : Utilisation d'un changement de fonction	263
10.2 : Utilisation d'un changement de variable	267
10.3 : Utilisation de séries entières (cas régulier)	269
10.4 : Utilisation de séries entières (cas singulier)	272
10.5 : Système différentiel d'ordre 2 (A diagonalisable)	276
10.6 : Système différentiel d'ordre 3 (A trigonalisable)	278
10.7 : Lemme de Grönwall	282
11 Intégrales à paramètres	285
11.1 : Calcul d'une intégrale à paramètre	285
11.2 : Fonction Γ d'Euler	289
11.3 : Transformée de Laplace du sinus cardinal	292
11.4 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	295
11.5 : Une formule d'Euler	299
11.6 : Intégrale de Gauss	305
11.7 : Théorème de d'Alembert-Gauss	309
12 Fonctions de plusieurs variables	315
12.1 : Étude de continuité	315
12.2 : Dérivée directionnelle	316
12.3 : Inégalité des accroissements finis	318
12.4 : Fonctions homogènes	319
12.5 : À propos du théorème de Schwarz	322
12.6 : Une équation aux dérivées partielles	325
12.7 : Équation des cordes vibrantes	327
12.8 : Recherche d'extremum	330
12.9 : Extremums sur un fermé-borné	332
12.10 : Tangente à une hyperbole	334
12.11 : Courbe définie de manière implicite	335

Probabilités

13 Espaces probabilisés	343
13.1 : Loi de succession de Laplace	343
13.2 : Ruine du joueur	345
13.3 : Apparition de mots dans une suite de piles ou faces	348
13.4 : Probabilité de survie d'une espèce	351
13.5 : Lemmes de Borel-Cantelli	354

13.6 : Produit eulérien	357
14 Variables aléatoires discrètes	359
14.1 : Natalité	359
14.2 : Cartes à collectionner	360
14.3 : Nombre de poussins	363
14.4 : Compétition d'athlétisme	364
14.5 : Un jeu de pile ou face	367
14.6 : Temps de jeu à la roulette	369
14.7 : Loi conjointe et lois marginales	374
14.8 : Matrice aléatoire	377
14.9 : Processus de Galton-Watson	380
14.10 : Lois généralisées de Bernoulli	385
14.11 : Une inégalité de concentration	391
14.12 : Théorème de Weierstrass	395
 Index	 399

Remerciements

Pierre BERNARD et Anne-Charline CHALMIN souhaitent remercier leurs collègues du lycée Saliège :

- Mathieu LEROY-LERÊTRE, pour ses conseils sur $\text{T}_\text{E}\text{X}$,
- Emmanuel ROBIN, pour son expertise sur les programmes.

Mathieu MANSUY souhaite remercier Amandine POLET pour ses nombreux conseils, et a une pensée pour sa grand-mère Françoise.

Marie VIRAT souhaite remercier Dédé, Steph, Émeraude, Caro, Nicolas et Pierre pour leur soutien, leurs encouragements et leurs réflexions dans la réalisation de cet ouvrage.

Avant-propos

Cet ouvrage est conçu pour les élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques en filières PSI et PC.

Il propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution. Comme l'indique le titre, l'objectif a été de couvrir, pour l'ensemble des chapitres du programme, non seulement toutes les notions à connaître, mais encore les techniques, astuces essentielles, ainsi que quelques exercices-types, classiques ou de synthèse : en particulier, on progresse, au sein de chaque chapitre, des techniques les plus fondamentales d'application du cours vers des techniques plus avancées pouvant ressembler à des exercices d'oral de concours.

Cette 4^e édition tient compte de toutes les nouveautés et modifications du nouveau programme, valable à partir de l'année 2022-2023. Au-delà d'une mise à jour nécessaire liée au changement de programme, nous avons cherché à améliorer et approfondir l'édition précédente. Il en résulte une centaine de pages supplémentaires, dédiées pour moitié à l'approfondissement des exercices existants, et pour moitié au traitement des nouveaux exercices.

