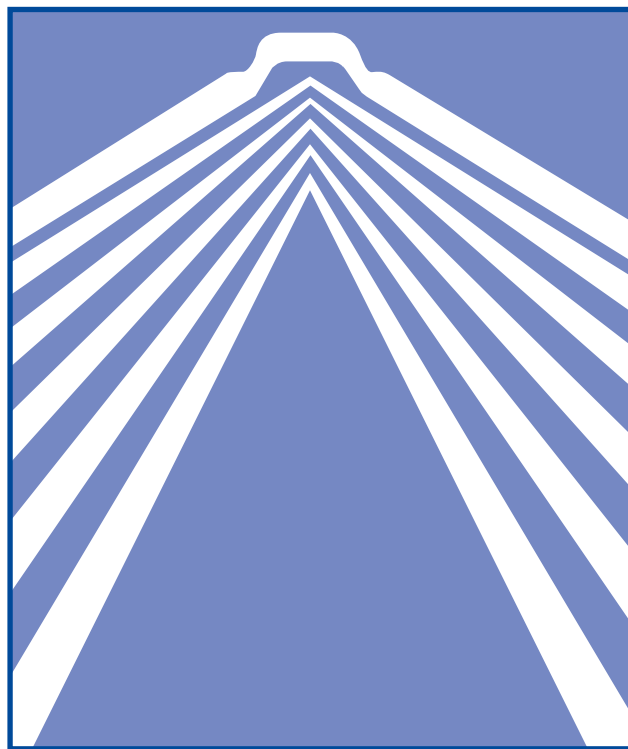


ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA

Teoría, aplicaciones y 100 problemas resueltos



Juan Matías Sepulcre Martínez

PIRÁMIDE

ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA

Teoría, aplicaciones y 100 problemas resueltos

JUAN MATÍAS SEPULCRE MARTÍNEZ

PROFESOR TITULAR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Y SECRETARIO DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA

Teoría, aplicaciones y 100 problemas resueltos

EDICIONES PIRÁMIDE

Edición en versión digital: septiembre, 2025

Está prohibida la reproducción total o parcial de este libro electrónico, su transmisión, su descarga, su descompilación, su tratamiento informático, su almacenamiento o introducción en cualquier sistema de repositorio y recuperación, en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, conocido o por inventar, sin el permiso expreso escrito de los titulares del copyright.

© Juan Matías Sepulcre Martínez, 2025

© Primera edición electrónica publicada por Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.), 2025

Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es

Valentín Beato, 21. 28037 Madrid

Teléfono: 91 393 89 89

www.edicionespiramide.es

ISBN digital: 978-84-368-5079-6

Índice general

Introducción	9
Notación	15
1 El cuerpo de los números complejos. Funciones complejas elementales	23
1.1 Primeras nociones	23
1.2 Conjugado, módulo y argumento	26
1.3 Continuidad y holomorfía de funciones complejas de variable compleja .	32
1.4 Algunas funciones elementales	44
1.4.1 Función exponencial	45
1.4.2 Funciones logarítmicas	47
1.4.3 Funciones potencia	49
1.4.4 Funciones trigonométricas e hiperbólicas	52
1.5 Problemas	54
2 Integración compleja	63
2.1 Preliminares topológicos	64
2.2 Integración sobre caminos. Primeros resultados	66
2.3 Teoremas de Cauchy para determinados tipos de regiones	78
2.4 Fórmula integral de Cauchy para el círculo	84
2.5 Holomorfía de las derivadas	87
2.6 Teoría general de Cauchy	91
2.6.1 Índice de un punto respecto de un camino cerrado	84
2.6.2 Teorema global de Cauchy	88
2.6.3 Consideraciones finales alrededor del teorema global de Cauchy .	91
2.7 Aplicaciones de la teoría de Cauchy	107
2.7.1 Teorema de Morera. Principio de reflexión de Schwarz	107
2.7.2 Teorema de Liouville. Teorema fundamental del álgebra	110
2.7.3 Principio del módulo máximo. Lema de Schwarz	114
2.7.4 Fórmula integral de Poisson	121

