Jean-Louis Féménias

Licence
Master
Écoles d'ingénieurs

Introduction au calcul variationnel en physique

Aperçu historique et applications : mécanique analytique, élasticité

Cours et exercices



2e édition

ellipses

Références sciences

Licence
Master
Écoles d'ingénieurs

Introduction au calcul variationnel en physique

Aperçu historique et applications : mécanique analytique, élasticité

Cours et exercices

2e édition

Jean-Louis Féménias

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-105140
Dépôt légal : octobre 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est issu d'un cours dispensé pendant 25 ans en Licence de Physique (L3) à l'Université de Nice. Il avait pour objet d'initier les étudiants aux méthodes mathématiques en leur apprenant quelques techniques utiles en physique et en les formant au raisonnement analytique. J'ai eu la chance d'enseigner le calcul variationnel en parallèle avec les probabilités (Féménias, 2003), ce qui m'a permis de prendre conscience de l'explosion de la pensée scientifique du milieu du XVIIe siècle, de la naissance quasi simultanée des probabilités et des principes variationnels (en particulier en France avec Pascal et Fermat), et de l'évolution de cette pensée jusqu'à nos jours avec l'interprétation probabiliste de la théorie quantique et sa justification des principes variationnels. Je souhaite que les étudiants qui ont suivi ce cours aient admiré, comme moi, les efforts et les résultats de ces « géomètres », « savants » puis « chercheurs », qui nous ont légué une vision de plus en plus unifiée du monde physique.

Ce cours est ici enrichi de quelques suppléments issus de travaux dirigés ou de sujets d'examen, en particulier sur la définition générale d'une dérivée fonctionnelle, sur le lien entre optique, mécanique classique et mécanique quantique au travers de la notion d'intégrale de Feynman, ou sur les applications des variations à l'élasticité. Toutefois pour rester au niveau moyen d'un L3, je n'aborde pas certains aspects mathématiques modernes comme celui de la structure symplectique de l'espace des phases qui nécessite quelques notions de géométrie différentielle en général peu ou pas assimilées par les futurs physiciens à ce niveau.

Le niveau mathématique initial requis correspond à un ancien DEUG (L2) ou aux deux années de classes préparatoires scientifiques. Il faut savoir dériver, différentier, développer en série et manipuler des intégrales simples : le calcul variationnel a été initié par Leibniz, les frères Bernoulli, Newton, Euler, Lagrange, donc au tout début du calcul différentiel et intégral. Le premier chapitre me semble accessible à un élève de terminale ; si les choses se compliquent un peu par la suite, cela fait partie de la formation au calcul. Toutefois elles ne se compliquent pas d'un chapitre à l'autre mais plutôt à l'intérieur de chacun d'eux. On peut élaborer un cours techniquement simple en ne retenant que le début de chaque chapitre : c'est ainsi qu'a été construit le cours initial. Il ne faut donc pas se décourager devant certaines difficultés de la section 3 du chapitre 2... Il vaut mieux passer au chapitre 3 pour y découvrir les aspects élémentaires de la mécanique analytique.

L'exposé est présenté de la façon suivante :

• *Le Chapitre 1* est une introduction aux notions spécifiques à ce cours ainsi qu'un panorama de l'histoire du calcul variationnel qui se confond avec celle de la Physique depuis presque quatre siècles, ceci pour permettre au lecteur de situer les différentes parties du cours dans la perspective du développement des idées pendant cette période. Dans les chapitres suivants je reviens sur certains aspects historiques en m'inspirant d'une citation de Louis de Broglie, père de la mécanique ondulatoire[1].

• *Le Chapitre 2* présente l'équation d'Euler la plus simple, puis avec variantes, mais toujours à une dimension. Il se termine par la définition d'une dérivée fonctionnelle.

• *Le Chapitre 3* aborde le problème variationnel à plusieurs fonctions. Il est consacré à une application majeure : la mécanique analytique de Lagrange et de Hamilton.

• *Le Chapitre 4* est relatif au formalisme hamiltonien : l'espace des phases et son utilisation en mécanique statistique, l'étude du lien entre symétries et conservations en dynamique, et enfin une transition vers la mécanique quantique *via* l'équation de Hamilton-Jacobi.

• *Le Chapitre 5* étudie les problèmes isopérimétriques et leur application en élasticité et en mécanique, avec pour complément technique la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

• *Le Chapitre 6* aborde le problème variationnel à plusieurs dimensions et certaines de ses applications en physique : une amorce de théorie des champs et son utilisation en élasticité.

---

[1] Dans un de ses ouvrages, Louis de Broglie compare les deux méthodes d'enseignement de la physique : celle qui initie à la physique existant au moment de l'enseignement, dans sa conception figée aux toutes dernières découvertes, et celle qui raconte l'élaboration historique des idées et des théories au cours des siècles jusqu'au temps présent. La première a l'avantage de permettre à l'enseigné d'être immédiatement opérationnel, mais le prive de la connaissance des difficultés d'élaboration d'une science présentée, finalement, comme un dogme à admettre, avec toute l'implacable rigidité de sa logique.
« *Pour l'enseignement courant, la première méthode est peut-être la meilleure parce que la plus rapide : elle mène droit au but et n'exige aucune connaissance érudite du passé. Mais comme la seconde méthode est instructive ! Comme elle montre bien par quels chemins tortueux l'esprit des hommes doit s'avancer pour parvenir à la vérité ! Comme, en ressuscitant des états de connaissance et de conceptions théoriques aujourd'hui dépassées, elle nous fait sentir comment s'est formée notre science d'aujourd'hui et sur quel substratum elle repose ! Croit-on d'ailleurs qu'en employant exclusivement la méthode déductive, on éliminera ainsi ce qu'il y a eu d'accidentel dans la succession chronologique des découvertes et des théories ? On se tromperait grandement en le pensant, car dans notre science actuelle, même exposée sous une forme purement déductive et nullement historique, se retrouve, qu'on le veuille ou non, l'influence de toutes les démarches et les vicissitudes de la pensée scientifique dans le passé.* ».
Nouvelles perspectives en microphysique (Albin Michel, 1958).

Le tableau suivant suggère une répartition des sujets traités dans un cursus allant de la terminale (année 0) au Master (années 4 et 5). Les recouvrements montrent bien qu'il s'agit d'indications moyennes dépendant du niveau demandé et des objectifs désirés. La première colonne, par exemple, montre ce qui peut être raisonnablement abordé dès la terminale (0), en première (1) et en seconde année (2). Une fois les bases mathématiques acquises (en particulier le maniement des intégrales multiples et de l'analyse vectorielle), la seconde colonne donne le cœur du cours enseigné en 3e année. L'ensemble était traité en 8 heures de cours, un certain nombre de points étant abordés pendant 8 heures de Travaux Dirigés ou en contrôles. La troisième colonne concerne les compléments qui peuvent être abordés en Master, en les étoffant éventuellement de l'approche mathématique moderne évoquée plus haut et non traitée ici ; ceci concernerait une formation plus théorique. Les deux dernières colonnes sélectionnent les parties plutôt consacrées soit à la mécanique et l'élasticité, soit à certaines techniques mathématiques.

Tableau d'utilisation

Chapitres	Sections	Bases (Bac+1&2)	Licence (Bac+3)	Master (Bac+4&5)	Mécanique élasticité	Aspects maths.
1- Introduction	1.1	$0-1$	×			
	1.2	$0-1$	×			
	1.3	$0-1$	×			
2- Equation d'Euler	2.1	$1-2$	×			×
	2.2	$1-2$	×			×
	2.3		2.3.1	×		×
	2.4		×	×		×
	2.5			×		×
3- Plusieurs fonctions	3.1	2	×	×		×
	3.2	2	×	×	×	
	3.3	2	×	×	×	
	3.4		×	×	×	×
4- Mécanique	4.1	2	×	×	×	×
	4.2		4.2.1	×	×	×
	4.3		×	×	×	×
	4.4	2		×	×	×
5- Contraintes	5.1	2	×	×		×
	5.2	2	×	×		×
	5.3	2	×	×		×
	5.4	2	×	×		
	5.5			×	×	
6- Champs-Élasticité	6.1		×	×		×
	6.2		×	×		×
	6.3		×	×	×	
	6.4		×	×	×	
	6.5			×	×	×

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe pédagogique de la Licence de Physique de l'Université de Nice (Bac+3 ou, maintenant, L3), dans le cadre du Département de Physique. Nombreux sont les collègues qui m'ont suggéré des thèmes d'application repris dans cet ouvrage. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

Parmi eux je me dois de distinguer le professeur Jean-Pierre Provost, alors directeur du Département, qui a toujours été attentif à mes questions. Je le remercie pour l'exemple qu'il m'a donné par sa disponibilité, son enthousiasme, ses talents d'enseignant et sa remarquable connaissance de la Physique et de son histoire.

Je n'oublierai pas celui qui m'a fait découvrir le calcul variationnel, il y a bien des années de cela, Ismail A. Sakmar, professeur à l'Université de Floride du Sud (USA), lors de son séjour au laboratoire de Physique Théorique de Nice.

Je tiens à remercier mes amis et anciens condisciples des années 1959-1962, Marc Rodriguez et Jean-Louis Gil, ainsi que Martine et Chantal. Sans leurs encouragements, cet ouvrage n'aurait peut-être pas vu le jour.

Enfin je remercie affectueusement Florence, Jean-Baptiste, Véronique, Amandine, Vincent, Bastien, Gabrielle, Lisa et Louis, ainsi que mon épouse Geneviève pour leur soutien et leur patience tout au long de l'élaboration de ce projet.

-

Table des matières

Table des exercices et résumés *ix*

1 Introduction 1

1.1. Stationnarité, optimisation et principes d'extremum 1
1.1.1. Stationnarité 1
1.1.2. Exemples de règles et de principes d'extremum 3
1.1.3. Le paradigme du brachistochrone 6

1.2. Fonctionnelles 7
1.2.1. Un premier exemple de fonctionnelle 8
1.2.2. Euler et Lagrange : naissance du calcul variationnel 9

1.3. Principes variationnels 10
1.3.1. Principes de Fermat, de Maupertuis et mécanique analytique de Lagrange 10
1.3.2. Principe de moindre Action de Hamilton 11
1.3.3. Mécanique ondulatoire et mécanique quantique 12

1.4. Conclusion 14

2 Équation d'Euler-Lagrange 17

2.1. Variation d'une fonctionnelle 17
2.1.1. Le cadre de la démonstration 17
2.1.2. Variation de la fonctionnelle $J[u]$ 18

2.2. Résolution dans le cadre des points extrêmes fixés 19
2.2.1. Équation d'Euler-Lagrange 19
2.2.2. Remarques et cas particuliers 19
2.2.2.1. Erreurs à éviter 19
2.2.2.2. L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle 20
2.2.2.3. Cas où F ne dépend pas de $u(x)$ 21
2.2.2.4. Cas où F ne dépend pas de x 21
2.2.3. Applications 22

2.3. Cas des points extrêmes ou des limites non fixés 28
2.3.1. Résolution dans le cas des points extrêmes non fixés 28
2.3.2. Résolution dans le cas des limites non fixées 31
2.3.2.1. Problème général 31
2.3.2.2. Extrémités assujetties sur des courbes − Conditions de transversalité 33
2.3.2.3. Lignes brisées − Conditions de Weierstrass-Erdmann 35