Bien entendu, nous avons veillé à ce que ces apports respectent les principes qui ont fait le succès de cette collection :

- fournir un panel le plus représentatif possible des exercices-types, compétences et notions, sur chaque chapitre ;
- donner, pour chaque exercice, d'une part une rédaction exemplaire conforme aux attendus des épreuves écrites – tout en mettant en relief les canevas susceptibles de resservir –, d'autre part une explication des démarches inductives et déductives sous-jacentes – afin d'entraîner l'esprit des lecteurs à aborder des exercices originaux.

Enfin, nous souhaitons ici remercier les auteurs historiques, sur le travail desquels nous nous sommes fondés pour cette édition : Julien Freslon, Sylvain Gugger, Jérôme Poineau et Daniel Fredon.

Les auteurs,

Pierre BERNARD
(coordonnateur, référent T_EX)

Mathieu MANSUY
(référent PC et probabilités)

Oscar DEVYS
(référent MP)

Anne-Charline CHALMIN
(référente PSI)

Marie VIRAT
(référente PT)

Structure de l'ouvrage

Le livre est divisé en 14 chapitres, chacun étant consacré à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Topologie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Cet ouvrage a été rédigé en vue d'une utilisation thématique, c'est-à-dire non linéaire :

- De manière intuitive, un étudiant qui veut approfondir un chapitre particulier s'attellera aux exercices du chapitre en question. Parfois, un exercice utilisera des notions d'autres chapitres pas encore étudiés ; dans ce cas l'énoncé de l'exercice le rappellera.
- De manière plus précise, il se référera à l'index en fin d'ouvrage, afin d'aller directement travailler les notions de son choix. Ainsi, un étudiant qui voudrait travailler spécifiquement l'utilisation du *lemme des coalitions* en probabilités n'aura pas besoin de feuilleter tous les exercices de la quatrième partie, mais pourra se contenter de chercher l'entrée « coalitions (lemme des) » de l'index qui le renverra directement aux exercices mentionnant cette notion.

Les programmes de mathématiques des sections PSI et PC étant extrêmement proches, nous avons choisi de les traiter dans ce même ouvrage. Dans les rares cas où une notion est abordée différemment dans les deux programmes, l'exercice explicite les attendus de chacun des deux programmes, quitte à proposer deux rédactions distinctes. Enfin, lorsqu'un exercice est réservé à la section PSI, son titre le mentionne.

Partie 1

Algèbre

Algèbre linéaire

Exercice 1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que, pour tout $x \in [0, n]$, $|P(x)| \leq 1$.
Montrer que :

$$|P(-1)| \leq 2^{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad |P(n+1)| \leq 2^{n+1} - 1.$$

Les polynômes de Lagrange sont au programme des classes de spéciales PSI et PC. C'est un outil puissant qu'il faut savoir invoquer sans qu'on vous le demande. Le point essentiel qu'il convient de souligner dans la rédaction est que les $n+1$ réels sont distincts.

On peut alors exprimer P en fonction des $P(i)$ (de valeur absolue plus petite que 1) et des L_i . Il ne reste plus qu'à majorer les $|L_i(-1)|$ et $|L_i(n+1)|$.



Considérons la famille $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (0, 1, \dots, n)$. Ces $n+1$ réels sont distincts deux à deux, donc on peut leur associer les polynômes $L_0, \dots, L_n$ d'interpolation de Lagrange. Il vient alors :

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i = \sum_{i=0}^n P(i) L_i.$$

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} |L_i(-1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{-1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{j+1}{i-j} \prod_{j=i+1}^n \frac{j+1}{j-i} \\ &= \prod_{j=0}^{i-1} (j+1) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^n (j+1) \prod_{j=i+1}^n \frac{1}{j-i} \\ &= i! \times \frac{1}{i!} \times \frac{(n+1)!}{(i+1)!} \times \frac{1}{(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!} \\ &= \binom{n+1}{i+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\begin{aligned} |P(-1)| &= \left| \sum_{i=0}^n P(i)L_i(-1) \right| \leq \sum_{i=0}^n |P(i)L_i(-1)| \leq \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i+1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - 1 = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