2.8 Problemas	126
3 Series de potencias	133
3.1 Convergencia de series	133
3.2 Series de Taylor	139
3.3 Principio de prolongación analítica	147
3.4 Series de Laurent	151
3.5 Problemas	163
4 Teoría de residuos	167
4.1 El teorema de los residuos	167
4.2 Aplicaciones al cálculo de integrales de funciones de variable real	174
4.3 Consecuencias del teorema de los residuos	202
4.3.1 Teorema de Rouché y sus consecuencias	202
4.3.2 Teoremas de la aplicación abierta e inversa. Transformaciones conformes	207
4.4 Problemas	215
5 Funciones enteras y productos infinitos	221
5.1 Productos infinitos	221
5.2 Productos de Weierstrass	227
5.3 Orden de crecimiento	240
5.4 Las funciones gamma de Euler y zeta de Riemann	252
5.5 Problemas	258
Soluciones de los problemas	263
Apéndices	285
A Representación gráfica de funciones complejas de variable compleja	285
A.1 Primeros enfoques para la visualización de funciones complejas	285
A.2 Método de coloreado del dominio	286
A.3 Superficies de Riemann	296
B La esfera de Riemann	301
C La esfera de Bloch en la computación cuántica	305
Índice alfabético	311
Índice de figuras	317
Bibliografía	321

Introducción

Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe, Jacques Hadamard (1865-1963)

Los números complejos fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre los miembros de la comunidad científica. Tras su aparición en escena, fueron inicialmente considerados como *números imposibles*, tolerados únicamente en un limitado dominio algebraico por su utilidad para resolver ecuaciones cúbicas. En este sentido, los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones, con cierta seriedad, en los trabajos de Girolamo Cardano (1501-1576) y Rafael Bombelli (1526-1572), relacionados precisamente con el cálculo de las raíces de la ecuación de tercer grado. Así, desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII estos números fueron usados con cierto recelo y desconfianza, hasta el punto que, cuando aparecían en la resolución de un problema, con bastante frecuencia se interpretaba que tal problema no presentaba solución, ya que resultaba difícil concebir cualquier realidad física que correspondiese con ellos.

Además del adjetivo *imposibles* ampliamente usado por diversos autores, otros términos utilizados en la época anterior a su aceptación para describir o referirse a los números complejos fueron *sofisticados*, *sin sentido*, *inexplicables* o *incomprensibles*, descripciones utilizadas respectivamente por autores tan conocidos como Cardano, Neper, Girard o Huygens. En relación a esta misma incomprensión e incredulidad, podemos también destacar las siguientes frases traducidas de sus lenguas originales:

A pesar de que podamos pensar que la ecuación $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tiene tres raíces, únicamente una de ellas es real, la cual es 2, y las otras dos... son simplemente imaginarias (R. Descartes, 1637 [16, pág. 47]).

Los números imaginarios son un excelente y maravilloso refugio del espíritu santo, una especie de anfibio entre el ser y el no ser (G. W. Leibniz, 1702 [20, pág. 56]).

Estos números no son nada, ni menos que nada, la cual cosa necesariamente los hace imaginarios o imposibles (L. Euler, 1730 [26, pág. 163]).

La resolución de la paradoja de $\sqrt{-1}$ fue muy poderosa, inesperada y bella, por lo que únicamente la palabra milagro parece adecuada para describirla (J. Stillwell, 1989 [45, pág. 188]).

Debido también a la creciente evidencia de su utilidad, la percepción de este nuevo conjunto numérico fue cambiando poco a poco, y con el tiempo los números complejos acabaron por ser comúnmente aceptados. Sin embargo, es importante mencionar que no fueron bien comprendidos o reconocidos hasta épocas relativamente recientes en las que se interpretaron geoméricamente (véase por ejemplo [12, Capítulo 1], donde se muestra una breve historia del nacimiento de los números complejos).

Una vez superado este proceso de aceptación, la variable compleja rápidamente alcanzó un gran éxito a lo largo del siglo XIX. Los esfuerzos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) o Bernhard Riemann (1826-1866), junto con Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que influyó enormemente en el proceso de aceptación de los números complejos, llevaron a estos cuatro autores a ser considerados por muchos historiadores de la ciencia como los fundadores de la teoría moderna de funciones de variable compleja.

Basándose en el trabajo sobre la teoría de funciones de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), fue Cauchy quien comenzó el estudio riguroso de la teoría de funciones de variable compleja, por lo que no es de extrañar que sea un verdadero protagonista de muchos de los resultados expuestos en este manual. De forma independiente, conviene hacer notar que Riemann desarrolló sus planteamientos, también en esta área, dentro de un marco fuertemente intuitivo y geométrico, lo que se enmarca en el llamado *método de descubrimiento* [39]. Asimismo, Weierstrass contribuyó en particular en el campo de la variable compleja a través de un enfoque marcado en el programa de *aritmétización del análisis* que se dio en el siglo XIX, por lo que su trabajo se caracterizó por la presentación rigurosa y el cuidadoso desarrollo de su teoría, independiente de toda referencia a la intuición geométrica [40].