2.4. Intégrant F contenant des dérivées d'ordre supérieur 37

2.5. Dérivée fonctionnelle 38
2.5.1. Notion 38
2.5.2. Formalisation 38
2.5.3. Applications immédiates 40
2.5.4. Dérivées fonctionnelles d'ordre supérieur 41
2.5.5. Équations différentielles de fonctionnelles 44

3 Variations à plusieurs fonctions 45

3.1. Fonctionnelles de plusieurs fonctions 45

3.2. Mécanique newtonienne 46
3.2.1. Les lois de Newton (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687) 46
3.2.2. Nombre de degrés de liberté − Liaisons holonomes et non holonomes 48
3.2.3. Coordonnées et vitesses généralisées 53

3.3. Mécanique lagrangienne 55
3.3.1. Approche des équations de Lagrange par le principe de d'Alembert 55
3.3.1.1. Le principe des travaux virtuels de d'Alembert en dynamique 55
3.3.1.2. Première approche : les équations de Lagrange 56
3.3.1.3. Seconde approche : le principe de moindre Action de Hamilton 57
3.3.2. Équations de Lagrange − Principe de moindre Action de Hamilton 60
3.3.2.1. Conditions d'application − Lagrangien 61
3.3.2.2. Principe de Hamilton − Équations de mouvement de Lagrange 61
3.3.2.3. Emploi de la méthode lagrangienne ; équivalence avec celle de Newton 62
3.3.3. Premières applications 65
3.3.3.1. Systèmes de coordonnées 65
3.3.3.2. Mécanique du point et du solide 66
3.3.4. Formalisation de la mécanique à partir du principe de Lagrange-Hamilton 76
3.3.5. Thèmes particuliers : similitude mécanique, pseudo-potentiels, conservations 81
3.3.6. Analyse de la méthode lagrangienne 88

3.4. Mécanique hamiltonienne 89
3.4.1. Origine du formalisme hamiltonien 89
3.4.2. Transformation de Legendre 90
3.4.3. Moments conjugués, transformation de Legendre et équations de Hamilton 91
3.4.4. Mode d'emploi de la méthode hamiltonienne − Résolution matricielle 92
3.4.4.1. Oscillateur harmonique 93
3.4.4.2. Résolution matricielle 93
3.4.4.3. Pendule simple 95
3.4.4.4. Pendules couplés 95
3.4.4.5. Pendule sphérique 97
3.4.5. Applications 98
3.4.6. Analyse de la méthode hamiltonienne 131

4 Applications du formalisme hamiltonien 133

4.1. Espace des phases et mécanique statistique 133
4.1.1. Espace des phases − Portrait de phase 133
4.1.2. Exemples de portraits de phase − Propriétés immédiates 133
4.1.3. Hydrodynamique dans l'espace des phases − Théorème de Liouville 138
4.1.3.1. Équation de Liouville ($1^{\text{ère}}$ forme) 140
4.1.3.2. Équation de Liouville ($2^{\text{ème}}$ forme) ou principe de conservation de la densité de Gibbs 141
4.1.3.3. Théorème de Liouville (principe de conservation du volume de Gibbs) 142

4.2. Symétries et conservations 144
4.2.1. Invariances géométriques et conservations dynamiques − Variables cycliques 144
4.2.1.1. Exemples : conservation de moments, de l'énergie mécanique 144
4.2.1.2. Variables cycliques et intégration 148
4.2.2. Transformations canoniques 151
4.2.2.1. Condition pour une constante du mouvement − Crochets de Poisson 151
4.2.2.2. Transformations canoniques, fonctions génératrices 153
4.2.2.3. Transformations canoniques infinitésimales 158
4.2.3. Vérification d'une invariance : Crochets de Poisson 160
4.2.3.1. Invariance des crochets de Poisson dans une transformation canonique 160
4.2.3.2. Propriétés mathématiques des crochets de Poisson. Identité de Jacobi 162
4.2.3.3. Résultats généraux des crochets de Poisson 164
4.2.3.4. Applications des crochets de Poisson 167
4.2.4. Recherche des invariants : Théorème de Nœther 172
4.2.4.1. Théorème de Nœther pour les invariances géométriques 173
4.2.4.2. Théorème de Nœther général 178
4.2.4.3. Une application fondamentale du théorème de Nœther 182
4.2.4.4. Invariants dans le mouvement képlérien − Vecteur de Runge-Lenz, symétries cachées 186

4.3. De Fermat à Feynman : vers la mécanique quantique 200
4.3.1. La fonction Action 200
4.3.2. Principe de moindre Action de Maupertuis − Principe de la *vis viva* (Leibniz) 203
4.3.3. Équation de Hamilton-Jacobi (1836) 213
4.3.4. Mécanique ondulatoire et mécanique quantique 219
4.3.4.1. La mécanique ondulatoire de Louis de Broglie 219
4.3.4.2. Les intégrales de chemin (*path integrals*) de Richard Feynman 221

4.4. Vers la théorie du chaos : Topologie de l'espace des phases 225
4.4.1. Topologie dans l'espace des phases : Poincaré et la mécanique qualitative 226
4.4.2. Ordinateurs, attracteurs, chaos : approche moderne des systèmes dynamiques 229

5 Contraintes. Problèmes isopérimétriques 231

5.1. Problèmes variationnels contraints et problèmes isopérimétriques 231

5.2. Solution du problème isopérimétrique 232
5.2.1. Méthode de résolution 232
5.2.2. Commentaires sur la méthode de résolution 232
5.2.3. Exemples dans le cadre des fonctions usuelles 233
5.2.3.1. Un exemple simple 233
5.2.3.2. Visualisation en dimension 3 234

5.3. Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour les fonctions 235
5.3.1. Fonction de deux variables 235
5.3.2. Fonction de n variables sous une contrainte, sous p contraintes 236

5.4. Exemples de problèmes isopérimétriques 237
5.4.1. Problème de Didon (boucle de corde sur un plan) 237
5.4.2. Chaînette, voilière, lintéaire et courbe élastique 240
5.4.3. Méthode variationnelle de Ritz en mécanique quantique 254
5.4.3.1. Rappels de quelques notions de mécanique quantique 254
5.4.3.2. Formulation du problème de Ritz 255

5.5. Liaisons non holonomes en mécanique 256

6 Variations à plusieurs dimensions. Élasticité 261

6.1. Introduction : Problème à plusieurs variables 261

6.2. Équation d'Euler avec plusieurs variables 262
6.2.1. Intégration par parties à n dimensions 262
6.2.2. Équation d'Euler pour une fonctionnelle d'une fonction à 2 variables 264
6.2.3. Cas général 264

6.3. Applications 270
6.3.1. Méthode variationnelle de Ritz en mécanique quantique 270
6.3.2. Corde vibrante, densité de lagrangien, champs, transition vers l'élasticité 274
6.3.2.1. Énergie cinétique, énergie potentielle 274
6.3.2.2. Lagrangien, densité de lagrangien 275
6.3.2.3. Ouverture vers la relativité et la théorie des champs 276

6.4. Élasticité dans le cas des petites déformations 278
6.4.1. De la corde vibrante à la membrane homogène et isotrope 278
6.4.2. Membranes non isotropes et/ou non homogènes 283
6.4.3. Poutres et plaques 285
6.4.3.1. Statique des tiges et poutres sans forces localisées 288
6.4.3.2. Statique des tiges et poutres avec forces localisées 291
6.4.3.3. Dynamique des tiges et plaques 302

6.5. Élasticité dans le cas des grandes déformations 304
6.5.1. Historique de l'Elastica 304
6.5.2. Courbure et énergie potentielle d'élasticité 307
6.5.3. Tiges élastiques – L'*Elastica* de Bernoulli 308

Conclusion 319

Bibliographie 321

Index 325

Table des exercices et résumés

1 Introduction

1.1 Thermalisation 3
1.2 Régression linéaire 4
1.3 Le chien de Fermat 5

2 Équation d'Euler-Lagrange

Résumé **Problème variationnel à points extrêmes fixés** 20
2.1 Caractère différentiel de l'équation d'Euler 20
2.2 Intégrale première 21
2.3 Identité 21
2.4 Le brachistochrone historique 22
2.5 Principe de Moindre Action selon Euler 26
2.6 Surface de révolution minimum 27
2.7 Brachistochrone à arrivée variable 28
2.8 Surface de révolution engendrée par une ligne brisée (1) 29
Résumé **Problème variationnel à points extrêmes non fixés** 30
Résumé **Problème variationnel aux limites non fixées (cas général)** 34
2.9 Conditions de transversalité si $F(y, y', x) = f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$ 34
2.10 Surface de révolution engendrée par une ligne brisée (2) 35
2.11 Réflexion et réfraction 36
2.12 Intégrants contenant des dérivées d'ordre supérieur à 1 37
2.13 Dérivation d'une fonctionnelle intégrale 40
2.14 Dérivation d'une fonctionnelle non intégrale 40
2.15 Dérivation d'une fonctionnelle fonction d'intégrale 40
2.16 Dérivation d'une fonctionnelle d'intégrant $F\left[u(x), u'(x), x\right]$ 40
2.17 Dérivées $n^{\text{èmes}}$ de fonctionnelles 42
2.18 Dérivée seconde d'une fonctionnelle d'intégrant $F(u, u', x)$ 43
2.19 Fonctionnelles égales à leur dérivée 44
2.20 Équations différentielles de fonctionnelles 44
2.21 Équations différentielles linéaires du second ordre 44

3 Variations à plusieurs fonctions. Mécanique analytique

3.1 Pendule excité 52
3.2 Liaisons dans un mécanisme 52
3.3 Solide 52
3.4 Systèmes moléculaires 53
3.5 Équations de Lagrange générales 59
3.6 Intégrales premières et conservations dynamiques 64
Résumé **Mécanique lagrangienne** 65
3.7 Équations de mouvement dans différents systèmes de coordonnées 65
3.8 Particule chargée 66
3.9 Particule relativiste 1 67
3.10 Pendule retenu 67
3.11 Pendule oscillant 69
3.12 Mouvement d'une toupie 70

3.13 Pendule paramétrique 78
3.14 Similitude mécanique 81
3.15 Pendule de Thomson-Tait 82
3.16 Pseudo-potentiel 85
3.17 Conservations et fonctions de Routh 87
3.18 Lagrangien indépendant du temps et énergie mécanique 87
3.19 Visualisation géométrique de la transformation de Legendre 91
3.20 Résolution matricielle des équations de Hamilton 96
3.21 Pendule de Thomson-Tait, méthode hamiltonienne 98
3.22 Pseudo-potentiel, méthode hamiltonienne 98
Résumé **Mécanique hamiltonienne** 99
3.23 Traitement d'un système dynamique avec frottement 100
3.24 Particule relativiste 2 101
3.25 Théorème du Viriel 102
3.26 Mécanique dans un référentiel non inertiel : potentiel des forces d'inertie 104
3.27 Problème à deux corps : approche lagrangienne 107
3.28 Problème à deux corps : approche hamiltonienne 109
3.29 Problème à trois corps restreint − Points de Lagrange 111

