

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE

Jesús Ferrer

Jesús Ferrer

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE

Reservados todos los derechos. Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas de las leyes, la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier medio o procedimiento incluidos la reprografía y el tratamiento informático.

© 2015 ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE

© Jesús Ferrer

© 2015 ACCI

C/ Magnolias 35 bis 28029 Madrid. España

Web: www.acciediciones.com Tel: 0034 91 3117696

ISBN papel: 978-84-15705-75-8

Descargado de: www.visionlibros.com

Las opiniones expresadas en este trabajo son exclusivas del autor. No reflejan necesariamente las opiniones del editor, que queda eximido de cualquier responsabilidad derivada de las mismas.

Disponible en préstamo, en formato electrónico, en www.bibliotecavisionnet.com

Disponible en papel y ebook

www.vnetlibrerias.com

www.terrabooks.com

Pedidos a:

pedidos@visionnet.es

Si quiere recibir información periódica sobre las novedades de nuestro grupo editor envíe un correo electrónico a:

subscripcion@visionnet.es

A **Miguel Llopis**, el millor pilotari, i
a **Manuel Valdivia**, el millor matemàtic...

Índice general

0.1. Introducción	5
1. Números reales y complejos	7
1.1. El cuerpo de los números reales	7
1.1.1. El semianillo de los números naturales. Método de Inducción.	7
1.1.2. El anillo de los números enteros	10
1.1.3. El cuerpo de los números racionales	14
1.1.4. El cuerpo ordenado arquimediano y completo de los números reales	18
1.2. Números complejos	29
1.2.1. Números complejos. Representación gráfica	29
1.2.2. Operaciones con números complejos	29
1.2.3. Trigonometría. Forma polar de un número complejo	31
1.2.4. Factorización de polinomios	39
2. Sucesiones y series de números reales	43
2.1. Sucesiones de números reales	43
2.1.1. Sucesiones de números reales	43
2.1.2. Operaciones con sucesiones	46
2.1.3. Convergencia de sucesiones	47
2.1.4. Progresiones. Sucesiones divergentes	53
2.1.5. Cálculo de límites de sucesiones	60
2.2. Series de números reales	77
2.2.1. Series de números reales	77
2.2.2. Criterios de convergencia para series de términos positivos	81
2.2.3. Series alternadas	93
2.2.4. Convergencia absoluta y convergencia incondicional de series	94
2.2.5. Productos de series	98
3. Funciones reales. Cálculo diferencial e integral	103
3.1. Funciones reales	103
3.1.1. Funciones reales	103
3.1.2. Límites de funciones	105
3.1.3. Funciones continuas	111

3.1.4.	Funciones uniformemente continuas	123
3.1.5.	Funciones monótonas	128
3.2.	Cálculo diferencial	133
3.2.1.	Derivada de una función en un punto. Diferencial de una función en un punto. Interpretación geométrica	133
3.2.2.	Propiedades de las derivadas. Cálculo de derivadas	139
3.2.3.	Variación local. Teoremas fundamentales	149
3.2.4.	Derivadas de orden superior. Desarrollos de Taylor	162
3.2.5.	Convexidad y concavidad local. Representación gráfica	174
3.3.	Cálculo Integral	181
3.3.1.	Integral indefinida. Algunos métodos de integración	181
3.3.2.	Integral definida	202
3.3.3.	Cálculo de áreas y volúmenes	217
3.3.4.	Integrales impropias	221
4.	Problemas resueltos	233
4.1.	Problemas de conjuntos numéricos	233
4.2.	Problemas de sucesiones	245
4.3.	Problemas de series	264
4.4.	Problemas de límites de funciones y continuidad	277
4.5.	Problemas de Cálculo Diferencial	293
4.6.	Problemas de Cálculo Integral	322

0.1. Introducción

En lo que sigue presentamos unos apuntes de Análisis de funciones de una variable que pretendemos sean fácilmente comprensibles. Puesto que estos apuntes están pensados para un posible público con un sólido interés por las Ciencias Matemáticas, intentaremos desarrollar rigurosamente las demostraciones de todos los resultados que van apareciendo en la teoría, es decir, propiedades, lemas, proposiciones, teoremas y corolarios; el principio de su prueba se marca con el símbolo $\equiv$ y su finalización con $\clubsuit$. Con la intención de ilustrar los conceptos teóricos que se están explicando, iremos resolviendo una serie de ejemplos complementarios, los cuales representamos mediante Ex. 1, Ex. 2, etc.

Para poder seguir estos apuntes con garantías creemos conveniente que el lector sea conocedor de los elementos y propiedades básicas de la Teoría de Conjuntos, es decir, las operaciones conjuntistas de la unión ($A \cup B$), intersección ($A \cap B$) y complementación ($A \setminus B$), el producto cartesiano de dos conjuntos ($A \times B$), etc., además de la simbología propia de la Lógica Matemática como el uso de los cuantificadores: $\forall$, que significa "para todo...", $\exists$, que significa "existe algún...", el símbolo de pertenencia $\in$, el de inclusión conjuntista $\subset$, etc.

Puesto que nos parece de suma importancia que el estudiante de esta materia con interés en formar parte de la profesión adquiera la suficiente destreza y formación en el rigor que esta ciencia requiere, hemos añadido en la última parte de estos apuntes una serie de problemas resueltos que constituyen un material básico y de dominio necesario. Al tratarse de una primera escritura de estos apuntes-de-profesor, es muy probable que el lector encuentre muchos errores y "gazapos" que, además de hacer más divertida la lectura (personalmente, cuando era alumno me divertía hallar errores en los textos, por supuesto siempre que no fuese extremadamente difícil corregirlos), lo que seguro demuestran es la humanidad del autor.

Miramar, Octubre de 2014

Capítulo 1

Números reales y complejos

1.1. El cuerpo de los números reales

- 1.- El semianillo de los números naturales. Método de Inducción.
- 2.- El anillo de los números enteros.
- 3.- El cuerpo de los números racionales.
- 4.- El cuerpo ordenado arquimediano y completo de los números reales.

1.1.1. El semianillo de los números naturales. Método de Inducción.

El conjunto de los *números naturales* (o enteros no negativos) se representa por $\mathbf{N}$ y se trata de

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Según David Kronecker (matemático alemán del siglo XIX): *Die Ganzen Zahlen hat der lieber Got gemacht, alles anderes ist Menschenwerk*, que significa "El buen Dios creó los números naturales, todo lo demás es obra del hombre". Es decir, los números naturales puede decirse que todo el mundo los comprende de manera natural, sin esforzarse. Sin embargo, desde un punto de vista matemático, éso no parece muy riguroso, así que vamos a esbozar una introducción axiomática (por cierto, axiomas son afirmaciones que se admiten como verdaderas).

Axiomas de Peano (Giuseppe)

Los cinco Axiomas de Peano son los siguientes:

- (Ax. I) 0 es un número natural
- (Ax. II) Si n es un número natural, existe un número natural $s(n)$ llamado sucesor de n
- (Ax. III) 0 no es sucesor de número natural alguno
- (Ax. IV) Dos números naturales distintos tiene sucesores distintos
- (Ax. V) Si un conjunto cumple: 0 pertenece al conjunto y el sucesor de cualquier número natural de dicho conjunto pertenece al conjunto, entonces ese conjunto contiene a $\mathbf{N}$

Estructura algebraica de los números naturales

La estructura algebraica de $\mathbf{N}$ se consigue introduciendo sus dos operaciones básicas: la suma y el producto. Ello se hace también axiomáticamente añadiendo dos nuevos axiomas a los 5 de Peano: Al escribir n, m estamos suponiendo que $n, m \in \mathbf{N}$ y por $s(n)$ indicamos al sucesor de n .

(Ax. VI) $\forall n, m, \quad n + 0 = n \quad \wedge \quad n + s(m) = s(n + m)$

(Ax. VII) $\forall n, m, \quad n \cdot 0 = 0 \quad \wedge \quad n \cdot s(m) = n \cdot m + n$

Propiedades de la suma de números naturales

1) Bien fundada: Dados $n, m \in \mathbf{N}$, distinguimos dos casos

a) $m = 0$. Entonces, del Ax. VI, $n + m = n + 0 = n \in \mathbf{N}$.

b) $m \neq 0$. Entonces, como m tiene antecesor, es decir, $\exists p \in \mathbf{N}/s(p) = m$, del Ax. VI, $n + m = n + s(p) = s(n + p) \in \mathbf{N}$.

2) Asociativa: $\forall n, m, p \in \mathbf{N}, \quad (n + m) + p = n + (m + p)$. Su demostración se hace de modo similar al visto antes.

3) Neutro: $\forall n \in \mathbf{N}, \quad n + 0 = n$, nos dice que el 0 es el elemento neutro de la operación de sumar.

4) Conmutativa: $\forall n, m \in \mathbf{N}, \quad n + m = m + n$

Propiedades del producto de números naturales

1) Bien fundada: Dados $n, m \in \mathbf{N}$, distinguimos dos casos

a) $m = 0$. Entonces, del Ax. VII, $n \cdot m = n \cdot 0 = 0 \in \mathbf{N}$.

b) $m \neq 0$. Entonces, como m tiene antecesor, es decir, $\exists p \in \mathbf{N}/s(p) = m$, del Ax. VII, $n \cdot m = n \cdot s(p) = n \cdot p + n \in \mathbf{N}$.