La potencia de los resultados de la teoría de funciones de variable compleja es tremendamente elevada. Tal teoría se ve además ensalzada por la belleza de sus demostraciones y por la precisión con la que encajan todas y cada una de sus partes esenciales. La frase de Jacques Hadamard insertada al inicio de la introducción, que se podría interpretar como que el camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa con frecuencia por el análisis complejo, también nos da una idea de la potencia de la teoría que trataremos en este manual.

A partir de la preceptiva introducción del cuerpo de los números complejos, el objetivo principal de este manual es que el lector comprenda e interiorice los elementos básicos de la teoría de funciones de una variable compleja, y en particular que le proporcione un primer y sólido contacto con la derivación e integración complejas, que, junto a las técnicas de series de potencias y productos infinitos, constituyen unas herramientas muy eficaces para el tratamiento de muchos problemas tanto de índole matemática (en sus distintas ramas) como del campo de la física y las ingenierías.

A raíz de ello, estas páginas incluyen también aplicaciones del análisis de la variable compleja a otras áreas y campos de conocimiento como la física. De hecho, el índice terminológico recoge un apartado exclusivo sobre aplicaciones a la física para localizar rápidamente las páginas en las que se ha insertado algún resultado o comentario específico encuadrado en esta temática. Cabe comentar que, en este terreno, en los años 1960 algunos importantes autores consideraron la aparición de los números complejos como el último descubrimiento más importante para el campo de la física (véase por ejemplo [24, pág. 90]).

Como ya se señaló anteriormente, los números complejos no fueron comúnmente aceptados hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos tampoco fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII. Precisamente, un enfoque intuitivo para visualizar los números negativos se realizó con la ayuda de la recta real. Si consideramos los números reales como vectores dotados de magnitud (su valor absoluto) y sentido (dependiendo del signo), entonces las operaciones básicas de la aritmética son fácilmente imaginables. En particular, la multiplicación de un número complejo por el número negativo -1 desemboca en un cambio de sentido en el vector representante de tal número complejo.

Para el siguiente razonamiento, inspirado en [46], tomemos por convenio que los números positivos son los que apuntan hacia el norte y los negativos los que miran al sur. Mientras que únicamente en la recta real nos podemos mover hacia el norte o hacia el sur (a través del -1), de forma más general la multiplicación por la unidad imaginaria i , símbolo introducido en la literatura por Leonhard Euler (1707-1783) para manejar $\sqrt{-1}$ (en el sentido $i^2 = -1$), nos proporciona otras posibilidades. En efecto, si estamos mirando hacia el norte, la multiplicación por i nos repercute en un giro de izquierdas hacia el oeste. Una nueva multiplicación por i nos lleva ahora hacia el sur, cuya unidad es -1 . De esta manera, $i \cdot i = -1$, lo que nos proporciona en efecto una definición plausible de la unidad imaginaria i . Continuando con este proceso, si multiplicásemos de nuevo por i llegaríamos a la unidad del este, es decir, $i^3 = -i$, y una nueva multiplicación por i nos devolvería al norte, $i^4 = 1$. En definitiva, con la introducción de la unidad imaginaria hemos pasado de la dicotomía sur-norte de la recta real al descubrimiento de los otros dos puntos cardinales este-oeste. Esto podría ser generalizado aún más estableciendo otras direcciones en nuestra particular brújula.

Al respecto también de la unidad imaginaria, su presencia en el terreno de la física se hace notar por ejemplo en la importante ecuación de Schrödinger para describir la evolución temporal de una partícula subatómica masiva de naturaleza ondulatoria y no relativista.

Respecto a la estructura de este manual, la parte principal está dividida en cinco capítulos que incluyen todos los contenidos esenciales o importantes en una primera asignatura universitaria vinculada al estudio de la variable compleja. Por tanto, el manual puede ser utilizado para el estudio y práctica de las nociones y resultados

vinculados a la variable compleja que podemos encontrar actualmente en asignaturas del Grado en Matemáticas, Grado en Física, doble grado en Física y Matemáticas, otros dobles grados vinculados con las matemáticas y la física, y otros grados universitarios de la rama de ingeniería. Los contenidos propios de análisis matemático (en particular, todo lo vinculado al estudio de funciones de una y varias variables reales) y los rudimentos de álgebra y geometría lineal que se estudian con anterioridad constituyen el punto de partida para afrontar correctamente el estudio de la variable compleja.