De même, on trouve :

$$\begin{aligned} |L_i(n+1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{n+1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{n+1-j}{i-j} \prod_{j=i+1}^n \frac{n+1-j}{j-i} \\ &= \prod_{j=0}^{i-1} (n+1-j) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^n (n+1-j) \prod_{j=i+1}^n \frac{1}{j-i} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!} \times \frac{1}{i!} \times (n-i)! \times \frac{1}{(n-i)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}. \end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} |P(n+1)| &= \left| \sum_{i=0}^n P(i)L_i(n+1) \right| \leq \sum_{i=0}^n |P(i)L_i(n+1)| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$



On aurait également pu appliquer le résultat concernant $P(-1)$ au polynôme $Q(X) = P(n-X)$, qui satisfait les mêmes hypothèses que P .

Exercice 1.2 : Somme de projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs de E tels que $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.

1. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{rg}(p_i) = \text{tr}(p_i)$.
2. Montrer que $E = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n)$.

1. L'idée immédiate pour calculer la trace de l'un des p_i est de déterminer sa matrice dans une base de E . On choisit une base adaptée à la décomposition $E = F_i \oplus G_i$, si p_i projette sur F_i parallèlement à G_i .



Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Notons F_i et G_i les sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_i \oplus G_i$, et tels que p_i projette sur F_i parallèlement à G_i .

Soit $q \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $(e_1, \dots, e_q)$ est une base de F_i et $(e_{q+1}, \dots, e_n)$ une base de G_i . Alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

D'une part, pour $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $p_i(e_k) = e_k$. D'autre part, pour $k \in \llbracket q+1, n \rrbracket$, $p_i(e_k) = 0$. Par conséquent, la matrice de p_i dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_i) = \begin{pmatrix} I_q & O_{q, n-q} \\ O_{n-q, q} & O_{n-q, n-q} \end{pmatrix}.$$

Il en découle que $\text{tr}(p_i) = q = \dim(F_i) = \dim(\text{Im}(p_i)) = \text{rg}(p_i)$.



Il est toujours utile de se souvenir que, si p est un projecteur, il projette sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$.

2. La question précédente nous donne immédiatement une information sur les dimensions : la somme des rangs de p_i est la somme de leur trace, qui est $\text{tr}(\text{Id}_E)$ (par linéarité de la trace) donc qui vaut $d = \dim(E)$.

Il suffit donc de montrer que la somme est directe, ou qu'elle vaut E . L'hypothèse nous permettra de montrer plus facilement le fait qu'elle vaut E .



Soit $x \in E$. Alors $x = p_1(x) + \dots + p_n(x)$ par hypothèse. Ceci se traduit par :

$$x \in \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n).$$

Comme $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n)$ est clairement inclus dans E , on en déduit que :

$$\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n) = E.$$



De manière générale, seule l'inclusion directe est vraie :

$$\text{Im}(p_1 + \dots + p_n) \subset \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n).$$



D'autre part, comme tr est linéaire, on obtient :

$$\text{tr}(p_1) + \dots + \text{tr}(p_n) = \text{tr}(p_1 + \dots + p_n) = \text{tr}(\text{Id}_E) = \dim(E).$$

Or, d'après la question précédente, $\text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_n) = \dim(E)$. Par conséquent, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n)) = \dim(\text{Im}(p_1)) + \dots + \dim(\text{Im}(p_n)).$$

Donc cette somme est directe. En conclusion, on obtient bien :

$$E = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n).$$

Exercice 1.3 : Calcul par blocs

Soit $(n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r , décomposée par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{où } A \in GL_r(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que, pour tout vecteur colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

1. Notons tout d'abord que comme A est de taille $r \times r$, nécessairement B est de taille $r \times (n - r)$, C est de taille $(n - r) \times r$ et D est de taille $(n - r) \times (n - r)$.