4 Applications du formalisme hamiltonien

4.1 Portraits de phase 134
4.2 Portrait de phase d'un oscillateur avec frottement solide 135
4.3 Portrait de phase d'un pendule simple 135
4.4 Non-croisement des trajectoires de phase 137
4.5 Probabilité d'observation d'un oscillateur harmonique 142
4.6 Symétries (invariances géométriques) et conservations 145
4.7 Wagon sous la pluie 147
4.8 Conservations dynamiques et intégration des équations par quadratures 149
4.9 Conservation de l'énergie mécanique et intégration par quadratures 150
4.10 Crochets de Poisson impliquant q_i, p_i et H, crochets de Poisson fondamentaux 152
4.11 Invariance des équations de Lagrange dans un changement de coordonnées 153
4.12 Génératrices de transformations canoniques 155
4.13 Différents types de génératrices − Relations de conversion 156
4.14 Transformation canonique engendrée par le hamiltonien 158
4.15 Transformation canonique et volume de l'espace des phases 159
4.16 Crochets fondamentaux et transformation canonique 160
4.17 Crochets de Poisson et transformation canonique 161
4.18 Quelques propriétés algébriques des crochets de Poisson 162
4.19 Crochets de Poisson du moment cinétique 165
4.20 Crochets de Poisson et force centrale 167
4.21 Commutation avec ℓ_z 168
4.22 Transformations de contact engendrées par H 169
4.23 Modification du hamiltonien dans une transformation de contact infinitésimale 170
4.24 Opérateur d'évolution 171
4.25 Générateurs infinitésimaux 171
4.26 Pendule oscillant en coordonnées cartésiennes 1 173
4.27 Pendule oscillant en coordonnées cartésiennes 2 174
Résumé **Point sur les crochets de Poisson (A)** 175
Résumé **Point sur les crochets de Poisson (B)** 176

4.28 Invariances géométriques et conservations 177
4.29 Conservations pour une particule classique libre à 3 dimensions 183
4.30 Conservations pour une particule relativiste libre à 3 dimensions 184
4.31 Conservations dans un système de n particules classiques en interaction 184
4.32 L'« hodographe » de Hamilton 193
4.33 Crochets de Poisson du vecteur de Runge-Lenz avec le hamiltonien 198
4.34 Invariants en involution dans les mouvements képlériens 199
4.35 Dérivées de la *fonction* Action 202
4.36 La *fonction* Action pour un système conservatif 202
4.37 Principe de Maupertuis et systèmes conservatifs 207
4.38 Dépendance en temps des coordonnées par la méthode d'Euler 209
4.39 Comparaison des principes de Hamilton et de Maupertuis 209
4.40 Principe de conservation de la *vis viva* de Bernoulli-Leibniz 210
4.41 Méthode d'Euler-Maupertuis pour une particule 211
4.42 Principe de Maupertuis et principe de Fermat 1 212
4.43 De Fermat à Hamilton 212
4.44 Optique ondulatoire et principe de Fermat. Équation du rayon 215
4.45 Action d'une particule en mouvement conservatif 217
4.46 Principe de Maupertuis et principe de Fermat 2 218
4.47 Intégrale de chemin et équation de Schrödinger 223

5 Contraintes. Problèmes isopérimétriques

5.1 Stationnarité de fonctions à plusieurs variables contraintes 236
Résumé **Méthode des multiplicateurs de Lagrange** 238
5.2 Un problème isopérimétrique historique : *Le problème de Didon* 239
5.3 Le problème de la chaînette (caténaire ou funiculaire) 240
5.4 Chaînette expérimentale 241
5.5 Problèmes isopérimétriques d'intérêt géométrique ou cinétique 244
5.6 Voile gonflée par le vent (*velaria* ou voilière) 246
5.7 Bâche à eau (*lintearia* ou lintéaire) 248
5.8 Corde à sauter 251
Résumé **Fonctionnelles contraintes classiques** 253
5.9 Roulement d'une boule et d'une roue de bicyclette sur un plan 258

6 Variations à plusieurs dimensions. Élasticité

6.1 Intégration par parties à 2 dimensions : autres méthodes 263
6.2 Électrostatique 265
6.3 Transformations de fonctionnelles 265
Résumé **Récapitulation des formules de calcul variationnel** 267
6.4 Contrainte à plusieurs dimensions 269
6.5 Méthode de Ritz : une autre approche 271
6.6 État fondamental de l'atome d'hydrogène 273
6.7 Champs 276
6.8 Potentiel d'élasticité d'une membrane par tension superficielle 280
6.9 Déformation d'une membrane par pression uniforme 281
6.10 Équation de mouvement d'une peau de tambour 283
6.11 Équilibre de poutres 288
6.12 Forces de cohésion interne et déformation dans une tige élastique 292
6.13 Poutre sur deux chevalets 293

6.14	Poutre chevauchée	298
6.15	Canne à pêche	300
6.16	Flèche de grue	301
6.17	Vibration d'une guimbarde	302
6.18	Vibration d'une plaque	303
6.19	Profil d'une tige déformée en coordonnées cartésiennes	309
6.20	Tige encastrée, sollicitée à son extrémité libre (*Elastica*)	309
6.21	Faibles déformations	314
6.22	Tige arquée − Courbes élastiques	314
6.23	Tige sollicitée en son milieu	315

Chapitre 1

Introduction

Trois idées sont à l'origine des méthodes variationnelles *: la notion de* stationnarité *(optimisation et règles d'extremum), celle de* fonctionnelle *et enfin la généralisation de l'idée de règle d'extremum à celle de* principe variationnel.

1.1. Stationnarité, optimisation et principes d'extremum

1.1.1. Stationnarité

La notion d'**optimisation**[2] est ancrée dans notre esprit. Le but de nos actions est d'acquérir le *maximum* (de connaissances, de biens, de résultats, etc.) en le *minimum* (de temps, d'argent, d'effort, etc.). En économie, on cherche la rentabilité maximum, le minimum de pertes. Moi-même je cherche le trajet le plus court pour aller d'un endroit à un autre, sauf si le trajet est lui-même l'objet de mon déplacement, auquel cas je l'allongerai.

Notre vie quotidienne est faite de ces recherches de maximums et de minimums c'est-à-dire, en termes plus techniques, de situations **stationnaires**. Pour une fonction $f(x)$ de la variable réelle x, on appelle **point stationnaire** tout point où la dérivée de la fonction s'annule : ce peut être un maximum, un minimum, un point inflexionnel (mais de dérivée nulle), c'est-à-dire un point où la fonction ne varie pas pour une petite variation dx de x. Un tel point traduit un équilibre et donne une impression d'objectif atteint, d'œuvre achevée.

Il ne faut donc pas s'étonner que les Anciens aient associé cette propriété aux œuvres de la Nature et aient cherché chez elle tout ce qui pouvait être extremum : ils pensaient y trouver l'essentiel. Les problèmes pouvaient être concrets, comme celui de l'aire maximum circonscrite par une clôture de longueur fixée (**problème isopérimétrique de Didon**[3], **Archimède**, 287-212 av. J.-C., **Zénodore** $\sim$ 200 ans av. J.-C., **Pappus**, $\sim$ 300-360 ap. J.-C.), mais aussi abstraits. Parmi ces derniers apparaît très tôt celui de la nature de la lumière (**Pythagore**, 570-480 av. J.-C., **Platon**, 427-347 av. J.-C., **Aristote**, 384-322 av. J.-C.), et la question de sa propagation. Au IIIe siècle av. J.-C., la propagation rectiligne était admise et **Euclide** énonçait la loi de la réflexion. Il faudra attendre le 1er siècle ap. J.-C. pour que **Héron d'Alexandrie** fasse intervenir une idée d'extremum : la lumière suit le chemin « le plus court ». C'est déjà un **principe d'extremum**[4], parfaitement valable pour la propagation de la lumière et sa réflexion dans un milieu homogène ; mais on sait qu'il est faux pour la réfraction,

---

[2] Les mots cités dans l'index sont imprimés en **gras** dans le texte pour une recherche plus aisée.

[3] Le lecteur est encouragé à consulter le Net pour se remémorer ces légendes antiques et les avancées mathématiques de cette époque.

[4] En fait c'est même un principe variationnel dans le sens où un calcul variationnel est impliqué.

quand la lumière passe dans un milieu différent. En fait tel que je l'ai écrit il n'est pas vraiment faux car mon énoncé est intentionnellement ambigu. Quand je vais de mon domicile à mon bureau, je recherche le trajet « le plus court », mais le plus court comment ? En distance ? Ce qui va m'obliger à passer par des chemins trop fréquentés et encombrés, à être ralenti par des feux de croisement, etc. Ne serait-ce pas plutôt en temps ?

En fait, le problème d'un déplacement en un minimum de temps a très tôt attiré l'attention, mais sans rapport direct avec la propagation lumineuse. La question était académique : c'est celle d'une bille lâchée d'un point A dans le champ de pesanteur et que l'on veut faire aller en un minimum de temps au point C, d'altitude inférieure mais pas sur la verticale de A ; pour cela on l'oblige à suivre sans frottement une trajectoire déterminée, par exemple dans une gouttière déformable ; le tout est de trouver la forme de la gouttière.

Vers 1610, **Galilée**[5], professeur à Padoue, a 46 ans ; il mentionne dans une lettre à Guidobaldo del Monte sa solution qui ne sera publiée qu'en 1638 dans les *Discours et Démonstrations Mathématiques relatives à deux nouvelles sciences* : Galilée trouve un arc de cercle (figure 1.1).

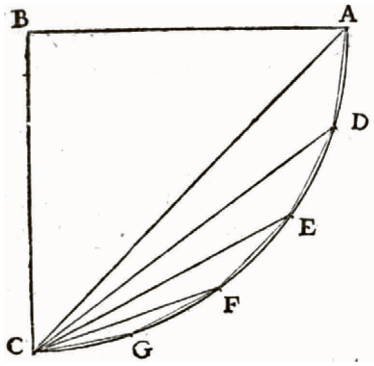

FIGURE 1.1 : Figure originale concernant le problème du Brachistochrone par Galilée *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze* (1638).

Le résultat est faux ! En fait, en utilisant ses résultats sur le mouvement d'une bille sur un plan incliné, Galilée montre qu'en suivant l'arc de cercle $(ADEFGC)$ la bille mettra moins de temps qu'en suivant la corde (AC) ; ce qui ne signifie pas que l'arc de cercle soit la trajectoire optimale ! Ce ne sera pas la seule erreur de Galilée en matière de calcul variationnel, puisqu'il dira aussi que dans le champ de pesanteur une chaîne pesante suspendue par ses extrémités prend une forme parabolique : Galilée était soumis à l'influence de son temps qui ne reconnaissait comme courbes remarquables que la droite, le cercle, la parabole et autres coniques. La véritable solution de son problème de moindre temps est la **cycloïde** (ou **roulette** comme disait **Pascal**[6] qui l'étudiera en 1658), et celle de la chaîne, le cosinus hyperbolique (ou **chaînette**).

---

[5] Galileo Galilei, Pise, 1564 − Arcetri près de Florence, 1642.
[6] Blaise Pascal, Clermont, 1623 − Paris, 1662.

Pourquoi mentionner cette anecdote ? Simplement parce qu'avec un demi-siècle d'avance, Galilée venait d'aborder le problème mathématique associé au **principe de Fermat**[7] qui, lui, est un **principe variationnel** solide.

1.1.2. Exemples de règles et de principes d'extremum

Disons quelques mots sur les **points stationnaires** et les **principes d'extremum**. Les problèmes de statique se résolvent par la recherche du minimum d'un potentiel, ce qui constitue un exemple d'utilisation de l'optimisation en mécanique. On retrouve aussi un principe d'extremum avec le **2$^{\mathbf{d}}$ principe de la thermodynamique** sous la forme : *un système thermodynamique isolé atteint son équilibre au maximum de son entropie*. Cet aspect est illustré dans ce premier exercice[8] :

□ Exercice 1.1 : Thermalisation

Un cylindre isolé thermiquement de l'extérieur est cloisonné par un piston (étanche mais non isolant thermiquement) en deux compartiments (1) et (2). Au temps $t = 0$ on bloque le piston pour l'empêcher de coulisser ; les compartiments (1) et (2) ont alors pour volumes respectifs V_1 et V_2. Dans (1) on introduit n_1 moles d'un gaz parfait de chaleur molaire C_V constante à la température T_1 et sous la pression P_1, et dans (2), n_2 moles du même gaz parfait à T_2 et P_2. Le piston est débloqué et on laisse l'ensemble s'équilibrer. Calculer les pressions, volumes et températures à l'équilibre, en n'utilisant que des principes reconnus.