Tras esta introducción, y también como antesala de los cinco capítulos teóricos centrales (que comienzan con una motivación inicial), se ha incluido un apartado referente a la notación principal, en forma de recuadros con título y explicación de la misma, que se utilizará a lo largo de todo el texto. La mayor parte de la notación empleada es la usual en la mayoría de los manuales de variable compleja.

En el capítulo 1 se introduce, por una parte, las definiciones, operaciones y resultados básicos en torno al cuerpo de los números complejos y, por otra parte, las nociones y propiedades básicas relativas a la derivación compleja, introduciendo en particular las funciones holomorfas (también llamadas o identificadas como analíticas o regulares). Este desarrollo desemboca finalmente en el estudio sistemático de algunas de las principales funciones elementales, como los casos de las funciones exponencial, logarítmicas, potencias, trigonométricas e hiperbólicas.

En el capítulo 2 se realiza un tratamiento sistemático de la integración compleja en el que se presentan las versiones local y global de la teoría integral de Cauchy, estableciendo previamente los necesarios preliminares topológicos, junto con las nociones y resultados iniciales de la integración sobre caminos. De esta forma, a partir de las distintas formulaciones de los llamados teoremas de Cauchy, se analizarán las condiciones sobre el camino, la función y el dominio con tal de poder asegurar la existencia de primitiva de una función o, equivalentemente, que la integral de esa función sobre cualquier curva cerrada contenida en un dominio sea igual a 0. En particular, prestaremos atención a las versiones homológica y homotópica del teorema de Cauchy. Finalmente, en este capítulo aparecen también resultados de aplicación tan interesantes y relevantes como el principio de reflexión de Schwarz, el teorema de Liouville, el teorema fundamental del álgebra, el principio del módulo máximo, el lema de Schwarz o la fórmula integral de Poisson.

Una vez introducidas las nociones y resultados básicos de la convergencia (en sus distintas versiones) de series de números complejos, en el capítulo 3 se estudia el teorema de Taylor en el caso complejo y su recíproco, que nos conduce a identificar las funciones holomorfas como aquellas representables localmente en series de potencias. Posteriormente se abordan los principios de identidad y de prolongación analítica, resultados muy relevantes y bastante sorprendentes si los enfocáramos desde el punto de vista del análisis de una variable real. Finalmente, el estudio de las series de Laurent nos ayuda a comprender y analizar el comportamiento de las funciones holomorfas (o

analíticas) en todo el plano complejo, excepto en algunos puntos llamados singularidades. En este sentido, el teorema de clasificación de singularidades nos identifica, a través del análisis del límite de la función, los distintos casos de singularidades aisladas que se pueden producir.

Otra de las herramientas más potentes y misteriosas del análisis complejo está ligada al cálculo de residuos derivado de la teoría de Cauchy, lo que se trata en el capítulo 4. El importante teorema de los residuos nos proporciona una gran cantidad de aplicaciones y consecuencias de gran alcance. Podemos destacar especialmente su utilización en el cálculo de integrales reales, en particular y de forma muy recurrente en las integrales impropias $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ de una función continua sobre los números reales. Otras consecuencias que se estudiarán en este capítulo son el principio del argumento y el teorema de Rouché, que resultan muy apropiados para poder afrontar el cálculo del número de ceros de una función en una determinada región, y los teoremas de la aplicación abierta e inversa, que nos ayudan a explorar de forma más intensa las propiedades de las funciones analíticas.

El capítulo 5 tiene por objetivo la consecución de representaciones en forma de productos de las funciones enteras o analíticas en todo el plano complejo. Los teoremas de factorización de Weierstrass y de Hadamard, con los productos de Weierstrass, el exponente de convergencia y el orden de crecimiento como hilos conductores, son las piezas fundamentales de este capítulo.

Al final de cada uno de los capítulos aparece un buen listado de ejercicios o problemas de carácter teórico-práctico en los que se establecen las bases para la manipulación correcta de las nociones y resultados básicos previamente introducidos. Su resolución está expuesta en un capítulo final dedicado exclusivamente a mostrar las soluciones de los 100 problemas enunciados a lo largo de estos cinco capítulos.