On peut commencer par chercher X de manière pratique, en effectuant les produits par blocs. On se rend cependant vite compte que le calcul sera utile dans la question suivante, pour montrer que $D = CA^{-1}B$, mais ne permettra pas de répondre à cette première question. Il faut ici montrer l'existence de X de manière théorique.

Pour Y donné, le premier produit est une combinaison linéaire des $n - r$ dernières colonnes de M . Le second produit correspond à une combinaison linéaire des r premières. Il faut donc montrer que toute combinaison linéaire de colonnes de A peut s'exprimer comme combinaison linéaire des r premières.

Par hypothèse, la matrice A est inversible. Ainsi, ses colonnes forment une famille libre dans $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Il en est donc de même des r premières colonnes de M . Comme M est de rang r , cette famille libre est en fait une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M .



Notons $M_1, \dots, M_n$ les n colonnes de M , $A_1, \dots, A_r$ celles de A et $C_1, \dots, C_r$ celles de C .

Comme A est inversible, $(A_1, \dots, A_r)$ est libre dans $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Montrons que la famille $(M_1, \dots, M_r)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_r M_r = O_{n,1}$.

En calculant par blocs, il vient :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r \\ \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r \end{pmatrix} = O_{n,1}.$$

En particulier $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r = O_{r,1}$ donc, comme $(A_1, \dots, A_r)$ est libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Ainsi la famille $(M_1, \dots, M_r)$ est libre dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc dans l'espace $F = \text{Vect}(M_1, \dots, M_n)$. Comme $\dim(F) = \text{rg}(M) = r$, $(M_1, \dots, M_r)$ est une base de F .

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-r} \end{pmatrix}$. Alors, on trouve :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = y_1 M_{r+1} + \cdots + y_{n-r} M_n \in F.$$

Le vecteur $M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix}$ admet donc des coordonnées dans la base $(M_1, \dots, M_r)$. Notons-les $(x_1, \dots, x_r)$. Il vient alors :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = x_1 M_1 + \cdots + x_r M_r = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix} \text{ en notant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

2. On exploite ici la question précédente en effectuant le calcul par blocs.



Notons que le nombre de lignes de X est égal au nombre de colonnes de A et aussi égal au nombre de colonnes de C , et que le nombre de lignes de Y est égal au nombre de colonnes de B et aussi égal au nombre de colonnes de D . Cette remarque essentielle rend licite le calcul par blocs.



Soit $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$. D'après la question précédente, il existe $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix}.$$

En calculant par blocs, on obtient :

$$M \begin{pmatrix} O_{r,1} \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix} \text{ et } M \begin{pmatrix} X \\ O_{n-r,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $BY = AX$ et $DY = CX$. Comme A est inversible, la première relation donne $X = A^{-1}BY$. On en déduit que $DY = (CA^{-1}B)Y$.

Soit $i \in \llbracket 1, n-r \rrbracket$. Considérons le vecteur $Y_i \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ qui a tous ses coefficients nuls, sauf celui de position i qui vaut 1. En appliquant l'égalité précédente à Y_i , il vient $DY_i = (CA^{-1}B)Y_i$, ce qui implique que les matrices D et $CA^{-1}B$ ont même i -ème colonne. En conclusion $D = CA^{-1}B$.

Exercice 1.4 : Propriétés de la trace

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. En s'aidant des matrices élémentaires, déterminer une base de $\text{Ker}(\text{tr})$.
2. En déduire que $\text{Ker}(\text{tr}) = \text{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\})$.
3. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant :

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer que φ est colinéaire à tr .

1. La trace étant une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan, donc de dimension $n^2 - 1$. Il suffit donc de trouver une famille libre composée de $n^2 - 1$ matrices pour en avoir une base.

L'énoncé nous invite à utiliser les matrices élémentaires $E_{i,j}$, dont tous les coefficients valent 0 sauf celui en position (i, j) qui vaut 1. Si $i \neq j$, il est clair que $\text{tr}(E_{i,j}) = 0$. Ceci nous fait déjà $n^2 - n$ matrices. Il en manque $n - 1$, que l'on construit comme combinaison linéaire des $E_{i,i}$ (pour que la famille obtenue soit libre), par exemple les $E_{i,i} - E_{n,n}$ pour i entre 1 et $n - 1$.