□ ***Solution*** *:*

Les 6 variables d'état initiales, V_1, V_2, P_1, P_2, T_1 et T_2 sont connues. Elles sont reliées entre elles par les équations d'état de chaque gaz initialement à l'équilibre :

$$P_1V_1 = n_1RT_1 \text{ et } P_2V_2 = n_2RT_2.$$

Pour déterminer les 6 variables finales, V_1', V_2', P_1', P_2', T_1' et T_2', il faut donc 6 équations.

(*i*) La géométrie impose $V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$,

(*ii*) L'équilibre mécanique conduit à $P_1' = P_2'$,

(*iii*) et (*iv*) Les équations d'état de chaque gaz à l'équilibre final sont :

$$P_1'V_1' = n_1RT_1' \qquad \text{et} \qquad P_2'V_2' = n_2RT_2' \tag{1.1.1}$$

(*v*) 1er principe : Le système des deux gaz est isolé, son énergie interne est conservée : la somme des deux variations d'énergie interne est donc nulle :

$$n_1C_V(T_1' - T_1) + n_2C_V(T_2' - T_2) = 0 \tag{1.1.2}$$

En réécrivant (1.1.1) sous la forme $P_1' = \frac{n_1RT_1'}{V_1'}$ et $P_2' = \frac{n_2RT_2'}{V_2'}$ et en utilisant $P_1' = P_2'$, on a :

$$P' = P_1' = P_2' = \frac{n_1RT_1'}{V_1'} = \frac{n_2RT_2'}{V_2'} = \frac{n_1RT_1' + n_2RT_2'}{V_1' + V_2'} = \frac{n_1RT_1 + n_2RT_2}{V_1 + V_2}$$

où on a utilisé les propriétés des proportions ainsi que (1.1.2) et la géométrie.

La pression dans l'état final est facilement calculable, mais les températures et volumes non : cinq équations étant disponibles pour 6 inconnues, le problème est en fait à une seule inconnue et

---

[7] Pierre Fermat (« de » Fermat à partir de 1631), Beaumont de Lomagne, 1601 − Castres, 1665.

[8] Les exercices sont suivis de leur solution car ce sont souvent des compléments de l'exposé.

il faut une 6e équation. Elle sera donnée par le 2d principe sous forme de principe d'extremum. Le but est d'exprimer la variation d'entropie ΔS du système en fonction de l'inconnue résiduelle et de déterminer la valeur de cette dernière rendant ΔS maximum. On exprimera ΔS en fonction des pressions car P' est connu ; c'est pour cela qu'on écrira plutôt $\mathrm{d}S_i = \frac{1}{T}\left(n_i C_P \mathrm{d}T + h\mathrm{d}P\right)$ (rappelons que pour un gaz parfait $h = -V$ et $C_P = C_V + R$), donc

$$\mathrm{d}S_1 = n_1 C_P \frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{V}{T}\mathrm{d}P = n_1 C_P \frac{\mathrm{d}T}{T} - n_1 R \frac{\mathrm{d}P}{P} \qquad \text{et} \qquad \Delta S_1 = \int_{(1)}^{(1')} \mathrm{d}S_1 = n_1 \left[C_P \ln \frac{T_1'}{T_1} - R \ln \frac{P'}{P_1} \right]$$

La variation totale d'entropie s'écrit ainsi : $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 C_P \ln T_1' + n_2 C_P \ln T_2' + \mathrm{C^{ste}}$, où toutes les constantes additives ont été regroupées. On exprime T_2' en fonction de T_1' en utilisant (1.1.2) : $T_2' = T_2 - \frac{n_1}{n_2}(T_1' - T_1)$, et on obtient ΔS en fonction de la seule variable T_1' :

$$\Delta S \propto n_1 \ln T_1' + n_2 \ln \left[n_2 T_2 - n_1 (T_1' - T_1) \right] + \mathrm{C^{ste}}$$

D'où la dérivée $\frac{\mathrm{d}\Delta S}{\mathrm{d}T_1'} \propto \frac{n_1}{T_1'} - \frac{n_1 n_2}{n_2 T_2 - n_1 (T_1' - T_1)} = n_1 \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2 - (n_1 + n_2) T_1'}{T_1' \left(n_2 T_2 - n_1 (T_1' - T_1) \right)}$ qui s'annule pour T_1' égal à $\frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$; la symétrie de l'expression montre que $T_1' = T_2'$ (résultat attendu). Par remplacement, le lecteur montrera le partage proportionnel des volumes :

$$V_1' = \frac{n_1}{n_1 + n_2}(V_1 + V_2) \text{ et } V_2' = \frac{n_2}{n_1 + n_2}(V_1 + V_2).$$

Un autre exemple est celui du **principe du maximum de vraisemblance** en statistique, conduisant à la **méthode des moindres carrés**. Il est basé sur l'idée que si l'on a obtenu les mesures $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ aux points de mesure $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – par exemple les tensions $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ aux bornes d'une résistance pour les intensités $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ – c'est parce qu'on avait le maximum de chance de les obtenir[9]. Si les mesures y_j sont des variables normales, indépendantes, centrées sur la valeur exacte $\phi(x_j)$ de Y pour $X = x_j$ et d'écart-type constant σ, la probabilité d'avoir obtenu l'échantillon $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est :

$$P(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}) \propto \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(y_1 - \phi(x_1)\right)^2 + \cdots + \left(y_n - \phi(x_n)\right)^2 \right] \right\}$$

Selon le principe, la loi $\phi(x)$ pertinente est celle qui rend cette expression maximum, ou encore $\left(y_1 - \phi(x_1)\right)^2 + \cdots + \left(y_n - \phi(x_n)\right)^2 = \sum_j \left(y_j - \phi(x_j)\right)^2$ minimum (« moindres carrés »). Compte tenu de l'infinité des possibilités de fonctions, on se restreint en remplaçant ϕ par une fonction f d'un type que l'on pense raisonnable (le **modèle**), modulable par quelques paramètres β_k bien placés, puis on ajuste ces paramètres pour minimiser $S(\beta_k) = \sum_j \left(y_j - f(x_j; \beta_l)\right)^2$. Les meilleurs paramètres ainsi obtenus conduisent à la meilleure solution « au sens des moindres carrés » de type f pour représenter les données.

☐ Exercice 1.2 : Régression linéaire

Soit l'échantillon des n mesures $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ faites aux points de mesure $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On pense que la loi théorique liant les quantités y_j et x_j est de la forme $y = ax + b$. Déterminer les meilleures valeurs des paramètres a et b « au sens des moindres carrés » que l'on peut déduire de cet échantillon.

---

[9] Ce principe peut être justifié par un raisonnement bayésien (Féménias, 2003).

□ ***Solution :***
La quantité à minimiser est la fonction des deux variables a et b : $S(a,b) = \sum_j (y_j - ax_j - b)^2$. On calcule ses dérivées par rapport à b et à a et on les annule pour obtenir $\sum_j (y_j - ax_j - b) = 0$ et $\sum_j x_j (y_j - ax_j - b) = 0$. En notant $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_j x_j$ et $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_j y_j$ les coordonnées de Ω, « centre de gravité des points $\{(x_j, y_j)\}$ », la première équation montre que $\overline{Y} = a\overline{X} + b$: la droite optimum passe par Ω. En éliminant b entre les deux équations, on obtient :

$$a = \frac{n\sum_j (x_j y_j) - \sum_i x_i \sum_j y_j}{n\sum_j (x_j)^2 - (\sum_j x_j)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_j (x_j y_j) - \overline{X}\,\overline{Y}}{\frac{1}{n}\sum_j (x_j)^2 - \overline{X}^2} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}$$

où les notations $\mathrm{cov}(X,Y)$ et $\mathrm{var}(X)$ ont été utilisées à cause de la similitude du numérateur et du dénominateur avec une covariance et une variance statistiques. Ainsi, la droite d'équation

$$y = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)} x - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)} \overline{X} + \overline{Y}$$

est la meilleure droite au sens des moindres carrés passant par l'ensemble des points expérimentaux $\{(x_j, y_j)\}$.

Enfin voici un dernier exercice qui nous fait revenir au problème des trajectoires de moindre temps évoqué plus haut.

□ Exercice 1.3 : Le chien de Fermat

Pour récupérer un canard tué par un chasseur, un chien doit aller du point $A\ (a, a')$ sur la terre ferme au point $B\ (b, b')$ dans un marécage (figure 1.2). Sur la terre il se déplace à une vitesse V et dans le marécage à une vitesse $v < V$. En quel point M doit-il aborder le marécage pour atteindre B en un temps minimum ?

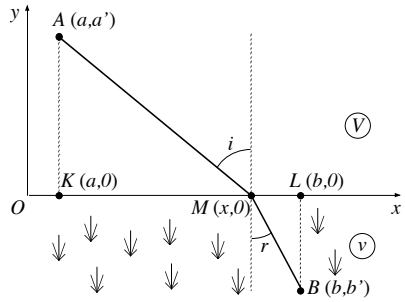

FIGURE 1.2 : Le problème du chien de chasse de Fermat.

□ ***Solution :***
De A à M, le temps de parcours est $t_1 = \frac{AM}{V} = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + a'^2}}{V}$; de même, de M à B, $t_2 = \frac{MB}{v}$ donc $t_2 = \frac{\sqrt{(x-b)^2 + b'^2}}{v}$. Le temps de parcours total est $t(x) = t_1 + t_2$; c'est cette quantité que l'on minimise en annulant sa dérivée par rapport à x :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{V}\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + a'^2}} - \frac{1}{v}\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + b'^2}} = \frac{1}{V}\frac{KM}{AM} - \frac{1}{v}\frac{ML}{MB} = 0$$

Avec $\frac{KM}{AM} = \sin i$ et $\frac{ML}{MB} = \sin r$, on obtient la loi de la réfraction : $\frac{1}{V}\sin i = \frac{1}{v}\sin r$.

Le lien avec le **principe de Fermat** est clair. Fermat a proposé son principe[10] en 1662. Avec une intuition géniale, il postule que pour aller d'un point à un autre, la lumière ne choisit pas le chemin le plus court mais celui lui prenant le moins de temps. Pour toute justification, il écrit à M. Marin Cureau de la Chambre (qui penchait pour le chemin le plus court comme Héron d'Alexandrie) : *la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus rapides*. On n'est pas loin de penser que Fermat était encore sous l'influence des idées aristotéliciennes, mais pourtant il cite Galilée qui, comme on l'a vu, avait montré que le chemin de chute le plus rapide n'était en tout cas pas la ligne droite. Cet argument peut paraître assez inconsistant, car qu'y a-t-il de commun pour nous entre une bille pesante et un rayon lumineux insensible à la gravité (le pensait-on) ? Il n'en reste pas moins vrai que grâce à la seule hypothèse de moindre temps, Fermat retrouve la **loi de la réfraction** de **Snell**[11] avec une hypothèse correcte sur les vitesses de la lumière ; en effet, il est amené à supposer que la lumière va moins vite dans l'eau (ou le verre) que dans l'air, contrairement à **Descartes**[12] dont la démonstration bien bâtie repose sur des hypothèses que l'on sait fausses maintenant[13]. La polémique qui suivit avec Descartes n'a pas été le plus beau chapitre de l'histoire de la Physique et a laissé un souvenir peu agréable de l'auteur de *La Dioptrique*[14].