Tras las definiciones, comentarios y resultados iniciales, muchos de ellos enunciados en forma de lemas, la mayor parte de los resultados básicos de cada capítulo se enuncian como proposiciones o teoremas, seguidos por ejemplos ilustrativos y consecuencias en forma de corolarios. La práctica totalidad de los resultados importantes llevan asociados una etiqueta (a modo de título) que los identifica claramente y los hace más visibles para localizar resultados anteriores. Además, algunas notas, observaciones y gráficos ilustrativos sobre las nociones y resultados mostrados pueden resultar particularmente interesantes para el lector.

Cabe comentar que el índice alfabético que se muestra al final del manual puede ayudar al lector a localizar rápidamente cualquier término o resultado que aparezca a lo largo del texto. Igualmente, el índice de figuras (52 en total) muestra las páginas en las que el lector puede localizar los gráficos de elaboración propia insertados por el autor.

Además, se han añadido tres apéndices: el primero de ellos contiene una visión gráfica muy atractiva sobre la forma de enfocar la representación compleja de las funciones

complejas de variable compleja y las correspondencias multivaluadas que aparecen de forma natural en este contexto de trabajo; el segundo versa sobre la esfera de Riemann, a modo de representación geométrica de los números complejos extendidos (incluyendo el punto del infinito); finalmente, el tercero trata sobre la llamada esfera de Bloch, cuyos puntos pueden ser interpretados como los posibles estados cuánticos de un qubit, que es la unidad de información básica en el modelo de computación cuántica.

Existen numerosas publicaciones espléndidas, y recursos de distinta índole, sobre la variable compleja, cuya lectura y análisis es también recomendada por el autor del libro. En el apartado de bibliografía, al final del libro, se proporciona una lista sobre algunos de estos manuales que, junto con la labor didáctica realizada por los profesores de variable compleja con los que el autor ha tenido contacto en su carrera universitaria, han servido además de inspiración de este manual. En realidad, esta publicación surge como fruto de la experiencia del autor como profesor e investigador en esta materia a lo largo de varios cursos académicos, en los que ha tratado de transmitir conocimientos a sus estudiantes de la mejor manera posible. Con el paso del tiempo el autor ha ido mejorando el texto, gracias por ejemplo a la inserción de ciertos detalles incluidos en los razonamientos necesarios para afrontar las demostraciones. De hecho, la elección de gráficos, ejemplos, observaciones y notas concretas incluidas en cada apartado teórico ha sido realizada precisamente para que el estudiante no pierda el hilo de las explicaciones y sea consciente de más detalles ligados a los resultados tratados, procurando disminuir los posibles problemas de comprensión.

Además, los ejercicios y problemas de cada capítulo están elegidos para que su resolución constituya un avance en el aprendizaje de los contenidos propios de cada uno de ellos y, al mismo tiempo, permita disponer de una colección adecuada para la práctica del estudiante. En particular, uno de los problemas de cada capítulo incluye varias cuestiones de verdadero/falso para razonar y justificar la respuesta en base a los resultados teóricos del propio capítulo (y también como continuación de los capítulos anteriores).

Cabe comentar que algunos contenidos concretos expuestos en este libro, como el caso de los resultados vinculados con los productos infinitos o con los apéndices, no suelen aparecer en muchos manuales de características similares, a pesar de que son temas de trabajo que se complementan muy bien con los capítulos anteriores. A este respecto, algunos másteres universitarios vinculados con las matemáticas y la física también podrían utilizar este manual a modo de complemento de partida para algunas explicaciones concretas relacionadas con esta temática.

Al autor le gustaría dedicar el libro a su madre, por ser un auténtico ejemplo de entrega y dedicación a su familia. ¡Va por ti, mamá!

Notación

A lo largo del texto se empleará generalmente la notación que resumimos en los siguientes recuadros y que corresponde a la simbología usual de la mayoría de textos sobre la materia. Además de la propia notación en torno al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, en estos recuadros aparece también la definición y/o expresión que da lugar al concepto en cuestión (que por supuesto será también definido en el correspondiente apartado del manual).

Parte real e imaginaria de un número complejo

Si $z = x + iy$, entonces $\operatorname{Re} z = x$ y $\operatorname{Im} z = y$.