L'application tr est une forme linéaire non nulle de E , par conséquent son noyau est un hyperplan de E . Donc $\dim(\text{Ker}(\text{tr})) = n^2 - 1$.

D'une part, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, $\text{tr}(E_{i,j}) = 0$. Ainsi, la famille $\bigcup_{1 \leq i \neq j \leq n} \{E_{i,j}\}$ est incluse dans $\text{Ker}(\text{tr})$ et comporte $n^2 - n$ éléments.

D'autre part, pour tout $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $\text{tr}(E_{i,i} - E_{n,n}) = 0$. Ainsi, la famille $\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} \{E_{i,i} - E_{n,n}\}$ est incluse dans $\text{Ker}(\text{tr})$ et comporte $n - 1$ éléments.

Notons $\mathcal{F}$ la réunion des deux familles précédentes. Alors $\mathcal{F}$ est une famille de $n^2 - 1$ éléments de $\text{Ker}(\text{tr})$. Montrons qu'elle est libre dans E .

Soient $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n} \in \mathbb{K}^{n^2 - n}$ et $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (E_{k,k} - E_{n,n}) = 0.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k E_{k,k} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \right) E_{n,n} = 0.$$

La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ étant une base de E , elle est libre. Donc tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, ainsi que tous les μ_i pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Ainsi $\mathcal{F}$ est libre. Comme elle contient $n^2 - 1 = \dim(\text{Ker}(\text{tr}))$ éléments, c'est donc une base de $\text{Ker}(\text{tr})$.

2. Nous devons montrer que $\text{Ker}(\text{tr})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de matrices de la forme $AB - BA$. Il s'agit d'une égalité d'ensembles, on peut donc montrer deux inclusions.

La première vient du fait que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour tout $(A, B) \in E^2$. Par linéarité de tr , il vient alors $\text{tr}(AB - BA) = 0$.

Pour la seconde, on utilise la question précédente en montrant que tous les éléments de la base de $\text{Ker}(\text{tr})$ qu'on a trouvée peuvent s'écrire sous la forme $AB - BA$. Pour ce faire, il faut se souvenir de la formule $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $j \neq k$, 1 si $j = k$.



Procédons par double inclusion.

- Soit $(A, B) \in E^2$. Alors $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$.

Ainsi $AB - BA \in \text{Ker}(\text{tr})$. Comme $\text{Ker}(\text{tr})$ est stable par combinaison linéaire, on en déduit que :

$$\text{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\}) \subset \text{Ker}(\text{tr}).$$

- Réciproquement :

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, tel que $i \neq j$. Alors $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j} - E_{i,j}E_{i,i}$.

Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Alors $E_{k,k} - E_{n,n} = E_{k,n}E_{n,k} - E_{n,k}E_{k,n}$.

Ainsi tous les éléments de la base de $\text{Ker}(\text{tr})$ déterminée dans la question précédente peuvent s'écrire sous la forme $AB - BA$, avec $(A, B) \in E^2$.

Tout élément de $\text{Ker}(\text{tr})$ est donc combinaison linéaire de matrices de cette forme ; par conséquent :

$$\text{Ker}(\text{tr}) \subset \text{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\}).$$

En conclusion, $\text{Ker}(\text{tr}) = \text{Vect}(\{AB - BA \mid (A, B) \in E^2\})$.

3. Si φ est nulle, alors $\varphi = 0 \text{ tr}$. Sinon, elle vérifie $\varphi(AB - BA) = 0$ par linéarité et $\text{Ker}(\varphi)$ contient tous les éléments de la forme $AB - BA$, donc leurs combinaisons linéaires, donc $\text{Ker}(\text{tr})$. Comme $\text{Ker}(\text{tr})$ est de dimension $n^2 - 1$, un supplémentaire de $\text{Ker}(\text{tr})$ dans E est de dimension 1. On peut prendre par exemple $\mathbb{K}E_{1,1}$. On détermine alors la valeur de λ telle que $\varphi = \lambda \text{ tr}$ en comparant $\varphi(E_{1,1})$ et $\text{tr}(E_{1,1}) = 1$.