1.1.3. Le paradigme du brachistochrone

La diffusion du principe de Fermat a entraîné un regain d'intérêt pour le problème de la trajectoire de moindre temps dans le champ de pesanteur étudié auparavant par Galilée. Comme de coutume dans ce genre de situation, on a donné un nom à

---

[10] Les remarques historiques sont en grande partie inspirées du travail de Goldstine (Goldstine, 1980).

[11] Willebrord Snell, Leyde, 1580 − Leyde, 1626.

[12] René Descartes, La Haye en Touraine (aujourd'hui La Haye-Descartes), 1596 − Stockholm, 1650.

[13] L'hypothèse d'une vitesse de la lumière plus grande dans des milieux denses que dans l'air était logique car on savait alors, par exemple, que le son se propage plus vite dans un solide que dans l'air. Cet argument renforçait la position de **Descartes**. **Fermat** avait noté qu'il arrivait au bon résultat avec l'hypothèse opposée : « *J'ai réitéré mes opérations algébriques diverses fois, et toujours le succès a été le même, quoique ma démonstration suppose que le passage de la lumière par les corps denses soit plus malaisé que par les corps rares, ce que je crois très vrai et indispensable, et que M.* **Descartes** *suppose le contraire* ».

[14] Dans son ouvrage déjà cité dans l'Avant-Propos, *Nouvelles Perspectives en Microphysique* (Albin Michel, 1958), **Louis de Broglie** fait un commentaire assez réaliste (mais peu habituel par son côté abrupt) du créateur du Cartésianisme, commentaire peut-être dû à l'attitude finalement peu « scientifique » du grand philosophe vis-à-vis de **Fermat** :
« *Esprit trop systématique, trop convaincu de la supériorité de ses principes, Descartes n'a pas apporté un grand nombre de contributions durables à la science moderne : sans doute on lui doit la constitution définitive de la géométrie analytique, les lois précises de la réflexion et de la réfraction de la lumière, d'ailleurs déjà énoncées avant lui par* **Snell**, *et sa belle théorie de l'arc-en-ciel ; mais, même en s'en tenant au domaine de la mécanique, on peut dire qu'il s'est presque constamment trompé dans ses affirmations. (...).* **Descartes**, *malgré ses erreurs nombreuses et certains aspects peu sympathiques de son caractère, reste une haute figure : bien qu'il l'ait souvent entraînée dans des voies aberrantes, il a donné à la science moderne, encore dans son enfance, une vigoureuse et ineffaçable impulsion.* »

ce problème-type. **Jean Bernoulli**[15] l'a nommé « problème du chemin brachistochrone », ou « du **brachistochrone** »[16], du superlatif grec $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\varsigma$, brachistos : « le plus court », $\chi\rho\acute{o}\nu\varsigma$, chronos : « temps »[17], et dès juin 1696, alors professeur à Gröningen en Hollande, il invite la communauté internationale des « géomètres » à chercher sa solution. Il reçoit une réponse immédiate de **Leibniz**[18] depuis Hanovre, datée du 16 juin. Jean Bernoulli et son frère aîné **Jacques Bernoulli**[19] publient leurs solutions en mai 1697, accompagnées d'une note de **Leibniz** qui se dispense de publier la sienne qu'il considère proche de celles des Bernoulli. On apprendra par la suite que **Newton**[20] avait publié anonymement une solution... en janvier 1696.

Mais finalement qu'y a-t-il de nouveau ? Le point commun à tous les exemples d'optimisation abordés jusqu'ici est que l'on ne détermine pas la *fonction* optimale, mais les valeurs optimales de paramètres permettant de trouver la meilleure fonction *dans une classe prédéfinie*. Par exemple, Galilée *choisit* le cercle et définit ensuite quel cercle passant par A et C conviendra le mieux (figure 1.1). Il en est de même pour la méthode des moindres carrés où le modèle est défini et où l'optimisation se réduit au calcul des dérivées d'une simple fonction $S(\beta_k)$. Dans l'exemple du chien, les trajectoires de moindre temps en milieu homogène étant des droites (figure 1.2), la solution se réduit à la détermination du point M par une simple dérivée. Le problème du brachistochrone, lui, est plus délicat : il s'agit de trouver la trajectoire (une fonction $y(x)$) qui rendra minimum un temps t (un réel), en d'autres termes déterminer le minimum de $t[y]$: quantité numérique dépendant d'une fonction.

1.2. Fonctionnelles

Le problème du chemin suivi par la lumière, ou celui du brachistochrone, est identique au mien quand je vais à mon bureau : il me faut déterminer la fonction $y(x)$ (trajectoire) qui rendra minimum le temps de parcours t. La quantité $t[y]$ s'appelle une **fonctionnelle**, sa « variable » y est en fait une fonction ; pour distinguer une « fonctionnelle » d'une « fonction » habituelle $y(x)$, on l'écrit avec des crochets : $t[y]$. Une bonne façon de réaliser ce qu'est une fonctionnelle est de revenir au paradigme du **brachistochrone**.

---

[15] Jean Bernoulli, Bâle, 1667 − Bâle, 1748.
[16] On dit aussi « la brachistochrone » pour « courbe brachistochrone » et on écrit parfois *brachystochrone*, peu conforme au superlatif grec.
[17] Leibniz voulait l'appeler « tachystoptotam », du grec $\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\sigma\tau\alpha\tau\varsigma$, tachystatos : « le plus rapide », et $\pi\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\iota\nu$, piptein : « tomber » ; le choix de « brachistochrone » n'est donc pas si désastreux.
[18] Gottfried Wilhelm Leibniz, Leipzig, 1646 − Hanovre, 1716.
[19] Jacques Bernoulli, Bâle, 1654 − Bâle, 1705.
[20] Isaac Newton, Woolsthorpe, 1643 − Londres, 1727.

1.2.1. Un premier exemple de fonctionnelle

Dans le plan vertical, une bille de masse m est lâchée sans vitesse initiale du point $O(0,0)$. Quelle est sa trajectoire pour atteindre le plus rapidement possible le point $A(a,b)$ (figure 1.3) ?

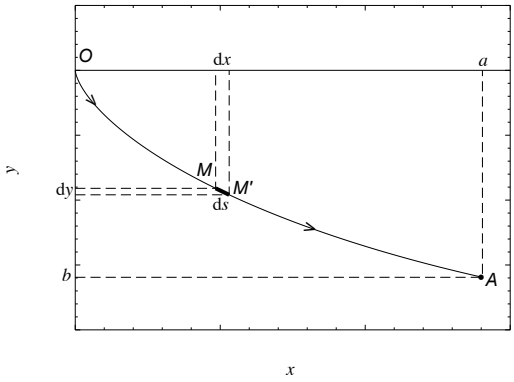

FIGURE 1.3 : Le problème du (de la) brachistochrone.

Calculons le temps infinitésimal pour que la bille aille de $M(x,y)$ au point infiniment voisin $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$: si la vitesse en M est $v(M)$, la distance parcourue étant $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$, ce temps est $\mathrm{d}t = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}/v(M)$. Les frottements étant négligés, la vitesse en M se déduit de la conservation de l'énergie mécanique dans cette chute d'une hauteur $|y| = -y$: $-mgy = \frac{1}{2}mv^2$ et $v(M) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-2gy}$.

On posera $u(x) = -y(x)$, donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}u^2}{u}}$. Avec $\mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x$, il vient $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\ \mathrm{d}x$; le temps total de chute de O à A est donc :

$$t[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\ \mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

$y(x) = -u(x)$ est la fonction décrivant la trajectoire suivie de O à A dans le plan Oxy. Le problème est de déterminer la fonction $u(x)$ qui rend minimum la quantité numérique $t[u]$.

La notation $t[u]$ est importante. Elle insiste sur le fait qu'une fonctionnelle est une quantité dépendant d'une fonction. Mais on remarque aussi que x n'y apparaît pas : en effet, une fois l'intégrale (1.2.1) effectuée, la variable muette x a disparu. La quantité t dépend donc de la fonction u et uniquement d'elle. Dans le résultat final apparaîtront les bornes d'intégration qui pourront avoir une importance selon le type de traitement (voir chapitre 2). La détermination de la trajectoire optimale est donc un problème qui sort du cadre des optimisations précédentes : il faut pouvoir calculer la dérivée de la fonctionnelle t par rapport à la fonction u, comme on le verra au chapitre 2.

Le résultat trouvé au XVIIe siècle est un arc de **cycloïde** de tangente verticale en O. Une cycloïde est la trajectoire d'un point situé à la périphérie d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite dans un mouvement plan sur plan ; la figure 1.4 montre le dessin de la cycloïde du brachistochrone publié avec sa solution en 1697 par Jean Bernoulli (attention, ici A est le point de départ).

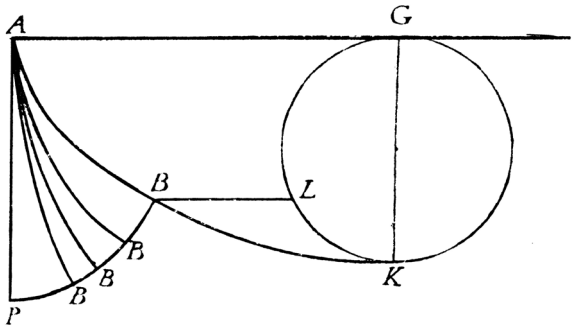

FIGURE 1.4 : Cycloïde, trajectoire (ABK) du point K sur un cercle roulant sur la droite AG. Le cercle est sous la droite pour les besoins de l'étude du brachistochrone. (Jean Bernoulli, 1697)

Dans le cas de la figure 1.4, les équations paramétriques de la cycloïde sont :

$$\begin{cases} x = R\,(\theta - \sin\theta) \\ y = -R\,(1 - \cos\theta) \end{cases} \tag{1.2.2}$$

où R est le rayon du cercle et θ l'angle décrivant sa rotation autour de son centre dans le mouvement de roulement ($\theta = 0$ si K est en A) ; x est la coordonnée horizontale de K et y sa coordonnée verticale comptée positivement vers le haut[21].

1.2.2. Euler et Lagrange : naissance du calcul variationnel

En 1744, **Euler**[22] résout le problème de l'optimisation d'une fonctionnelle de la forme

$$J[u] = \int_a^b F\,[u(x), u'(x), x]\ \mathrm{d}x \tag{1.2.3}$$

où $F\,[u(x), u'(x), x]$ est un intégrant dépendant de la fonction $u(x)$, de sa dérivée première et de la variable x. Il aboutit à ce que l'on nomme de nos jours l'**équation d'Euler-Lagrange**.

En 1755 enfin, un jeune homme de 19 ans, **Lagrange**,[23] propose sa « méthode des variations » comme alternative à celle d'Euler dans les problèmes d'optimisation de fonctionnelles. Euler, enthousiasmé par sa simplicité, baptisera cette branche des mathématiques « **Calcul Variationnel** » en hommage à Lagrange. Cette méthode de résolution analytique générale qui est enseignée de nos jours est effectivement bien plus rapide et efficace que celle d'Euler.