2) Asociativa: $\forall n, m, p \in \mathbf{N}, \quad (n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$. Su demostración se hace de modo similar al visto antes.

3) Neutro: $\forall n \in \mathbf{N}, \quad n \cdot 1 = n$, nos dice que el 1 es el elemento neutro de la operación de multiplicar. Su demostración es sencilla:

$$n \cdot 1 = n \cdot s(0) = n \cdot 0 + n = 0 + n = n.$$

4) Conmutativa: $\forall n, m \in \mathbf{N}, \quad n \cdot m = m \cdot n$

5) Distributiva: $\forall n, m, p \in \mathbf{N}, \quad n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$.

Con todo ésto, se dice que $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ posee una estructura algebraica de *semianillo unitario y conmutativo*.

El Método de Inducción

Como consecuencia del Ax. V de Peano, tenemos que todo conjunto que contenga al 0 y que, si contiene a un natural contiene al sucesor, ha de contener a todo el conjunto $\mathbf{N}$. Esto se explicita del siguiente modo, conocido con el nombre de *Método, o Principio, de Inducción*:

Supongamos que una determinada propiedad (o predicado) P se enuncia en el universo del discurso de los números naturales, i.e., $\mathbf{N}$ es el universo. Sea $A = \{n \in \mathbf{N} : P(n)\}$,

es decir, A es el subconjunto de $\mathbf{N}$ para los que se cumple P . Entonces, si se cumplen las siguientes dos premisas:

- 1) $P(0)$, es decir, la propiedad es válida para el 0 (equivalentemente, $0 \in A$)
- 2) $\forall n, P(n) \rightarrow P(n+1)$, es decir, el conocimiento de que la propiedad es válida para n garantiza su validez para $n+1$ (equivalentemente, $n \in A \rightarrow n+1 \in A$)

Podemos afirmar que $A = \mathbf{N}$.

Así pues, al realizar la demostración de que cierta propiedad la cumplen todos los números naturales siguiendo el Método de Inducción, todo se reduce a seguir los dos pasos siguientes:

Primero: Demostrar que la propiedad es válida para $n = 0$.

Segundo: Suponer que la propiedad es válida para n (lo que se llama *Hipótesis de Inducción, H.I.*) y, a partir de esa suposición, demostrar que la propiedad se sigue cumpliendo para $n+1$ (la Tesis de Inducción).

Ex. 1 *Demostrar que la suma de todos los números pares consecutivos, a partir del 0 hasta otro par, da siempre el producto de dos números consecutivos.*

≡

Primero comprobemos con ejemplos concretos que la cosa parece correcta:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot 1 \\ 0 + 2 &= 2 = 1 \cdot 2 \\ 0 + 2 + 4 &= 6 = 2 \cdot 3 \\ 0 + 2 + 4 + 6 &= 12 = 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

Por tanto, parece sensato conjeturar que $0+2+4+\dots+(2n) = n \cdot (n+1)$. Si demostramos que esta igualdad la cumplen todos los números naturales tendremos demostrada nuestra afirmación del enunciado del ejercicio. Por comodidad, escribimos $P(n)$ para indicar que el natural n cumple la igualdad anterior.

Usando el Método de Inducción, primero demostramos que se cumple $P(0)$: Ya lo hemos verificado al escribir unos cuantos ejemplos, pero lo volvemos a explicar: Desde el par 0 hasta el par 0 sólo hay un número par, el 0, por tanto, el primer miembro de la igualdad vale cero, como $0 = 0 \cdot 1$, tenemos que 0 es producto de dos naturales consecutivos.

Demostramos ahora el segundo paso (normalmente el más complicado): Supongamos (Hipótesis de Inducción) que se cumple $P(n)$, todo se reduce ahora a demostrar que $P(n+1)$ sigue siendo válida (Tesis de Inducción):

Para comprender lo que hay que hacer, volvamos a escribir la H.I. y la T.I., pero ahora simbólicamente

$$\begin{aligned} (H.I.): \quad & 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = n \cdot (n+1) \\ (T.I.): \quad & 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + (2n) + (2(n+1)) = (n+1) \cdot (n+2) \end{aligned}$$

El motivo de volver a escribir, sobre todo la T.I., es que si no tenemos claro qué es lo que hay que demostrar difícilmente lo conseguiremos demostrar. Así pues, para demostrar la T.I., como se trata de una igualdad, usaremos el *Método Deductivo*, es decir, a partir del

primer miembro, haciendo las deducciones correctas que haga falta, llegaremos al segundo miembro

$$\begin{aligned} 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + (2n) + (2(n+1)) &= [0 + 2 + 4 + 6 + \dots + (2n)] + (2(n+1)) \\ &= [\text{usando la H.I.}] = n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) = (n+1) \cdot (n+2), \end{aligned}$$

que es lo que buscábamos. ♣

1.1.2. El anillo de los números enteros

Construcción de los números enteros

Sabemos que el conjunto de los números naturales es $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. En $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definimos la siguiente relación binaria

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \quad (\text{suma de extremos} = \text{suma de medios}).$$

Es bastante fácil verificar que $\mathcal{R}$ es una R.B.E. en $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (comprobadlo!!). Veamos cómo determinar el conjunto cociente $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})/\mathcal{R}$:

Dado $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, la clase representada por (a, b) es

$$[(a, b)] = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x, y)\mathcal{R}(a, b)\}. \quad \text{Pero entonces}$$

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x + b = y + a\} = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : y = x + (b - a)\} \\ &= \{(x, x + (b - a)) : x \in \mathbf{N}\}. \end{aligned}$$

Para representar las clases más cómodamente (y para que aparezcan de hecho los signos) tomamos el siguiente convenio

$$[(a, b)] = \begin{cases} 0, & \text{si } a = b, \\ a - b, & \text{si } a > b, \\ -(b - a), & \text{si } b > a. \end{cases}$$

De este modo los distintos números enteros corresponden a las distintas clases inducidas por esta relación de equivalencia:

$$\begin{aligned} 0 &= [(0, 0)] = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\} \\ 1 &= [(1, 0)] = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), \dots\} \\ -1 &= [(0, 1)] = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots\} \\ 2 &= [(2, 0)] = \{(2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), \dots\} \\ -2 &= [(0, 2)] = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), \dots\} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si estos pares se representan en el semiplano superior del plano cartesiano, al unir los puntos de una misma clase e intersectar la recta que determinan con el eje de abscisas los puntos de corte que se obtienen son $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, es decir, el conjunto $\mathbf{Z}$.

Operaciones en $\mathbf{Z}$

1) Suma: Dados $m, n \in \mathbf{Z}$, por definición, sabemos que existen $a, b, c, d \in \mathbf{N}$ tales que $m = [(a, b)]$, $n = [(c, d)]$. Se define entonces

$$m + n = [(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)].$$

Se puede demostrar que esta operación cumple

(1.1) Bien definida: Es decir, la definición no depende del representante elegido (como debe ser...). Esta es la única propiedad que vamos a demostrar (es un buen ejercicio casero realizar las restantes demostraciones!!). Para ello, sean $m = [(a, b)] = [(a', b')]$ y $n = [(c, d)] = [(c', d')]$ dos números enteros. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} [(a, b)] = [(a', b')] \rightarrow a + b' = b + a' \\ [(c, d)] = [(c', d')] \rightarrow c + d' = d + c' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)] \\ [(a', b')] + [(c', d')] = [(a' + c', b' + d')] \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (a + c) + (b' + d') = b + a' + d + c' = (b + d) + (a' + c') \Rightarrow [(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')],$$

es decir, no importa los representantes que cojamos la clase-suma es la misma.

(1.2) Asociativa: $\forall m, n, p \in \mathbf{Z}$, $(m + n) + p = m + (n + p)$.

(1.3) Neutro: $\forall n \in \mathbf{Z}$, $(0 + n = n + 0 = n)$.

(1.4) Opuestos: $\forall n \in \mathbf{Z}$, $n + (-n) = (-n) + n = 0$.

(1.5) Conmutativa: $\forall m, n \in \mathbf{Z}$, $m + n = n + m$.

2) Producto: Si $m = [(a, b)]$, $n = [(c, d)]$ son dos elementos de $\mathbf{Z}$, definimos

$$m \cdot n = [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)].$$

Esta operación cumple

(2.1) Bien definida: Vamos a demostrarla. Para ello, sean $m = [(a, b)] = [(a', b')]$ y $n = [(c, d)] = [(c', d')]$ dos números enteros. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} [(a, b)] = [(a', b')] \rightarrow a + b' = b + a' \\ [(c, d)] = [(c', d')] \rightarrow c + d' = d + c' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)] \\ [(a', b')] \cdot [(c', d')] = [(a'c' + b'd', a'd' + b'c')] \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow (ac + bd) + (a'd' + b'c') = (ad + bc) + (a'c' + b'd') \Rightarrow [(ac + bd, ad + bc)] = [(a'c' + b'd', a'd' + b'c')]$$

es decir, no importa los representantes que cojamos la clase-producto es la misma.