Si $\varphi = 0$, alors $\varphi = 0 \text{ tr}$, et le résultat est atteint.

Sinon, par linéarité de φ , pour tout $(A, B) \in E^2$, on obtient :

$$\varphi(AB - BA) = \varphi(AB) - \varphi(BA) = 0.$$

$\text{Ker}(\varphi)$ contient donc toutes les matrices de la forme $AB - BA$, donc toutes leurs combinaisons linéaires. D'après la question précédente, on en déduit que $\text{Ker}(\text{tr}) \subset \text{Ker}(\varphi)$. Or, φ est une forme linéaire non nulle de E , donc son noyau est un hyperplan de E , tout comme celui de tr . Ils sont donc de même dimension, et comme l'un est inclus dans l'autre, ils sont égaux.

Comme $\text{tr}(E_{1,1}) = 1$, $E_{1,1} \notin \text{Ker}(\text{tr})$ et $\text{Ker}(\text{tr}) \cap (\mathbb{K}E_{1,1}) = \{O_n\}$. Comme $\dim(\text{Ker}(\text{tr})) + \dim(\mathbb{K}E_{1,1}) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, on en déduit que :

$$\text{Ker}(\text{tr}) \oplus \mathbb{K}E_{1,1} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Posons $\lambda = \varphi(E_{1,1})$. Alors $\varphi(E_{1,1}) = \lambda \operatorname{tr}(E_{1,1})$. Soit $M \in \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$. On obtient $\varphi(M) = 0$ (comme justifié plus haut) et $\lambda \operatorname{tr}(M) = 0$.

Ainsi φ et $\lambda \operatorname{tr}$ coïncident sur deux espaces supplémentaires, elles sont donc égales.

Exercice 1.5 : Réduction des matrices de trace nulle

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E . On suppose que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathbb{K}x$. Démontrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}_E$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle de trace nulle.

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que la première colonne de $P^{-1}MP$ soit nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1.

3. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra raisonner par récurrence sur n .

1. Ce résultat n'a *a priori* rien d'évident. L'hypothèse est que, pour tout élément x de E , il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. La conclusion est qu'il existe un scalaire λ tel que, pour tout élément x de E , $f(x) = \lambda x$. Ces deux énoncés diffèrent par l'ordre des quantificateurs : dans le premier cas, le scalaire dépend de x , alors qu'il n'en dépend pas dans le second ! Autrement dit, il s'agit de montrer que les scalaires λ_x sont en fait tous égaux.



Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Par hypothèse, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = \lambda_k e_k$. Montrons que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$.

Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.

Sinon, pour $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec k et l distincts, il vient par linéarité de f :

$f(e_k + e_l) = \lambda_k e_k + \lambda_l e_l$. Mais il existe aussi un scalaire μ tel que : $f(e_k + e_l) = \mu(e_k + e_l)$, où $\mu = \lambda_{e_k + e_l}$ avec les notations utilisées plus haut.

Ainsi, on obtient :

$$\lambda_k e_k + \lambda_l e_l = \mu(e_k + e_l) = \mu e_k + \mu e_l.$$

Par liberté de la base $(e_1, \dots, e_n)$, il vient alors :

$$\lambda_k = \mu = \lambda_l.$$

Ainsi, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Par conséquent, en posant $\lambda = \lambda_1$, on obtient $f = \lambda \operatorname{Id}_E$. C'est bien une homothétie de E .



Il convient de bien faire la distinction entre une phrase logique du type $\forall x, \exists \lambda$, où pour chaque x , on obtient un λ **dépendant** de x , et une phrase du type $\exists \lambda, \forall x$ qui nous donne un λ **constant** par rapport à x .