---

[21] Il n'est pas rare de voir la notation y pour la coordonnée horizontale (qui, par ailleurs, est parfois nommée « ordonnée ») et x, souvent compté positivement vers le bas, pour la coordonnée verticale (Euler, 1770 ; Goldstine, 1980).

[22] Leonhard Euler, Bâle, 1707 − Saint-Petersbourg, 1783.

[23] Giuseppe Lodovico Lagrangia, puis Joseph-Louis comte de Lagrange Tournier, Turin, 1736 − Paris, 1813. Ses œuvres complètes sont en ligne (Lagrange, *Œuvres*, 1873).

1.3. Principes variationnels

1.3.1. Principes de Fermat, de Maupertuis et mécanique analytique de Lagrange

Revenons au point de départ de cette discussion sur l'optimisation et les règles d'extremum. Avec son **principe**, **Fermat** avait montré qu'il existait une façon simple d'expliquer certains phénomènes qui, sinon, demandaient une analyse délicate et, comme on l'a vu avec la démonstration de Descartes, hasardeuse. Or à cette époque le lien entre optique et mécanique allait de soi[24] ; on a donc cherché un principe d'extremum relié à celui de Fermat pour interpréter les phénomènes mécaniques. C'est une des raisons qui ont poussé **Euler** à s'intéresser à l'optimisation des fonctionnelles[25], mais l'histoire dit que c'est **Maupertuis**[26] qui, le premier, a proposé son **principe de moindre Action** pour la mécanique[27]. Il utilise une notion d'**Action**[28] S_0, fonctionnelle dépendant des coordonnées des corps en mouvement : c'est une intégrale sur une variable d'espace de la ***vis viva*** ou « force vive »[29] (double de notre énergie cinétique) et non sur le temps comme l'**Action de Hamilton**.

Par la suite **Lagrange** revient sur ce principe, le clarifie, le généralise aux mouvements dans un potentiel quelconque, et publie sa **Mécanique Analytique** (1788) : c'est l'apothéose de la **mécanique lagrangienne** où les mouvements des corps sont considérés comme résultant d'un principe d'extremum, un nouveau **principe variationnel**. Une certaine unité est ainsi faite entre la mécanique et l'optique sans pour autant qu'un lien soit clairement établi entre les deux principes, malgré les efforts de Maupertuis.

---

[24] Malgré leurs divergences, Fermat et Descartes considèrent tous les deux la lumière comme un flot de particules ; il s'agit dans les deux cas d'approches corpusculaires de la lumière, et aucune idée ondulatoire n'intervient dans les démonstrations. Le fait que la méthode de Fermat conduise à des résultats exacts contrairement à celle de Descartes tient à leur nature : alors que Descartes effectue une approche mécanique détaillée qui pêche par ses hypothèses, Fermat reste dans le cadre plus général de la cinématique.

[25] « *Puisque tous les effets de la Nature suivent une certaine loi de maxima ou de minima, il n'y a aucun doute que, sur les trajectoires courbes que les projectiles décrivent sous l'action de certaines forces, une propriété de maximum ou de minimum devrait être la règle.* » ((Euler, 1770), 2[d] Appendice « *Sur le mouvement des projectiles dans un milieu non résistant, déterminé par la méthode des maxima et minima* »). Ce texte est souvent cité comme le véritable acte de naissance du **principe de moindre Action**.

[26] Pierre Louis Moreau de Maupertuis, Saint-Malo, 1698 − Bâle, 1759.

[27] « *Ce n'est que dans ces derniers temps qu'on a découvert une loi dont on ne saurait trop vanter la beauté & l'utilité, c'est que dans tout système de corps élastiques en mouvement, qui agissent les uns sur les autres, la somme des produits de chaque masse par le carré de la vitesse, ce qu'on appelle la* force vive*, demeure inaltérablement la même. En méditant sur la nature de l'équilibre, j'ai cherché s'il n'y auroit pas dans la statique quelque loi de cette espèce ; s'il n'y auroit pas pour les corps tenus en repos par des forces, une loi générale, nécessaire pour leur repos ; & voici celle que j'ai trouvée que la Nature observe.* » (Maupertuis, Mémoire à l'Académie des Sciences, 20 février 1740). On a compris qu'en ce qui concerne la paternité de cette idée, un doute subsiste pour certains entre Maupertuis et Euler (Goldstine, 1980), ce dernier ayant donné, avec Lagrange, la formulation exacte de ce qui sera le **principe de moindre Action**.

[28] De nos jours on dit **Action raccourcie**, **Action réduite** ou **Action de Maupertuis** car ce n'est pas encore celle de **Hamilton**.

[29] Notion due à **Leibniz**. Le **principe de Maupertuis** s'inspire aussi de la « *Conservatio virium vivarum* » de **Jean Bernoulli**. Selon le type d'énergie potentielle, l'extrémalisation de cette fonctionnelle permet d'obtenir des trajectoires correctes.

L'idée dominante de cette fin du XVIIIe siècle est que tout ce qui est mathématisé est sûr. Les **principes variationnels** assurent donc une légitimité à la mécanique et à l'optique, et offrent de plus une unité de conception de la physique, bien que l'on ne comprenne pas très bien le sens de cette optimisation ni la signification de l'« Action ». Mais leur validité est confirmée chaque fois que les calculs qu'ils exigent peuvent être techniquement effectués.

Le XIXe siècle débute par un évènement presque inaperçu : en 1801, **Young**[30] revient à l'optique ondulatoire, alors mal mathématisée et ne s'appuyant sur aucun principe vraiment reconnu. En *philosophie naturelle*, les phénomènes de diffraction et d'interférence décrits par **Grimaldi**[31] puis **Hooke**[32] (*Micrographia* (1665)), sont plus ou moins mis sur le même plan que la botanique, malgré l'hypothèse ondulatoire prometteuse de **Huygens**[33,34]. Young énonce son **principe d'interférence**[35] sur la superposition des ondes... Il est très mal reçu.

En 1820, sans avoir eu connaissance des travaux de Young, **Fresnel**[36] et **Arago**[37] reviennent à l'optique ondulatoire, et une querelle présentant des similitudes avec celle de Descartes-Fermat les oppose alors à **Laplace**[38] et **Biot**[39], tenants de l'hypothèse corpusculaire. Fresnel et Arago apportent la confirmation mathématique de la nature ondulatoire en calculant les images de diffraction et interprètent l'optique géométrique en l'absorbant dans leur théorie. C'est une avancée décisive pour la théorie ondulatoire : la lumière devient une onde, son aspect corpusculaire n'étant qu'un comportement particulier décrit par une équation que j'appellerai ici **équation du rayon de Fresnel**. Cette parenthèse optique est importante : le **principe variationnel de Fermat** n'explique plus toute l'optique ; ce n'est plus qu'une technique spécialisée à un domaine très particulier : l'optique géométrique.

1.3.2. Principe de moindre Action de Hamilton

Par contre le principe variationnel régissant la mécanique est approfondi. En 1834, **Hamilton**[40] reprend les travaux de Lagrange et propose une nouvelle approche : ce sera la **mécanique hamiltonienne**. L'amélioration semble technique, mais on réalise

---

[30] Thomas Young, Milverton, 1773 − Londres, 1829.
[31] Francesco Maria Grimaldi, Bologne, 1618 − Bologne, 1663.
[32] Robert Hooke, Île de Wight, 1635 − Londres, 1703.
[33] Christian Huygens, La Haye, 1629 − La Haye, 1695.
[34] **Principe d'Huygens**, *Traité de la lumière*, 1678. Dans son principe, **Huygens** postule que la lumière progresse comme les ondes sur l'eau, suivant des fronts d'onde ; chaque front d'onde au temps $t + \Delta t$ est l'enveloppe des fronts produits par des ondelettes issues du front d'onde précédent au temps t. Ce principe, précisé par Fresnel (principe d'Huygens-Fresnel), est toujours utilisé dans les calculs pratiques de diffraction et d'interférence ; il apparaît en filigrane dans le concept d'intégrale de chemin de Feynman. Huygens meurt en 1695, isolé et déçu de n'avoir pas vu sa théorie reconnue.
[35] Sous condition de cohérence, ce sont les vibrations lumineuses qui se superposent et non leur intensité.
[36] Augustin Jean Fresnel, Chambrais (aujourd'hui Broglie), 1788 − Ville-d'Avray, 1827.
[37] Dominique François Arago, Estagel, 1786 − Paris, 1853.
[38] Pierre-Simon Laplace, Beaumont-en-Auge, 1749 − Paris, 1827.
[39] Jean-Baptiste Biot, Paris, 1774 − Paris, 1862.
[40] Sir William Rowan Hamilton, Dublin, 1805 − Dunsink, 1865.

rapidement qu'elle apporte un nouveau point de vue enrichissant de la théorie variationnelle de la mécanique. En particulier les liens entre les symétries géométriques et la conservation de certaines quantités dynamiques (énergie, moments cinétiques, quantités de mouvement) y deviennent plus lumineux, et on sait l'importance que revêtent les « conservations » dans la construction d'une théorie physique ou la solution d'un problème particulier. De plus, par la simplification qu'elle apporte, cette nouvelle formulation conduit plus facilement au traitement des systèmes dynamiques à très grand nombre de particules et à la **Physique statistique**. Le principe d'optimisation est donné sous sa forme définitive : le **principe de moindre Action de Hamilton**, ou **principe variationnel de Lagrange-Hamilton**, conduit à une théorie remarquablement bien structurée mathématiquement : la **mécanique analytique**.

Cette théorie est basée sur la fonctionnelle **Action de Hamilton** S, intégrale de la fonction de Lagrange $L = T - V$ ou **lagrangien**, différence entre les énergies cinétique T et potentielle V du système dynamique ; mais curieusement c'est uniquement le lagrangien qui est utilisé dans la pratique, S n'intervenant pratiquement jamais dans les calculs, sinon par le fait qu'elle doive être optimisée. En 1836, une étude plus approfondie de S elle-même a conduit Hamilton et **Jacobi**[41] à établir une équation (l'**équation de Hamilton-Jacobi**) qui a de surprenantes similitudes avec l'équation du rayon de Fresnel en optique. Hamilton l'a bien remarqué, mais la Physique de cette époque n'était pas prête pour en tirer profit. L'équation de Hamilton-Jacobi aura d'immenses conséquences un siècle plus tard.

1.3.3. Mécanique ondulatoire et mécanique quantique

À la fin du XIXe siècle, la Physique était sensée tout expliquer ; nombreux étaient ceux qui pensaient que seuls subsistaient quelques problèmes pratiques. Pourtant des questions se posaient toujours : la divergence théorique de l'énergie rayonnée par le corps noir, l'interprétation de l'effet photoélectrique découvert par **Hertz**[42] en 1887, celle des raies spectroscopiques étudiées dès le premier quart du XIXe siècle par **Fraunhofer**[43] et incompatibles avec l'idée d'énergie continue, et enfin l'infructueuse recherche d'un *éther* sensé être le support des vibrations lumineuses comme l'eau de la mer est celui des vagues, problème lié à celui de l'invariance de la vitesse c de la lumière dans différents référentiels. On sait comment en 1900 **Planck**[44] a apporté une solution au problème du corps noir par sa théorie des quanta d'énergie et comment, en 1905, **Einstein**[45] interpréta l'effet photoélectrique en reprenant l'hypothèse de quantification de Planck, puis, la même année, proposa sa théorie de la relativité restreinte permettant d'expliquer l'invariance de c et de s'affranchir de l'éther[46].