(2.2) Asociativa: $\forall m, n, p \in \mathbf{Z}$, $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.

(2.3) Neutro: $\forall n \in \mathbf{Z}$, $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.

(2.4) Conmutativa: $\forall m, n \in \mathbf{Z}$, $m \cdot n = n \cdot m$.

(2.5) Distributiva: $\forall m, n, p \in \mathbf{Z}$, $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

Con todo ésto se dice que $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ es un anillo unitario y conmutativo.

Aritmética entera módulo m

Fijado un número natural $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, que llamamos *módulo*, dos números enteros $x, y \in \mathbf{Z}$ se dice que son *congruentes módulo m* , y se escribe $x \equiv y \pmod{m}$, siempre que al hacer la resta $x - y$ nos da un múltiplo (positivo o negativo) de m . Es decir

$$x \equiv y \pmod{m} \iff \exists p \in \mathbf{Z} / x - y = pm.$$

Observar que en el caso de que $x, y \in \mathbf{N}$ una forma de comprobar que $x \equiv y \pmod{m}$ consiste en hacer las divisiones enteras $\frac{x}{m}$, $\frac{y}{m}$ y verificar que dan el mismo resto. La congruencia en módulo m es una Relación Binaria de Equivalencia, ya que cumple las tres propiedades siguientes

Reflexiva: $\forall x \in \mathbf{Z}$, $x \equiv x \pmod{m}$.

Simétrica: Si $x, y \in \mathbf{Z}$, cumplen que $x \equiv y \pmod{m}$, entonces $y \equiv x \pmod{m}$.

Transitiva: Si $x, y, z \in \mathbf{Z}$, cumplen que $x \equiv y \pmod{m}$, $y \equiv z \pmod{m}$, entonces $x \equiv z \pmod{m}$.

Dado un número entero $a \in \mathbf{Z}$, podemos hablar de la *clase de equivalencia* representada por a , que está formada por el conjunto de todos los números enteros que son congruentes con $a \pmod{m}$. Explícitamente

$$\bar{a} = \{x \in \mathbf{Z} : x \equiv a \pmod{m}\},$$

Observemos que hay tantas clases distintas como indica el módulo m :

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{0, m, 2m, 3m, \dots, -m, -2m, -3m, \dots\} \\ \bar{1} &= \{1, 1+m, 1+2m, 1+3m, \dots, 1-m, 1-2m, 1-3m, \dots\} \\ \bar{2} &= \{2, 2+m, 2+2m, 2+3m, \dots, 2-m, 2-2m, 2-3m, \dots\} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \overline{m-1} &= \{(m-1), (m-1)+m, (m-1)+2m, (m-1)+3m, \dots, \\ &\quad (m-1)-m, (m-1)-2m, (m-1)-3m, \dots\} \end{aligned}$$

Verificamos que la clase que sigue, es decir, $\overline{m}$ es la misma que la clase $\bar{0}$, consecuentemente se repiten cíclicamente con período m :

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \{m, m+m, m+2m, m+3m, \dots, m-m, m-2m, m-3m, \dots\} \\ &= \{0, m, 2m, 3m, \dots, -m, -2m, -3m, \dots\} = \bar{0}. \end{aligned}$$

El conjunto formado por las diferentes m clases $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ recibe el nombre de *conjunto cociente* y se representa como $\mathbf{Z}/m$. Lo que acabamos de explicar nos dice que, al trabajar en un cierto módulo m , cualquiera de los infinitos elementos de $\mathbf{Z}$ pertenece a una determinada clase módulo m , por tanto la clase representada por dicho elemento coincide con la clase a la que pertenece. Para calcularla, en la práctica, todo consiste en dividir el número por el módulo y tomar el resto de la división.

Vamos seguidamente a introducir unas operaciones básicas dentro del conjunto cociente $\mathbf{Z}/m$.

Suma módulo m : Si tenemos dos clases $\bar{p}, \bar{q}$ de $\mathbf{Z}/m$, la forma de sumarlas es ésta

$$\bar{p} + \bar{q} = \overline{p+q}.$$

O sea, consiste en sumar los números representantes de cada clase y después clasificar.

Producto módulo m : Si tenemos dos clases $\bar{p}, \bar{q}$ de $\mathbf{Z}/m$, la forma de multiplicarlas es análoga

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = \overline{p \cdot q}.$$

O sea, consiste en multiplicar los números representantes de cada clase y después clasificar.

Como muestra de una de las muchas aplicaciones de la Aritmética módulo m , veamos el siguiente ejercicio.

Ex. 2 *Demostrar el criterio de divisibilidad por 3, es decir, un número entero es divisible por 3 si y sólo si, en su escritura decimal, la suma de todas sus cifras es múltiplo de 3.*

≡

Es suficiente con hacer la demostración para números naturales. Así, sea

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_k \cdot 10^k$$

el desarrollo decimal de $n \in \mathbf{N}$. Trabajando con clases residuales módulo 3, es decir, $\mathbf{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, donde

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{0, \pm 3, \pm 6, \dots\} \\ \bar{1} &= \{1, 4, 7, \dots, -2, -5, \dots\} \\ \bar{2} &= \{2, 5, 8, \dots, -1, -4, \dots\},\end{aligned}$$

y operando con dichas clases de manera natural, i.e., la clase-suma es la suma de clases y la clase-producto es el producto de clases, tenemos

$$\begin{aligned}\overline{10} &= \bar{1} \\ \overline{10^2} &= \overline{10^2} = \bar{1}^2 = \bar{1} \\ \overline{10^3} &= \overline{10^3} = \bar{1}^3 = \bar{1} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Por tanto

$$3 \mid n \Leftrightarrow \bar{0} = \bar{n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{10} + \overline{a_2} \cdot \overline{10^2} + \dots + \overline{a_k} \cdot \overline{10^k}$$

$$= \overline{a_0} + \overline{a_1} + \overline{a_2} + \dots + \overline{a_k} = \overline{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k} \Leftrightarrow 3 \mid (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k). \clubsuit$$

1.1.3. El cuerpo de los números racionales

Aunque este conjunto numérico tiene obviamente una gran importancia, vamos a indicar superficialmente cómo se realiza su construcción, de alguna manera similar a la del anillo de los enteros. En $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, con $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, definimos la siguiente relación binaria

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc \quad (\text{producto de extremos} = \text{producto de medios}).$$

Es fácil verificar que $\mathcal{R}$ es una R.B.E. en $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ (comprobadlo!!). Veamos cómo determinar el conjunto cociente $(\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*)/\mathcal{R}$:

Dado $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, la clase representada por (a, b) es

$$[(a, b)] = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* : (x, y)\mathcal{R}(a, b)\}.$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* : xb = ya\} = \{(ya, by) : y \in \mathbf{N}^*\} \\ &= \{y(a, b) : y \in \mathbf{N}^*\}. \end{aligned}$$

Para representar las clases más cómodamente (y para que aparezcan las fracciones) se representan como

$$\frac{a}{b} := [(a, b)] = \{y(a, b) : y \in \mathbf{N}^*\}.$$

Entonces el conjunto de los números racionales (o fraccionarios, o quebrados) se define como

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*)/\mathcal{R}.$$

Las operaciones de suma y de producto de fracciones se definen así: Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Puede comprobarse que ambas operaciones están bien definidas y que cumplen las siguientes propiedades: $(\mathbf{Q}, +)$ es un grupo abeliano, es decir, la suma es asociativa, tiene neutro, simétricos y es conmutativa; $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ es otro grupo abeliano y además el producto es distributivo respecto de la suma racional. Así pues, se dice que $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ posee una estructura de cuerpo.

Conjuntos ordenados

Un par $(A, \leq)$, donde A es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación binaria en A que cumple las tres propiedades siguientes

Reflexividad: $\forall a \in A, a \leq a$

Antisimetría: Si $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$

Transitividad: $\forall a, b, c \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$,

recibe el nombre de conjunto ordenado. Veamos algunas propiedades generales importantes de los conjuntos ordenados.

Orden total: Una relación de orden $\leq$ en el conjunto A se dice que es *total* siempre dos elementos cualesquiera de A son siempre *comparables*, es decir

$$\leq \text{ es total} \Leftrightarrow \forall a, b \in A, \quad a \leq b, \text{ ó, } b \leq a.$$

Elementos notables de un orden: En un conjunto ordenado $(A, \leq)$, sea B un subconjunto de A . Introducimos los siguiente elementos importantes:

- 1) Cota superior: Un elemento $a \in A$ es *cota superior* de B siempre que

$$\forall x \in B, \quad x \leq a.$$
- 2) Cota inferior: Un elemento $a \in A$ es *cota inferior* de B siempre que

$$\forall x \in B, \quad a \leq x.$$
- 3) Supremo: Cuando existe, a la menor de las cotas superiores de B se le llama *supremo* de B , se representa como $\sup(B)$. El $\sup(B)$ puede no pertenecer a B .
- 4) Ínfimo: Cuando existe, a la mayor de las cotas inferiores de B se le llama *ínfimo* de B , se representa como $\inf(B)$. El $\inf(B)$ puede no pertenecer a B .
- 5) Máximo: Cuando existe $\sup(B)$ y además $\sup(B) \in B$, se dice que B tiene *máximo* y se escribe $\max(B) = \sup(B) \in B$.
- 6) Mínimo: Cuando existe $\inf(B)$ y además $\inf(B) \in B$, se dice que B tiene *mínimo* y se escribe $\min(B) = \inf(B) \in B$.
- 7) Maximal: En un conjunto ordenado $(A, \leq)$, un elemento $a \in A$ es un *maximal* siempre que no existan elementos $x \in A$, distintos de a , tales que $a \leq x$.
- 8) Minimal: En un conjunto ordenado $(A, \leq)$, un elemento $a \in A$ es un *minimal* siempre que no existan elementos $x \in A$, distintos de a , tales que $x \leq a$.

Conjunto orden-completo: Un conjunto ordenado $(A, \leq)$ se dice que es *orden-completo*, o *completo para el orden*, siempre que todo subconjunto acotado superiormente admite supremo en A (también se llama principio del supremo).

El orden racional

Consideremos el subconjunto de $\mathbf{Q}$ dado por

$$\mathbf{Q}_+ = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbf{Q} : a \in \mathbf{N} \right\}.$$

Es decir, el conjunto $\mathbf{Q}_+$ está formado por todas las fracciones de numerador y denominador no-negativos. Las siguientes propiedades son fáciles de verificar

- 1) $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}_+, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}_+.$
- 2) $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}_+, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}_+.$

Entonces podemos hacer la siguiente definición: Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_+.$$

Veamos que $(\mathbf{Q}, \leq)$ es un conjunto ordenado.

Reflexividad: $\forall \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0 \in \mathbf{Q}_+ \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}.$$

Antisimetría: Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$ son tales que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \rightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} \in \mathbf{Q}_+ \rightarrow bc-ad \in \mathbf{N} \\ \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \in \mathbf{Q}_+ \rightarrow ad-bc \in \mathbf{N} \end{array} \right\} \Rightarrow ad-bc=0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Transitividad: $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbf{Q}$, si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_+ \\ \frac{e}{f} - \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}_+ \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{e}{f} - \frac{c}{d} \right) + \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) \in \mathbf{Q}_+ \Rightarrow \frac{e}{f} - \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_+ \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}.$$

El orden definido en $\mathbf{Q}$ es total, ya que, si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$, entonces, como $ad-bc \in \mathbf{Z}$, tenemos

$$\begin{array}{ll} \text{si } bc-ad \in \mathbf{N} & \rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \\ \text{si } ad-bc \in \mathbf{N} & \rightarrow \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}. \end{array}$$

Propiedades del orden racional

- 1) Compatibilidad con la suma: Dados $r, s, t \in \mathbf{Q}$, si $r \leq s$, entonces $r+t \leq s+t$.
- 2) Compatibilidad con el producto positivo: Dados $r, s \in \mathbf{Q}$, $t \geq 0$, si $r \leq s$, entonces $rt \leq st$.
- 3) No acotación: Los conjuntos $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Z}$ no están acotados ni superior ni inferiormente. $\mathbf{N}$ está acotado inferiormente (tiene mínimo, de hecho), pero no lo está superiormente.
- 4) Propiedad arquimediana: Dados $r, s \in \mathbf{Q}$, $s > 0$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $ns > r$.
- 5) $\mathbf{Q}$ no es orden-completo.

$\equiv$

- 1) $(s+t) - (r+t) = s-r \geq 0$, ya que $r \leq s$. Por lo tanto, $r+t \leq s+t$.
- 2) $st - rt = (s-r)t \geq 0$, pues $s-r \geq 0$ y $t \geq 0$. Luego, $rt \leq st$.
- 3) De la definición de $\mathbf{N}$ (axiomas de Peano) se desprende que no está acotado superiormente. Consecuentemente, $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup (-\mathbf{N})$ tampoco lo está inferiormente. Como $\mathbf{Q}$ contiene a $\mathbf{Z}$, está claro que no está acotado por ningún lado.
- 4) Razonando por reducción al absurdo, supongamos que: $\forall n \in \mathbf{N}$, $sn \leq r$. Entonces se tendría que, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \leq \frac{r}{s}$, es decir, $\mathbf{N}$ estaría acotado superiormente, lo que contradice la propiedad anterior.
- 5) Hay que encontrar un subconjunto de $\mathbf{Q}$ que esté acotado superiormente pero no admita supremo en $\mathbf{Q}$. Consideremos el conjunto

$$A := \{ r \in \mathbf{Q}_+ : r^2 \leq 2 \}.$$

Claramente A está acotado superiormente, por ejemplo 1,5, ó 2, son cotas superiores de A en $\mathbf{Q}$. Sin embargo, veamos que A no tiene supremo en $\mathbf{Q}$. De nuevo, razonando por refutación, supongamos que existe $r = \sup(A) \in \mathbf{Q}$. Veamos primero que $r^2 = 2$. De no ser así, tenemos dos posibilidades.

Una. $r^2 > 2$. Entonces, de la propiedad arquimediana (P.A.) y ya que $r > 0$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $(r^2 - 2)n > 2r$ y $nr > 1$. Así

$$(r^2 - 2)n > 2r \geq 2r - \frac{1}{n} \rightarrow r^2 - 2 - 2\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2} > 0 \rightarrow (r - \frac{1}{n})^2 > 2.$$

Pero, dado $a \in A$

$$\left. \begin{array}{l} a \geq 0 \\ r - \frac{1}{n} > 0 \\ a^2 \leq 2 < (r - \frac{1}{n})^2 \end{array} \right\} \rightarrow a < r - \frac{1}{n}.$$

Ello implica que $r - \frac{1}{n}$ es una cota superior de A que, al ser menor que r contradice el que r sea el supremo de A .

Dos. $r^2 < 2$. En este caso, de nuevo haciendo uso de la P.A., existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $(2 - r^2)n > 2r + 1$. Ahora bien

$$(2 - r^2)n > 2r + 1 \geq 2r + \frac{1}{n} \rightarrow 2 > r^2 + 2\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2} = (r + \frac{1}{n})^2 \rightarrow r + \frac{1}{n} \in A,$$

lo cual contradice que r sea cota superior de A .

Tenemos por tanto que $r^2 = 2$ y estamos suponiendo que $r \in \mathbf{Q}$. Veamos que esto es imposible, lo que concluye la demostración de que el conjunto A no admite supremo en $\mathbf{Q}$. Como $r \in \mathbf{Q}$, podemos escribirlo de la forma siguiente

$$r = \frac{p}{q},$$

donde suponemos que p, q son dos números naturales primos entre sí (no poseen divisores comunes distintos del 1). Elevando al cuadrado

$$2 = \frac{p^2}{q^2}; \quad 2q^2 = p^2.$$

Entonces, 2 es un divisor de p . Sea pues $p = 2n$, siendo n un número natural. Volviendo a la igualdad anterior,

$$2q^2 = (2n)^2 = 4n^2; \quad q^2 = 2n^2.$$

De lo que tenemos que 2 es un divisor de q . Por tanto, hemos obtenido que 2 es divisor común de p y de q , lo que supone un absurdo con la hipótesis inicial de que p, q son primos entre sí. ♣

Ex. 3 Hallar la fracción generatriz del decimal $1,234343434\dots = 1,2\overline{34}$.

≡

Sea $x = 1,2343434\dots$. Multiplicamos por 10 para pasar el punto decimal al 2:

$$10x = 12,343434\dots$$

Multiplicamos ahora por 100 para pasar el decimal al 1234.343434....:

$$1000x = 1234,343434\dots$$

Finalmente, restamos las dos últimas expresiones, aprovechando que tienen la misma parte decimal, y simplificando todo lo que se pueda (una siempre excelente costumbre)

$$990x = 1222; \quad x = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}.$$

Se puede comprobar (comprobar siempre es bueno!) la veracidad de lo hecho haciendo la división $\frac{611}{495}$. ♣

Nota 1 Aunque aún no hemos definido los números reales, el ejercicio anterior nos recuerda que una forma fácil y cómoda de ver los números reales es la siguiente. Partiendo de que todo número real x admite un desarrollo decimal, es decir, una parte entera y una parte decimal, se tiene

$$\text{Si } x \left\{ \begin{array}{l} \text{tiene una parte decimal finita} \\ \text{tiene una parte decimal infinita periódica (pura o mixta)} \end{array} \right\} \rightarrow x \text{ es racional}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tiene una parte decimal infinita no - periódica} \end{array} \right\} \rightarrow x \text{ es irracional}$$

1.1.4. El cuerpo ordenado arquimediano y completo de los números reales

Construcción del cuerpo de los números reales por el Método de las Cortaduras
(Richard Dedekind)

Suponemos, como así es, conocida la estructura de cuerpo ordenado de $\mathbf{Q}$. Llamamos cortadura a todo par (A, B) , donde A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbf{Q}$ que cumplen dos condiciones:

- 1) $A \cup B = \mathbf{Q}$.
- 2) $\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq b$.