---

[41] Carl Gustav Jacob Jacobi, Potsdam, 1804 − Berlin, 1851.
[42] Heinrich Hertz, Hambourg, 1867 − Bonn, 1894.
[43] Joseph de Fraunhofer, Straubing, 1787 − Munich 1826.
[44] Max Planck, Kiel, 1858 − Gœttingen 1947.
[45] Albert Einstein, Ulm, 1879 − Princeton, 1955.
[46] La mécanique relativiste obéit aussi au principe variationnel de Lagrange-Hamilton : il suffit de modifier l'expression de l'Action de façon adéquate. On reste étonné devant la puissance de ce principe qui a son origine deux siècles et demi auparavant.

En 1924, la conjonction de la relativité et des hypothèses de Planck-Einstein sur les quanta de lumière (en particulier la relation $E = h\nu$ liant l'énergie d'un photon à sa fréquence par la constante de Planck h) amène **de Broglie**[47] à réexaminer les **équations de Fresnel** et de **Hamilton-Jacobi** pour réaliser que si la lumière a deux aspects, ondulatoire et corpusculaire (ce dernier étant une manifestation réductrice du premier), alors il pourrait en être de même pour la matière. Celui que nous voyons, décrit par la mécanique classique dont le formalisme de Lagrange-Hamilton est une des approches possibles[48], n'est lui aussi qu'une réduction de son aspect général, ondulatoire : c'est la théorie de la **mécanique ondulatoire**[49] qui associe à toute particule d'impulsion p une longueur d'onde $\lambda = h/p$ caractérisant son comportement ondulatoire par l'intermédiaire d'une **fonction d'onde** $\psi(\overrightarrow{r}, t)$. En 1926, **Schrödinger**[50] démontre l'équation régissant le mouvement dans cette nouvelle mécanique.

Ainsi de Broglie avait trouvé le lien que Maupertuis avait cherché entre mécanique et optique. Restait à vérifier expérimentalement le caractère ondulatoire de la matière ; c'est ce qu'ont réalisé en 1927-28 **Davisson**[51] et **Germer**[52] aux États-Unis et **Thomson**[53] en Grande-Bretagne, en mettant en évidence la diffraction d'un faisceau d'électrons par un cristal. Fondamentalement, ce sont donc les **principes variationnels** qui ont conduit à l'unification de la mécanique et de l'optique : il n'existait plus désormais qu'un seul principe régissant les comportements dynamiques de la matière et des ondes électromagnétiques. L'aspect à la fois ondulatoire et corpusculaire conduit à la notion de « dualité onde-corpuscule ».

La mécanique ondulatoire devient rapidement mécanique quantique et, abandonnant souvent son origine relativiste[54], a immédiatement d'intéressantes applications comme la chimie quantique. En 1948, dans un remarquable travail, **Feynman**[55] revient sur les idées fondamentales. Comme dans une rétrospective de trois siècles d'efforts, utilisant leurs idées il convie Fermat, Huygens, Maupertuis, Euler, Lagrange, Young, Fresnel, Hamilton au calcul des d'**intégrales de chemin** (*path integrals*) donnant une vision nouvelle du principe variationnel de Lagrange-Hamilton. En prenant pour illustration l'expérience d'interférences des trous d'Young, il montre comment toute fonction d'onde $\psi(\overrightarrow{r}, t)$ d'une particule au point $\overrightarrow{r}$ et au temps t peut se calculer comme la somme de termes attachés chacun à une trajectoire possible de la particule pour arriver en $\overrightarrow{r}$ au temps t, de la même façon que, selon Fresnel, une « vibration » optique en un point $\overrightarrow{r}$ est la somme de vibrations élémentaires correspondant à tous

---

[47] Louis Victor prince de Broglie, Dieppe, 1892 − Paris, 1987.

[48] L'approche purement Newtonienne est encore de nos jours la plus communément utilisée.

[49] « *Er hat eine Ecke des grossen Schleiers gelüftet* » (*Il a soulevé un coin du grand Voile*), écrit en 1924 Albert Einstein à Paul Langevin qui lui avait fait parvenir la thèse de Louis de Broglie sur sa « Mécanique Ondulatoire ». **Louis de Broglie** a soutenu sa thèse en Sorbonne le 25 novembre 1924.

[50] Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, Erdberg, 1887 − Vienne, 1961.

[51] Clinton Joseph Davisson, Bloomington (Illinois), 1881 − Charlottesville (Virginie), 1958.

[52] Lester Germer, Chicago, 1896 − Millington (New Jersey), 1971.

[53] Sir George Paget Thomson, Cambridge, 1892 − Cambridge, 1975.

[54] Dans l'émergence de la mécanique ondulatoire, la relativité a été un élément essentiel que Louis de Broglie brandira pour contredire les tenants de l'interprétation probabiliste de l'École de Copenhague. Actuellement, pourtant, c'est cette interprétation qui prévaut, et on fait une distinction entre mécanique quantique non relativiste et mécanique quantique relativiste ou théorie quantique des champs.

[55] Richard Phillips Feynman, New York, 1918 − Los Angeles, 1988.

les chemins que la lumière a pu parcourir pour arriver là ; on reconnait ici l'idée de **Huygens**. En fin de compte, la probabilité de trouver la particule en $\overrightarrow{r}$ au temps t est le carré du module de $\psi(\overrightarrow{r},t)$: $|\psi(\overrightarrow{r},t)|^2$. Dans cette présentation la forme des vibrations élémentaires (ou *termes de chemin*) constitutives de l'onde finale est $\mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(\overrightarrow{r},t)\right\}$, où $S(\overrightarrow{r},t)$ est simplement l'Action classique. Ce calcul est fait dans un esprit « ondulatoire », il ne faut donc pas s'étonner de le voir correctement décrire des phénomènes typiquement quantiques comme les interférences d'électrons ; mais ce qui est remarquable, c'est que si l'on considère un phénomène classique pour lequel toute Action est très grande devant $\hbar$, alors Feynman montre que seule la trajectoire correspondant à une Action stationnaire (minimum par exemple) contribuera à $\psi(\overrightarrow{r},t)$ de façon significative, au sens des probabilités.

L'unification de l'optique et de la mécanique, la justification des principes de Fermat et de Hamilton ont un prix : l'intervention des probabilités. Les phénomènes mécaniques classiques observés sont tels parce que la probabilité qu'ils se produisent est énorme[56]. Ainsi les principes d'optimisation vieux comme la pensée humaine trouvent leur justification dans les probabilités. Du XVIIe au XIXe siècle, on a attaché une importance fondamentale à la « méthode des variations » hissée au rang de « principe », alors que les probabilités n'avaient qu'un rôle utilitaire[57]. De nos jours les conceptions sont inversées.

1.4. Conclusion

Cette introduction a pour but de permettre au lecteur de situer dans le temps les différentes notions introduites tout au long de cet ouvrage. La fin (provisoire) de cette histoire peut paraître décevante eu égard aux méthodes et **principes variationnels** ; mais il ne faut pas perdre de vue leur importance pratique et théorique. Il ne faut pas oublier que tout cours de **théorie quantique des champs** débute immanquablement par un chapitre lagrangien et que le **principe de Fermat** est de nos jours l'unique moyen pour les industriels de calculer sur ordinateur la configuration des optiques compliquées, comme l'objectif grand angle de votre appareil photographique. Ce principe, à l'origine des idées de **Maupertuis**, **Euler**, **Lagrange** et **Hamilton** pour le **principe de moindre Action** qui, lui-même, a inspiré **Louis de Broglie** pour sa **mécanique ondulatoire**, a finalement trouvé sa place grâce à **Feynman** dans le cadre général de la **mécanique quantique**. **Galilée** a touché un coin du voile en s'intéressant au problème qui n'était pas encore le **brachistochrone**, mais il semblerait juste de dire que c'est **Fermat** qui a commencé à le soulever.

---

[56] La même idée existe en thermodynamique classique, mais dans ce cas à cause du très grand nombre de particules constituant un objet macroscopique (le nombre d'Avogadro) ; il n'y a alors rien de quantique : c'est la **loi des grands nombres** (Féménias, 2003).

[57] **Laplace**, qui a tant contribué à la théorie des probabilités, n'a jamais caché qu'il n'utilisait cet outil que contraint et forcé par la limitation des moyens de calcul de son époque. Il a toujours considéré cette branche des sciences comme très inférieure aux mathématiques et à la physique. Paradoxalement, à l'époque du calcul électronique les probabilités sont devenues la base même des théories physiques.

Pour conclure, je lui laisse dire ce qu'il pensait de son hypothèse de *moindre-temps*[58] :

« *Je crois avoir souvent dit à Monsieur de la Chambre et à vous-même que je ne prétends pas, et n'ai jamais prétendu être dans l'intime confidence de la Nature. Elle a des voies obscures et cachées que je n'ai jamais entrepris de pénétrer. Je voudrais seulement lui avoir offert une petite aide géométrique au sujet de la réfraction, si tant est qu'elle en eût besoin. Mais puisque vous m'assurez, Monsieur, qu'elle peut mener ses affaires sans icelle, et qu'elle se satisfait de suivre la voie qui lui a été prescrite par Monsieur Descartes, je vous abandonne volontiers ma prétendue conquête de la physique ; et je serais satisfait que vous me permettiez de conserver mon problème de géométrie – pur et* « in abstracto »*, grâce auquel l'on peut trouver le chemin d'un objet se déplaçant à travers deux milieux différents et tentant d'effectuer son mouvement le plus rapidement possible* ».

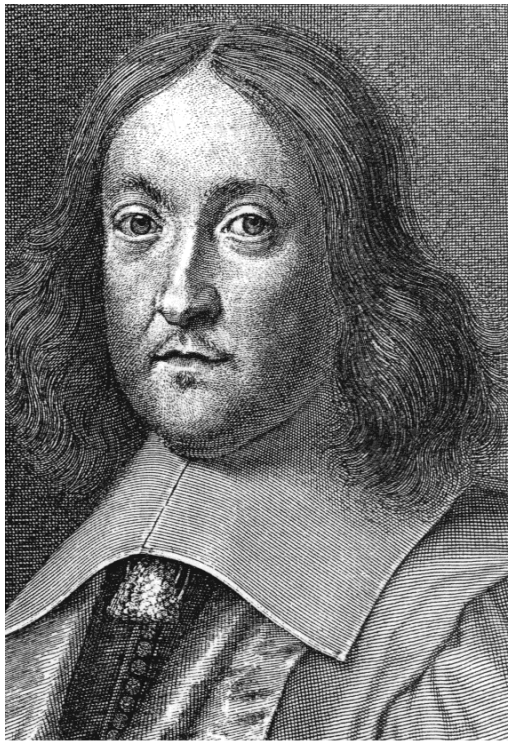

FIGURE 1.5 : Pierre de Fermat (Beaumont de Lomagne, 1601 – Castres, 1665).
Avec l'autorisation de la Mairie de Beaumont de Lomagne (Tarn et Garonne, France).

[58] Réponse du 21 mai 1662, en pleine querelle, à M. Clerselier, partisan de **Descartes**.