Es fácil observar que la segunda condición nos dice que $A \cap B$ o bien es vacía o se reduce a un elemento, ya que

$$x, y \in A \cap B \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A, y \in B \rightarrow x \leq y \\ y \in A, x \in B \rightarrow y \leq x \end{array} \right\} \rightarrow x = y.$$

Definimos el conjunto $\mathbf{R} := \{ (A, B) : (A, B) \text{ es una cortadura} \}$. Por comodidad, a los elementos de $\mathbf{R}$, que llamamos números reales, los representamos con letras griegas. Así, dado $\alpha \in \mathbf{R}$, si $\alpha = (A, B)$, escribimos

$$\alpha_{\leq} := A$$

$$\alpha_{\geq} := B.$$

A continuación introducimos una relación de orden en $\mathbf{R}$, como no, basada en la de $\mathbf{Q}$:
 Dados $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_{\leq} \subseteq \beta_{\leq}.$$

Veamos que se trata en efecto de un orden:

Reflexiva: $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, es obvio que $\alpha_{\leq} \subseteq \alpha_{\leq}$, luego $\alpha \leq \alpha$.

Antisimétrica: Si $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ son tales que $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha_{\leq} \subseteq \beta_{\leq} \\ \beta \leq \alpha \rightarrow \beta_{\leq} \subseteq \alpha_{\leq} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_{\leq} = \beta_{\leq} \rightarrow \alpha_{\geq} = \beta_{\geq} \rightarrow \alpha = \beta.$$

Transitiva: Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ son tales que $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha_{\leq} \subseteq \beta_{\leq} \\ \beta \leq \gamma \rightarrow \beta_{\leq} \subseteq \gamma_{\leq} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_{\leq} = \gamma_{\leq} \rightarrow \alpha \leq \gamma.$$

Vamos a ir repasando las propiedades que nos interesan del conjunto ordenado $(\mathbf{R}, \leq)$.

$(\mathbf{R}, \leq)$ contiene a $(\mathbf{Q}, \leq)$

En realidad, lo que vemos (lo cual es frecuente en identificaciones matemáticas) es que podemos definir una aplicación inyectiva de $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$ que conserva el orden. Así, definimos

$$f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$r \rightarrow f(r) := (A, B) \text{ tal que } \begin{cases} A = \{s \in \mathbf{Q} : s \leq r\} & (= f(r)_{\leq}) \\ B = \{s \in \mathbf{Q} : s \geq r\} & (= f(r)_{\geq}) \end{cases}$$

Es inmediato ver que f está bien definida, ya que el par (A, B) definido es una cortadura como bien se puede comprobar. Veamos que f conserva el orden, o sea, si $r, s \in \mathbf{Q}$ cumplen que $r \leq s$, veamos que $f(r) \leq f(s)$:

$$f(r)_{\leq} = \{t \in \mathbf{Q} : t \leq r\} \subseteq \{t \in \mathbf{Q} : t \leq s\} = f(s)_{\leq} \rightarrow f(r) \leq f(s).$$

Ahora, veamos que f es inyectiva: Si $r, s \in \mathbf{Q}$ son tales que $f(r) = f(s)$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} r \in f(r)_{\leq} = f(s)_{\leq} \rightarrow r \leq s \\ s \in f(s)_{\leq} = f(r)_{\leq} \rightarrow s \leq r \end{array} \right\} \rightarrow r = s.$$

$(\mathbf{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado

Dados $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, supongamos que $\alpha \not\leq \beta$. Entonces, por definición del orden real, $\alpha_{\leq} \not\subseteq \beta_{\leq}$, de lo que

$$\exists r \in \alpha_{\leq} \setminus \beta_{\leq} \rightarrow r \in \alpha_{\leq} \cap \beta_{\geq} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall s \in \beta_{\leq}, \quad s \leq r \\ r \in \alpha_{\leq} \end{array} \right\} \rightarrow s \in \alpha_{\leq} \rightarrow \beta \leq \alpha.$$

Operaciones en $\mathbf{R}$ Suma: Dados $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, definimos

$$\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_{\leq} = \alpha_{\leq} + \beta_{\leq} \\ \gamma_{\geq} = \alpha_{\geq} + \beta_{\geq}. \end{cases}$$

Recordemos que una suma de conjuntos numéricos es el conjunto que se obtiene al sumar cada elemento de un conjunto con cada elemento del otro. Así, verificamos las cinco propiedades de grupo abeliano de $(\mathbf{R}, +)$.

1) Estable: Dados $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, como $\alpha_{\leq} \cup \alpha_{\geq} = \mathbf{Q} = \beta_{\leq} \cup \beta_{\geq}$, se tiene que $(\alpha_{\leq} + \beta_{\leq}) \cup (\alpha_{\geq} + \beta_{\geq}) = \mathbf{Q}$. Además

$$\left. \begin{array}{l} \forall r \in \alpha_{\leq} + \beta_{\leq} \rightarrow \exists a \in \alpha_{\leq}, \exists b \in \beta_{\leq} / r = a + b \\ \forall s \in \alpha_{\geq} + \beta_{\geq} \rightarrow \exists c \in \alpha_{\geq}, \exists d \in \beta_{\geq} / s = c + d \end{array} \right\} \rightarrow r = a + b \leq c + d = s.$$

Así pues, $\alpha + \beta \in \mathbf{R}$.

2) Asociativa: Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, basándonos en la asociatividad de la suma de conjuntos numéricos, a su vez basada en la asociatividad de la suma racional, se tiene que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= (\alpha_{\leq} + \beta_{\leq}, \alpha_{\geq} + \beta_{\geq}) + \gamma = ((\alpha_{\leq} + \beta_{\leq}) + \gamma_{\leq}, (\alpha_{\geq} + \beta_{\geq}) + \gamma_{\geq}) = \\ &= (\alpha_{\leq} + (\beta_{\leq} + \gamma_{\leq}), \alpha_{\geq} + (\beta_{\geq} + \gamma_{\geq})) = \alpha + (\beta_{\leq} + \gamma_{\leq}, \beta_{\geq} + \gamma_{\geq}) = \alpha + (\beta + \gamma). \end{aligned}$$

3) Neutro: Es el $0 \in \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

4) Simétricos: Si $\alpha \in \mathbf{R}$, definiendo $-\alpha := (-\alpha_{\geq}, -\alpha_{\leq})$ se obtiene otra cortadura, i.e., $-\alpha \in \mathbf{R}$. Además

$$\alpha + (-\alpha) = (\alpha_{\leq}, \alpha_{\geq}) + (-\alpha_{\geq}, -\alpha_{\leq}) = (\alpha_{\leq} + (-\alpha_{\geq}), \alpha_{\geq} + (-\alpha_{\leq})) = 0,$$

ya que

$$\begin{aligned} \forall a \in \alpha_{\leq}, \forall b \in -\alpha_{\geq} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \leq \alpha \\ b \leq -\alpha \end{array} \right\} \rightarrow a + b \leq 0 \\ \forall a \in \alpha_{\geq}, \forall b \in -\alpha_{\leq} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \geq \alpha \\ b \geq -\alpha \end{array} \right\} \rightarrow a + b \geq 0. \end{aligned}$$

5) Conmutativa: Dados $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, se ve similarmente a lo hecho para la propiedad asociativa que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Producto: Sea $\mathbf{R}_+ := \{\alpha \in \mathbf{R} : \alpha \geq 0\}$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$, definimos

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha_{\leq} \cdot \beta_{\leq}, \alpha_{\geq} \cdot \beta_{\geq}).$$

Es fácil ver que $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{R}$. Recordando la regla de los signos, extendemos la definición del producto real

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (\alpha_{\leq} \cdot \beta_{\leq}, \alpha_{\geq} \cdot \beta_{\geq}), & \text{si } \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+, \\ -(\alpha \cdot (-\beta)), & \text{si } \alpha, -\beta \in \mathbf{R}_+, \\ -((- \alpha) \cdot \beta), & \text{si } -\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+, \\ (-\alpha) \cdot (-\beta), & \text{si } -\alpha, -\beta \in \mathbf{R}_+. \end{cases}$$

No vamos a demostrar la primera de las afirmaciones siguientes (puede ser un buen ejercicio para el lector interesado).

$(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ tiene estructura de cuerpo ordenado

$\mathbf{R}$ tiene la propiedad arquimediana: Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. De la definición del orden real, $\alpha > 0$ garantiza la existencia de $a \in \alpha_{\leq}$ tal que $a > 0$. Si $b \in \beta_{\geq}$, aplicando la P.A. de $\mathbf{Q}$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $na \geq b$. Así

$$n\alpha \geq na \geq b \geq \beta.$$

$\mathbf{R}$ es orden-completo: Conviene observar que éste es el principal motivo por el que, según creo, Dedekind optó por esta construcción de $\mathbf{R}$. Supongamos que A es un subconjunto no vacío de $\mathbf{R}$ que está acotado superiormente. Entonces existe $\beta \in \mathbf{R}$ tal que $\forall \alpha \in A$, $\alpha \leq \beta$. Definimos

$$M := \bigcup_{\alpha \in A} \alpha_{\leq}; \quad N := \bigcap_{\alpha \in A} \alpha_{\geq}.$$

Veamos que (M, N) es una cortadura. $M \neq \emptyset$ claramente. Como $\forall \alpha \in A$, $\alpha \leq \beta$, se tiene que $N \neq \emptyset$. Además

$$\mathbf{Q} = \bigcap_{\alpha \in A} (\alpha_{\leq} \cup \alpha_{\geq}) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} (M \cup \alpha_{\geq}) = M \cup \left(\bigcap_{\alpha \in A} \alpha_{\geq} \right) = M \cup N.$$

Finalmente

$$\left. \begin{array}{l} \forall a \in M, \exists \alpha \in A / a \in \alpha_{\leq} \\ \forall b \in N, b \in \alpha_{\geq} \end{array} \right\} \rightarrow a \leq b.$$

Para acabar la demostración, sólo hace falta ver que, llamando $\gamma := (M, N) \in \mathbf{R}$, γ es el supremo de A . Así, como $\forall \alpha \in A$, $\alpha_{\leq} \subseteq M = \gamma_{\leq}$, queda claro que γ es cota superior de A . Para ver que es la menor de ellas, sea $\delta \in \mathbf{R}$ una cota superior arbitraria de A . Entonces

$$\forall \alpha \in A, \alpha \leq \delta \rightarrow \forall \alpha \in A, \alpha_{\leq} \subseteq \delta_{\leq} \rightarrow \gamma_{\leq} = M \subseteq \delta_{\leq} \rightarrow \gamma \leq \delta.$$

Seguidamente introducimos unos conceptos que nos servirán para obtener más propiedades importantes de $\mathbf{R}$.

Intervalos reales

1) Intervalos acotados. Se subdividen en

(1.1) Abiertos: Dados dos números reales $a \leq b$, se define el *intervalo abierto de extremos a, b* como el conjunto siguiente

$$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}.$$

Es decir, se trata del conjunto que contiene a todos los números reales estrictamente comprendidos entre a y b .

(1.2) Cerrados: Dados dos números reales $a \leq b$, se define el *intervalo cerrado de extremos a, b* como el conjunto siguiente

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Es decir, se trata del conjunto que contiene a todos los números reales comprendidos entre a y b , inclusive los extremos a y b .

(1.3) Semiabiertos, o Semicerrados: Dados dos números reales $a \leq b$, se define el intervalo semiabierto (o también se puede llamar "semicerrado") de extremos a, b como alguno de los siguientes conjuntos

$$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}; \quad [a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}.$$

Es decir, se trata del conjunto que contiene a todos los números reales estrictamente mayores que a y menores o iguales a b , o al revés, es decir, los mayores o iguales que a y estrictamente menores que b .

2) Intervalos no-acotados. Los cuales se subdividen en

(2.1) No-acotados superiormente: Para designarlos necesitamos introducir, por vez primera, un nuevo símbolo, se trata de $+\infty$: Importante!!... $+\infty \notin \mathbf{R}$, es decir, no es un número, $+\infty$ es meramente un indicador de que cierta magnitud puede ser "tan grande como se quiera" (conviene advertir que hay muchos textos, y profesionales, que usan ∞ como sinónimo de $+\infty$, en nuestro caso, para mayor claridad, escribimos siempre $+\infty$). Así, dado un número real a , se define el intervalo abierto, respectivamente cerrado, no-acotado de extremo inferior a como los conjuntos respectivos siguientes

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : x > a\}; \quad [a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}.$$

Es decir, se trata del conjunto que contiene a todos los números reales estrictamente mayores, respectivamente mayores o iguales, que a . Notar como la parte correspondiente al extremo $+\infty$ siempre es intervalo abierto, ya que, insistimos, $+\infty$ no es número alguno. También conviene observar que, como $\forall x \in \mathbf{R}, +\infty > x$, $+\infty$ siempre va situado como extremo superior del intervalo.

(2.2) No-acotados inferiormente: Ahora necesitamos introducir otro símbolo, se trata de $-\infty$: De nuevo...importante!!... $-\infty \notin \mathbf{R}$, es decir, no es un número, $-\infty$ es un indicador de que cierta magnitud puede ser "tan grande negativamente como se quiera". Así, dado un número real b , se define el intervalo abierto, respectivamente cerrado, no-acotado de extremo superior b como los conjuntos respectivos siguientes

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R} : x < b\}; \quad]-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}.$$

Es decir, se trata del conjunto que contiene a todos los números reales estrictamente menores, respectivamente menores o iguales, que b . Notar como la parte correspondiente al extremo $-\infty$ siempre es intervalo abierto, ya que $-\infty$ tampoco es número alguno. Observar que, como $\forall x \in \mathbf{R}, -\infty < x$, $-\infty$ siempre va situado como extremo inferior del intervalo.

(2.3) No-acotados ni inferior, ni superiormente: Se trata de un sólo intervalo

$$]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}.$$

Propiedad de los intervalos encajados: Esta propiedad afirma que, si

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

es una sucesión de intervalos cerrados, cada uno conteniendo al posterior (encajados), entonces

a) Su intersección no es vacía.

b) Si además dichos intervalos cumplen que sus diámetros tienden a cero, i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\exists j_0$ tal que $\forall j \geq j_0$, $b_j - a_j < \varepsilon$, entonces la intersección de todos los intervalos se reduce a un punto.

≡

a) Llamando $A := \{a_j : j \geq 1\}$ y $B := \{b_j : j \geq 1\}$, es evidente que A está acotado superiormente y B lo está inferiormente. Por tanto, del principio del supremo (y el del ínfimo, que es una consecuencia inmediata), existen $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tales que $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \inf(B)$. Como, $\forall j, h \geq 1$, $a_j \leq b_h$, se tiene que $\alpha \leq \beta$. Todo se reduce a demostrar que $[\alpha, \beta] \subseteq \cap_{j \geq 1} [a_j, b_j]$. En efecto

$$\forall j \geq 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq a_j \\ \beta \leq b_j \end{array} \right\} \rightarrow [\alpha, \beta] \subseteq [a_j, b_j].$$

b) Del apartado anterior sabemos que $\cap_{j \geq 1} [a_j, b_j] \neq \emptyset$. Así, supongamos que existen dos números reales distintos $\alpha < \beta$ dentro de la intersección anterior. Tomando $\varepsilon := \beta - \alpha > 0$ y aplicando la hipótesis adicional el este apartado, existe j_0 tal que $\forall j \geq j_0$, $b_j - a_j < \varepsilon$. Entonces, si $j \geq j_0$,

$$b_j - a_j < \varepsilon = \beta - \alpha,$$

lo que contradice que $[\alpha, \beta] \subseteq [a_j, b_j]$. ♣

Densidad de $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$: Esta propiedad quiere decir que entre dos números reales distintos siempre hay algún número racional.

≡

Sean $\alpha < \beta$ dos números reales. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha_{\leq} \subseteq \beta_{\leq} \\ \alpha \neq \beta \rightarrow \alpha_{\leq} \neq \beta_{\leq} \end{array} \right\} \rightarrow \exists r \in \beta_{\leq} \cap \alpha_{\geq} \rightarrow \alpha \leq r \leq \beta.$$

Como $r \in \mathbf{Q}$, hemos terminado. ♣

Ya vimos en la sección correspondiente a los números racionales que existen números reales que no son racionales. Se trata de la cortadura $\sqrt{2} = (A, B)$, donde $A = \{r \in \mathbf{Q} : r^2 \leq 2\}$, $B = \{r \in \mathbf{Q} : r^2 \geq 2\}$. Allí vimos que A no admite supremo en $\mathbf{Q}$, lo que equivale a decir que $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. A los números reales que no son racionales se les llama irracionales. De hecho, conviene observar que los números irracionales se corresponden con las cortaduras $(A, B) \in \mathbf{R}$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Hemos demostrado la existencia de uno de dichos números irracionales, ahora vamos a ver que, de alguna forma, hay "más" irracionales que racionales, pero para verlo necesitamos hablar de cardinalidad infinita y de conjuntos numerables.

Conjuntos equipotentes: Dos conjuntos A y B son *equipotentes* siempre que se pueda definir una función biyectiva entre ambos. Cuando A y B son equipotentes se escribe $A \approx B$.

Consideremos la "clase" formada por todos los conjuntos bien definidos. Conviene hacer notar que el concepto de clase se introduce en Lógica Matemática para no incurrir en posibles paradojas (situaciones absurdas, o contradictorias), como la famosa Paradoja de Bertrand-Russell de los *conjuntos regulares*: Un conjunto A se llama *regular* siempre que $A \notin A$. Supongamos que existe el conjunto de todos los conjuntos regulares y llamémosle R . Como en Lógica Matemática se trabaja en estados de validez binarios (es decir, toda afirmación o es Verdadera, o es Falsa), está claro que o R es regular, o R no es regular. Luego podemos distinguir dos casos posibles y he aquí cómo obtenemos una situación paradójica

Caso 1: R es regular. Entonces, de la definición de R , $R \in R$, pero ello significa que R no es regular. Luego este caso no se puede dar ya que es absurdo.

Caso 2: R no es regular. Entonces $R \notin R$, pero ello significa, de la definición de conjunto regular, que R es regular. Luego este caso también es absurdo y no se puede dar.