Chapitre 2

Équation d'Euler-Lagrange

L'essentiel est dans ce chapitre, particulièrement dans les sections 2.1 *et* 2.2. *L'équation d'Euler-Lagrange est démontrée dans l'esprit de Lagrange, par* variations *(1755). Cela fait, il ne s'agira plus jusqu'au chapitre 6 que de notes, généralisations et applications. La compréhension de ces sections est donc essentielle. La notion de dérivée fonctionnelle exposée en fin de chapitre, plus puissante, n'est pas indispensable dans les chapitres suivants.*

2.1. Variation d'une fonctionnelle

2.1.1. Le cadre de la démonstration

La condition que doit vérifier $u(x)$ pour rendre $J[u] = \int_{x=x_A}^{x_B} F\left[u(x), u'(x), x\right] \mathrm{d}x$ extrémale sera déterminée par le fait qu'en un extremum une petite variation $\delta u(x)$ de $u(x)$ n'entraîne pas de variation de J au premier ordre. Raisonnons sur la figure 2.1 où sont représentés différents chemins, (γ_1), (γ_2), (γ_3), (γ_4), associés à différentes fonctions $u(x)$, permettant d'aller du point fixe A au point fixe B.

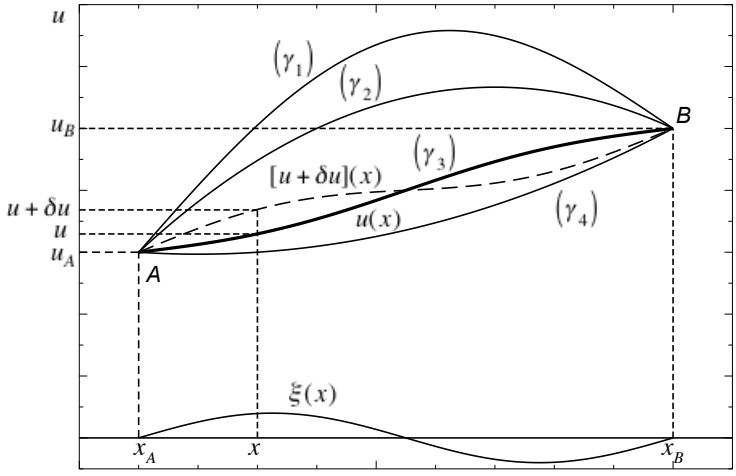

FIGURE 2.1 : Chemins (γ_1), (γ_2), (γ_3), (γ_4) pour aller du point fixe A au point fixe B.

Supposons que le chemin (γ_3) tracé en gras et associé à la fonction $u(x)$, soit **stationnaire** ; ceci signifie que si l'on choisit un chemin infiniment voisin associé à $[u+\delta u](x)$ (en tirets), la variation δJ de la fonctionnelle sera nulle au premier ordre. Ce raisonnement est analogue à celui fait pour une fonction $f(x)$ habituelle : en un point

stationnaire la dérivée de $f(x)$ s'annule, donc $\mathrm{d}f = 0$, $\mathrm{d}f$ représentant la variation au premier ordre de la fonction f.

La variation δu est une variation de fonction, c'est donc aussi une fonction. On peut représenter δu par $\epsilon\xi$, le facteur ϵ étant là pour rappeler qu'il s'agit d'une petite variation et $\xi(x)$ étant une fonction *quelconque* de x (ce sera important dans la suite). Sur la figure 2.1 on a représenté au bas du graphe la fonction $\xi(x)$ (pas nécessairement petite) associée à $\delta u(x)$. Pour chaque valeur de x, il y a une variation $\delta u(x)$ (sur la figure on note une valeur de x pour laquelle il n'y a pas de variation de $u(x)$, la fonction $\xi(x)$ − donc $\delta u(x)$ − s'annulant pour cette valeur). Compte tenu de l'infinité des choix de ξ dans l'espace des fonctions, les possibilités de variation de u sont infinies ; le facteur ϵ fixe ensuite l'amplitude de la variation. La situation est donc très différente de celle de la variation d'une fonction $f(x)$ où on n'a guère que le choix du signe de $\mathrm{d}x$ et de son amplitude ! Notons toutefois que dans le **problème variationnel à points extrêmes fixés**, le choix de ξ est limité aux fonctions s'annulant aux extrémités du domaine ; ceci est représenté sur la figure 2.1 : quel que soit le chemin suivi, celui-ci devra passer en A et en B, d'où les conditions supplémentaires :

$$\delta u(x_A) = 0 \quad \text{et} \quad \delta u(x_B) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \xi(x_A) = 0 \quad \text{et} \quad \xi(x_B) = 0 \tag{2.1.1}$$

Pour bien comprendre la suite, noter que chaque variation de $u(x)$ à $u(x) + \delta u(x)$ se fait à x fixé (*verticalement* sur la figure 2.1) : x ne varie pas, seule u, variable de J, varie.

2.1.2. Variation de la fonctionnelle $J[u]$

Calculons la fonctionnelle J lorsque u est modifiée en $u + \delta u$: c'est l'analogue du calcul de $f(x + \mathrm{d}x) = f(x) + \mathrm{d}f$ pour les fonctions, et par analogie on notera $J[u + \delta u] = J[u] + \delta J$:

$$J[u + \delta u] = J[u] + \delta J = \int_{x=x_A}^{x_B} F\left[u(x) + \delta u(x), u'(x) + \delta u'(x), x\right] \, \mathrm{d}x \tag{2.1.2}$$

La nouvelle dérivée est $[u(x) + \delta u(x)]' = u'(x) + [\delta u(x)]'$; la variation de la dérivée (notée $\delta u'(x)$ dans (2.1.2)) est donc $[\delta u(x)]'$, dérivée de la variation. Développons cette expression au premier ordre par rapport aux deux arguments de F qui ont varié, $u(x)$ et $u'(x)$) :

$$J[u] + \delta J = \int_{x=x_A}^{x_B} \left[F\left(u, u', x\right) + \delta u \frac{\partial F}{\partial u} + \delta u' \frac{\partial F}{\partial u'}\right] \, \mathrm{d}x \tag{2.1.3}$$

Le terme d'ordre zéro $F(u, u', x)\,\mathrm{d}x$ donne $J[u]$ de la même façon qu'apparaît d'abord $f(x)$ dans $f(x+\mathrm{d}x) = f(x) + f'(x)\,\mathrm{d}x$; la variation δJ est donc issue des deux autres termes. On note que le 3e terme est proportionnel à $\delta u'$ et non à δu ; par analogie avec $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$, il est nécessaire de se ramener à une expression de δJ proportionnelle à δu. C'est la première difficulté de la démonstration ; la solution est une intégration par parties :

$$\int_{x=x_A}^{x_B} \delta u' \frac{\partial F}{\partial u'} \, \mathrm{d}x = \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_A}^{x=x_B} - \int_{x=x_A}^{x_B} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) \delta u \, \mathrm{d}x \tag{2.1.4}$$

Il faut bien comprendre ces notations ; jusqu'à présent, nous avons traité F comme une fonction de 3 variables : u, u' et x ; F pouvait donc avoir des dérivées partielles par rapport à chacune d'elles. Mais dans l'intégration du premier membre de (2.1.4), F doit être considérée comme une fonction de x seul, en tenant compte du fait que x apparaît aussi dans $u(x)$ et dans $u'(x)$.[59] La dérivée utilisée dans l'intégration par parties doit donc être comprise comme une dérivée totale par rapport à x, c'est-à-dire une dérivée dans laquelle on doit tenir compte de tous les x, explicites ou cachés dans u et u'. Finalement la variation δJ s'écrit :

$$\delta J = \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_A}^{x=x_B} + \int_{x=x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right] \delta u \ \mathrm{d}x \tag{2.1.5}$$

2.2. Résolution dans le cas des points extrêmes fixés

2.2.1. Équation d'Euler-Lagrange

Dans le **problème à points extrêmes fixés**, δu s'annule en x_A et en x_B ; le terme tout intégré de (2.1.5) ne contenant que deux termes $\delta u \frac{\partial F}{\partial u'}$ calculés justement en ces points est donc nul. En ce qui concerne l'intégrale, elle doit s'annuler *quelque soit la variation* δu parmi l'infinité des possibilités dont on dispose ; la seule solution possible est donc l'annulation du terme entre crochets de l'intégrant. Bien comprendre ce raisonnement est la seconde difficulté de la démonstration.[60] Finalement, l'équation que doit vérifier $u(x)$ entre x_A et x_B est :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0 \tag{2.2.1}$$

C'est l'**équation d'Euler-Lagrange**. Dans le cas des points extrêmes $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ fixés, elle est complétée par les **conditions aux limites** :

$$\delta u(x_A) = \delta u(x_B) = 0 \qquad \text{ou} \qquad u(x_A) = y_A \ \text{ et } \ u(x_B) = y_B \tag{2.2.2}$$

2.2.2. Remarques et cas particuliers

2.2.2.1. Erreurs à éviter

Si l'on n'a pas bien assimilé l'équation d'Euler, on peut hésiter sur certains détails. Un argument dimensionnel évite de faire des erreurs inexcusables pour un physicien : la dimension du premier terme $\frac{\partial F}{\partial u}$ est $[F][u]^{-1}$; celle du second doit être la même :

---

[59] En toute rigueur, il faudrait donner un autre nom à cette fonction. On écrirait les choses ainsi : pour l'intégration par parties, poser $\frac{\partial F(u,u',x)}{\partial u'} = G(x)$ puis $\mathrm{d}U = \delta u' \ \mathrm{d}x$ (d'où $U = \delta u$) et $V = G(x)$ (d'où $\mathrm{d}V = G'(x) \ \mathrm{d}x$). Dans $G'(x)$ on reconnaît $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)$.

[60] Raisonnons par l'absurde : si le terme entre crochets de l'intégrant n'est pas nul dans un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [x_A, x_B]$, il suffit de choisir une variation δu non nulle dans $[\alpha, \beta]$ et de signe adapté à celui du crochet (ce qui est loisible compte tenu de l'arbitraire sur δu) pour que l'intégrale de (2.1.5) ne s'annule pas. La seule possibilité d'annulation pour tout δu est donc l'annulation du crochet lui-même.

$[u'] = \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] = [u][x]^{-1}$, donc $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right] = [x]^{-1} \times [F] \times \left(\frac{[u]}{[x]}\right)^{-1} = [F][u]^{-1}$.

Ceci permet d'éviter des non-sens comme $\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0$. Ce moyen mnémotechnique ne met évidemment pas à l'abri d'erreurs comme $\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0$.

2.2.2.2. L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle

Toutefois son caractère différentiel ne provient pas de la présence des dérivées $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)$, mais de celle de $u'(x)$ dans F ; en effet :

• **Cas particulier n°1**
Si F ne dépend que de $u(x)$ et de x et non des dérivées de $u(x)$, la dérivée partielle de $F(u(x), x)$ par rapport à u sera une fonction $\Phi(u(x), x)$ et le terme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)$ sera nul puisque $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$. L'équation d'Euler-Lagrange devient donc $\Phi(u(x), x) = 0$, simple équation.

PROBLÈME VARIATIONNEL À POINTS EXTRÊMES FIXÉS

• Pour une fonctionnelle de la forme

$$J[u] = \int_{x=x_A}^{x_B} F\left[u(x), u'(x), x\right] \mathrm{d}x$$

• Conditions aux limites en A et B :

$$u(x_A) = y_A \qquad \text{et} \qquad u(x_B) = y_B$$

• Conditions dans l'intervalle $[x_A, x_B]$:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0$$

« *Équation d'Euler-Lagrange* »

□ Exercice 2.1 : Caractère différentiel de l'équation d'Euler
Montrer que si l'intégrant F de la fonctionnelle ne dépend que de $u(x)$, $u'(x)$ et x, l'équation d'Euler est une équation différentielle du second ordre en $u(x)$.