Por lo tanto, si ambas posibilidades son imposibles, cual es la conclusión?. La conclusión es que nuestra suposición de partida no es correcta, es decir, no existe un conjunto formado por todos los conjuntos regulares. A la agrupación de "todos los conjuntos regulares" se le denomina *clase de los conjuntos regulares* y no es comparable lógicamente con los conjuntos, pertenece a otro nivel.

Una vez explicado, aunque un tanto divulgativamente, el lío éste de las clases, representamos mediante $\mathcal{C}$ a la clase de todos los conjuntos bien definidos. En $\mathcal{C}$ consideramos la relación binaria $A \approx B$. Veamos que $\approx$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$:

Reflexiva: $\forall A \in \mathcal{C}$, $A \approx A$, ya que Id_A es una biyección de A en sí mismo.

Simétrica: Si $A \approx B$, sea $f : A \rightarrow B$ una biyección. Sabemos que $f^{-1} : B \rightarrow A$ también es biyectiva. Por tanto, $B \approx A$.

Transitiva: Si $A \approx B$ y $B \approx C$, sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ biyecciones. Sabemos que $g \circ f$ es también una biyección de A en C . Por tanto, $A \approx C$.

Cardinal de un conjunto arbitrario: Como $\approx$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$, podemos hablar de su *clase cociente* $\mathcal{C}/\approx$, es decir, la formada por las clases de equivalencia, si $A \in \mathcal{C}$,

$$[A] = \{B \in \mathcal{C} : B \approx A\}.$$

Por definición, se llama *cardinal de A* a la clase a la que pertenece A , es decir, $\text{card}(A) = [A]$. O sea que el cardinal de un conjunto cualquiera A (finito, o no) es la colección de todos los conjuntos que son equipotentes con A . Respecto de la Teoría de Cardinales, sólo diremos que es de suma utilidad en el pensamiento matemático y que ha servido para resolver problemas y hacer comprender afirmaciones, aparentemente imposibles, como que "la recta y el plano tienen el mismo cardinal".

Algunos cardinales usuales: Los cardinales finitos se suelen definir así:

$$0 = \text{card}(\emptyset).$$

$$1 = \text{card}(\{\emptyset\}).$$

$$2 = \text{card}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}).$$

$$3 = \text{card}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}).$$

etc.

Los cardinales infinitos más frecuentes son:

$$\aleph_0 = \text{card}(\mathbf{N}).$$

$$c = \text{card}(\mathbf{R}) \quad (\text{al cardinal } c \text{ se le llama } \textit{cardinal del continuo}).$$

Conjunto infinito: Un conjunto A es *infinito* siempre que admite algún subconjunto propio (ni el $\emptyset$, ni A) que es equipotente a él mismo. Es decir

$$A \text{ es infinito} \Leftrightarrow \exists B \subset A, \emptyset \neq B \neq A / B \approx A.$$

Propiedades interesantes.

a) $\mathbf{N}$ es infinito.

b) $\mathbf{Z} \approx \mathbf{N}$.

c) Si A es un conjunto cualquiera, entonces el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ nunca es equipotente a A , i.e., $\mathcal{P}(A) \not\approx A$.

$\equiv$

a) Para ver que $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ es un conjunto infinito, consideremos el subconjunto de los números pares $2\mathbf{N}$, que claramente es un subconjunto propio, y veamos que $2\mathbf{N} \approx \mathbf{N}$. Para ello definimos la función $f : \mathbf{N} \rightarrow 2\mathbf{N}$ tal que, si $x \in \mathbf{N}$, $f(x) = 2x$. Es inmediato que f está bien definida como función. Veamos que f es biyectiva:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in \mathbf{N} / f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2; \\ \forall y \in 2\mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{N} / y = 2x &\Rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

b) Para ver que $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{N}$ son equipotentes, todo consiste en poder definir una función biyectiva entre ellos. Así, definimos $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ como sigue, dado $x \in \mathbf{N}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & \text{si } x \text{ es par,} \\ -\frac{x+1}{2}, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

Es evidente que f está bien definida. Veamos que es inyectiva: Sean $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, podemos distinguir tres casos

Uno. x_1 y x_2 son pares. Entonces

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 - 2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Dos. x_1 y x_2 son impares. Entonces

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -\frac{x_1 + 1}{2} = -\frac{x_2 + 1}{2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Tres. x_1 es par y x_2 es impar. Entonces

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{2} = -\frac{x_2 + 1}{2} \Rightarrow x_1 = -x_2 + 1 \Rightarrow -x_2 + 1 \geq 1 \Rightarrow x_2 \leq 0 \text{ (Absurdo)}$$

Luego, sólo pueden darse los casos Uno y Dos en los que $x_1 = x_2$.

Finalmente, veamos que f es sobre: Sea y un elemento arbitrario del conjunto $\mathbf{Z}$. Distinguiamos dos casos

Uno. $y \geq 0$. Entonces, si nos planteamos la ecuación $y = \frac{x-2}{2}$, obtenemos que $x = 2(y+1)$. Como $y \geq 0$, se tiene que $x = 2(y+1) \in \mathbf{N}$, siendo x par. Por tanto, $f(x) = f(2(y+1)) = \frac{2(y+1)-2}{2} = y$. Es decir, la antiimagen de y por f es $2(y+1)$.

Dos. $y < 0$. Entonces, si nos planteamos la ecuación $y = -\frac{x+1}{2}$, obtenemos que $x = -2y-1$. Como $y \leq -1$, se tiene que $x = -2y-1 \in \mathbf{N}$, siendo x impar. Por tanto, $f(x) = f(-2y-1) = -\frac{-2y-1+1}{2} = y$. Es decir, la antiimagen de y por f es $-2y-1$.

c) Para demostrar que $A \not\approx \mathcal{P}(A)$, todo se reduce a ver que no existe ninguna función $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ que sea suprayectiva: Supongamos que f es suprayectiva. Entonces, sea $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Como $B \in \mathcal{P}(A)$, existe un elemento $b \in A$ tal que $f(b) = B$. Al estar b en A , podemos considerar dos alternativas

Una. $b \in B$. Entonces, $b \notin f(b)$. Absurdo, pues $f(b) = B$.

Dos. $b \notin B$. Ahora, de la definición del conjunto B , $b \in f(b)$. Absurdo, pues $f(b) = B$.

Cualquiera de las dos alternativas conduce a una contradicción. Por tanto, nuestra suposición de que f fuese suprayectiva es Falsa, es decir, f no es suprayectiva. ♣

Conjuntos numerables: Un conjunto A se dice que es *numerable*, o *contable*, siempre que sea finito (es decir, no sea infinito, i.e., no existe ningún subconjunto propio equipotente con él) o sea equipotente con el conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$. Resumiendo

$$A \text{ es numerable} \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ es finito, } \text{ó,} \\ \text{card}(A) = \aleph_0. \end{cases}$$

Las propiedades que siguen las afirmamos sin más.

Propiedades de los conjuntos numerables

- 1) Cualquier subconjunto de uno numerable es numerable.
- 2) Si A y B son numerables, también lo es el producto cartesiano $A \times B$.
- 3) Cualquier unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Explícitamente, si I es un conjunto numerable y tenemos una "familia" $\{A_i : i \in I\}$ donde cada conjunto A_i es numerable, entonces el conjunto unión de dicha familia

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I / x \in A_i\} \text{ es numerable.}$$

- 4) Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Podemos afirmar:

- (4.1) Si A es numerable y f es suprayectiva, entonces B es numerable.
- (4.2) Si B es numerable y f es inyectiva, entonces A es numerable.
- (4.3) Si f es biyectiva, entonces A es numerable si y sólo si lo es B .

Ejemplos de conjuntos infinitos usuales

- 1) $\mathbf{N}$ es claramente numerable.
- 2) $\mathbf{Z}$ es numerable, ya que, del ejercicio anterior $\mathbf{Z} \approx \mathbf{N}$.

3) **Q** es numerable: Puede demostrarse que **Q** es equipotente a una parte de $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$, aplicando las propiedades anteriores se deduce que **Q** es numerable.

4) **R** no es numerable: Hacemos la demostración de esta propiedad ilustrando de nuevo la potencia de la construcción de **R** por cortaduras. Notar que, si X es un conjunto cualquiera, por 2^X representamos la familia de sus partes, i.e., la familia de todos los subconjuntos de X .

≡

Consideremos la subfamilia de $2^{\mathbf{Q}}$ dada por

$$\mathcal{I} := \{I \in 2^{\mathbf{Q}} : I \text{ es un intervalo racional acotado sup. pero no inf.}\}.$$

Se puede ver que $\mathcal{I}$ es equipotente a $2^{\mathbf{Q}}$, por lo que $\text{card}(\mathcal{I}) = \text{card}(2^{\mathbf{Q}}) > \text{card}(\mathbf{Q})$, lo que nos dice que $\mathcal{I}$ no es numerable. Así, todo se reduce a ver que **R** es equipotente a $\mathcal{I}$. Para ello definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{I} \\ \alpha &\rightarrow f(\alpha) := \alpha_{\leq}. \end{aligned}$$

f está bien definida, ya que, si $\alpha \in \mathbf{R}$, entonces $\alpha_{\leq}$ está acotado superiormente por α y es un intervalo de números racionales. Veamos que es inyectiva: Si $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ son tales que $f(\alpha) = f(\beta)$, entonces

$$\alpha_{\leq} = f(\alpha) = f(\beta) = \beta_{\leq} \rightarrow \alpha = \beta.$$

Además, si $I \in \mathcal{I}$, al estar acotado superiormente, sea $\alpha := \sup(I) \in \mathbf{R}$. Entonces

$$f(\alpha) = \alpha_{\leq} = I,$$

lo que prueba que f también es sobre. ♣

Hipótesis del Continuo: Como acabamos de ver antes, existe una función biyectiva de **R** en el conjunto potencia de **Q**, $2^{\mathbf{Q}}$, por lo que $c = \text{card}(\mathbf{R}) = \text{card}(2^{\mathbf{Q}}) = 2^{\aleph_0}$. Se representa por $\aleph_1$ al primer cardinal no numerable, o sea, el menor cardinal de un conjunto no numerable. Entonces, como **R** no es numerable, $\aleph_1 \leq c$. La *Hipótesis del Continuo* dice que no existen cardinales estrictamente contenidos entre $\aleph_1$ y c , i.e., $\aleph_1 = c$. La Hipótesis del Continuo es "indecidable" dentro de la axiomática de la Teoría de Conjuntos, por lo que se puede trabajar asumiendo que es Verdadera (Matemática Constructivista), o se puede trabajar asumiendo que es Falsa (Matemática No-Constructivista).

Valor absoluto de un número real

Dado un número $x \in \mathbf{R}$, definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\rightarrow |x| := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Propiedades

$$1) \quad |x| \geq 0.$$

- 2) $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0.$
- 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$
- 4) $|x + y| \leq |x| + |y|.$
- 5) $||x| - |y|| \leq |x - y|.$
- 6) $|x \cdot y| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$

≡

Las tres primeras propiedades tienen fácil demostración (jugando con la regla de los signos y tomando casos).

4) Distinguimos dos casos, para $x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, ya que si alguno es 0 la cosa es obvia:

Uno. x e y son del mismo signo. Entonces

$$|x + y| = |x| + |y|.$$

Dos. x e y son de distinto signo. Ahora, suponiendo que $x > 0 > y$ (análogo en caso contrario)

$$|x + y| = \max\{x - |y|, |y| - x\} < |x| + |y|.$$

5) Usando la propiedad 4 (conocida como desigualdad triangular)

$$\left. \begin{aligned} |x| &= |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \\ |y| &= |(y - x) + x| \leq |x - y| + |x| \rightarrow |y| - |x| \leq |x - y| \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow -|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

6) $\forall x, y \in \mathbf{R}$

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot |x| \cdot |y| \rightarrow 2 \cdot |x| \cdot |y| \leq x^2 + y^2. \clubsuit$$

1.2. Números complejos

- 1.- Números complejos. Representación gràfica.
- 2.- Operaciones con números complejos.
- 3.- Trigonometría. Forma polar de un número complejo.
- 4.- Factorización de polinomios.

1.2.1. Números complejos. Representación gràfica

Introducimos seguidamente un conjunto numérico nuevo. Se trata de

$$\mathbf{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbf{R}\},$$

que recibe el nombre de *conjunto de los números complejos*. Explícitamente, $\mathbf{C}$ està formado por todas las expresiones binòmicas de la forma

$$z = a + b i ,$$

donde la letra z es la que frecuentemente se utiliza para representar un número complejo; a es un número real al que se llama *parte real de z* y b es otro número real llamado *parte imaginaria de z* . La letra i hace referencia a un número que no es real, ya que cumple que $i^2 = -1$. Explícitamente,

$$a = \operatorname{Re}(z); \quad b = \operatorname{Im}(z); \quad i = \sqrt{-1}.$$

Observar que cualquier número real es un número complejo, se trata de los complejos de parte imaginaria nula. Es decir

$$\mathbf{R} = \{z = a + bi : b = 0\} \subset \mathbf{C}.$$

El plano complejo

Así como para representar el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales se hace mediante una recta, para representar el conjunto $\mathbf{C}$ de los números complejos se utiliza un plano, el *plano complejo*, o *plano de Argand-Gauss*.

Se trata de una plano con dos ejes perpendiculares que no se llaman *eje de abscisas*, ni tampoco *eje de ordenadas*, aquí reciben el nombre de *eje real*, el horizontal, y *eje imaginario*, el vertical. Por tanto, para dibujar el complejo $z = a + bi$, se marca la longitud a en el eje real, se marca b en el eje imaginario y se une el origen con el punto de coordenadas (a, b) , el vector que aparece, con origen $(0, 0)$ y afijo (a, b) , es el complejo z .

1.2.2. Operaciones con números complejos

Suma: Si tenemos dos complejos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, la forma de sumar $z_1 + z_2$ es la natural, es decir

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) i .$$

Propiedades

1) Estable: Está claro que al sumar dos números complejos, conforme hemos definido la suma, el resultado es un número complejo.

2) Asociativa: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, se verifica que $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3) Neutro: Como el número 0 es real, también es complejo y cumple que es *elemento neutro de la suma*, es decir, $\forall z \in \mathbf{C}$, $z + 0 = z$.

4) Simétricos: Para cada $z = a + bi \in \mathbf{C}$, hay un número complejo, llamado *opuesto de z*, que es $-z = -(a + bi) = -a - bi$, que cumple que $z + (-z) = 0$.

5) Conmutativa: $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, se verifica que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

El par $(\mathbf{C}, +)$ recibe el nombre de *grupo abeliano*, o *conmutativo* (lo que tiene su interés para los algebraistas...).

Producto: Si tenemos dos complejos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, la forma de multiplicar $z_1 \cdot z_2$ es también la natural

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) i = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad) i.$$

Propiedades

1) Estable: Está claro que al multiplicar dos números complejos el resultado es un número complejo.

2) Asociativa: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, se verifica que $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

3) Neutro: Como el número 1 es real, también es complejo y cumple que es el *elemento neutro del producto*, es decir, $\forall z \in \mathbf{C}$, $z \cdot 1 = z$.

4) Simétricos: Dado $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, más adelante aprenderemos a calcular $z^{-1} = \frac{1}{z}$, es decir, el complejo *inverso de z*, o *simétrico de z para el producto*.

5) Conmutativa: $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, se verifica que $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

6) Distributiva: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, se verifica que $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

La terna $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ recibe el nombre de *cuerpo conmutativo*.

Conjugado: Si tenemos el complejo $z = a + bi$, se define el *conjugado de z* como el complejo que se obtiene al cambiar de signo la parte imaginaria de z , es decir,

$$\bar{z} = a - bi.$$

Propiedades

1) El conjugado de una suma es la suma de los conjugados. Explícitamente

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

2) El conjugado de un producto es el producto de los conjugados. Explícitamente

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

3) El producto de un complejo por su conjugado da siempre un valor positivo. Explícitamente, si $z = a + bi$,

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

Cociente: Si tenemos dos complejos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_2 \neq 0$, la forma de dividir z_1/z_2 es una típica división de binomios recordando multiplicar arriba y abajo (numerador y denominador) por el conjugado del denominador

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Observar que dividir por $c^2 + d^2$ tiene sentido, ya que $z_2 = c + di \neq 0$ implica que $c \neq 0$, ó, $d \neq 0$, lo que implica que $c^2 + d^2 \neq 0$.

Ex. 4 Calcular

$$\frac{(1 + i)^2(2 - i) - 6}{(1 - i)^3}.$$

≡

$$\begin{aligned} \frac{(1 + i)^2(2 - i) - 6}{(1 - i)^3} &= \frac{(1 + 2i + i^2)(2 - i) - 6}{1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3} = \frac{2i(2 - i) - 6}{1 - 3i + 3i^2 - i^3} \\ &= \frac{2 + 4i - 6}{1 - 3i - 3 + i} = \frac{-4 + 4i}{-2 - 2i} = \frac{2 - 2i}{1 + i} = \frac{(2 - 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-4i}{2} = -2i. \end{aligned}$$

1.2.3. Trigonometría. Forma polar de un número complejo

Razones trigonométricas: Si α es un ángulo del intervalo angular $]0, \pi/2[$, sabemos que podemos construir un triángulo rectángulo que tenga a α como uno de sus ángulos. Supongamos que la hipotenusa es h y los catetos opuesto y adyacente a α son a y b , respectivamente. Entonces, como se sabe,

$$\sin \alpha = \frac{a}{h}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{h}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Circunferencia unidad: Se trata de una circunferencia centrada en el origen de coordenadas con radio 1. Al dibujar un ángulo de cualquier cuadrante en ella se forma un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 tal que la medida vertical corresponde al valor del seno del ángulo y la medida horizontal corresponde al valor del coseno del ángulo. Por tanto, según el cuadrante los signos de las razones ($\sin, \cos, \tan$) son

Primer cuadrante : $(+, +, +)$
 Segundo cuadrante : $(+, -, -)$
 Tercer cuadrante : $(-, -, +)$
 Cuarto cuadrante : $(-, +, -)$