Parte real e imaginaria de una función compleja

Si $z = x + iy$, cada función $f : U \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ tiene asociada una componente real y otra imaginaria que son funciones reales de x e y (con $x + iy \in U$), y que denotaremos respectivamente por $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ y $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$.

Representaciones de un número complejo

- $z = (x, y)$ (notación en coordenadas cartesianas).
- $z = x + iy$ (notación binómica).
- $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ (notación en forma trigonométrica).
- $z = r_{\theta}$ (notación en forma polar).
- $z = re^{i\theta}$ (notación en forma exponencial).

$\mathbb{C}$ ampliado

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Semiplano superior e inferior

La siguiente notación también se utilizará:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}.$$

$$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}.$$

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}.$$

$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}.$$

Conjugado de un número complejo

Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{x + iy} = x - iy$.

Módulo de un número complejo

Si $z = x + iy$, entonces $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Argumento(s) de un número complejo

Un argumento de un número complejo $z \neq 0$ viene dado por el cálculo del ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la semirrecta de origen 0 conteniendo el afijo de z . Se expresa normalmente en radianes y el conjunto de todos los posibles valores (incluyendo las vueltas de 2π) se representará por

$$\arg z.$$

Eligiendo $\arg z$ de manera que sea $-\pi < \arg z \leq \pi$ se obtiene el valor principal del argumento que se denotará normalmente por

$$\text{Arg } z.$$

Inverso de un número complejo

Si $z \neq 0$ es un número complejo, entonces su inverso se denotará por z^{-1} .

Logaritmo(s) de un número complejo

Los logaritmos de números complejos se definen como inversos de la función exponencial:

$$w = \log z \Leftrightarrow z = e^w, \quad z \neq 0.$$

Si $z \neq 0$, entonces el logaritmo principal de z (o rama principal del logaritmo) viene definido por

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Otras ramas del logaritmo vienen dadas por

$$\log_{\theta_0} z := \ln |z| + i\theta, \quad \text{con } \theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi$$

para algún $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Distancia entre dos números complejos

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, la distancia entre z_1 y z_2 se define por

$$\operatorname{dist}(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Disco abierto, disco cerrado, círculo

- Círculo de centro z_0 y radio R :

$$C(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}.$$
- Disco abierto de centro z_0 y radio R :

$$D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$
- Disco cerrado de centro z_0 y radio R :

$$\overline{D}(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

Funciones exponencial, trigonométricas e hiperbólicas

- $\exp z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$ (función exponencial compleja). Las notaciones $\exp z$ y e^z serán utilizadas indistintamente.
- $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ (coseno);
- $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ (seno);
- $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ (tangente);
- $\cotg z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ (cotangente);
- $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ (secante);
- $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$ (cosecante);
- $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ (seno hiperbólico);
- $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ (coseno hiperbólico);
- $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$ (tangente hiperbólica).

Conjunto de ceros y multiplicidad

- El conjunto de ceros de una función $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vendrá indicado por

$$Z(f) = \{z \in U : f(z) = 0\}.$$

- Si f es holomorfa en z_0 , entonces f tiene un cero en z_0 de orden $m \geq 1$ ($m \in \mathbb{N}$) cuando $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ con $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$. La multiplicidad asociada al cero z_0 será denotada por $m(z_0)$.
(Misma notación empleada para los polos de una función meromorfa.)

Residuo de una función en una singularidad

Si z_0 es una singularidad aislada de una función f , entonces el residuo de f en z_0 se denotará por $\text{Res}(f, z_0)$.

Factores canónicos o elementales

Los factores canónicos o elementales vienen dados por

$$E_0(z) = 1 - z,$$

$$E_m(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^m}{m}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Transformación fraccionaria lineal o de Möbius

La transformación fraccionaria lineal o de Möbius viene dada por $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, con $ad - bc \neq 0$.

Núcleos de Poisson y Cauchy

- Núcleo de Poisson:

$$P_r(x) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos x},$$

siendo $0 \leq r < R$ y $x \in \mathbb{R}$.

- Núcleo de Cauchy:

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z},$$

siendo $z \in D(0, R)$ y $t \in \mathbb{R}$.

Función módulo máximo

Sea $r > 0$ y f una función definida al menos en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Entonces

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Orden de una función entera

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera no constante. Consideremos

$$\lambda_1 = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r}$$

y

$$\lambda_2 = \inf\{a \geq 0 : \exists r > 0 \text{ tal que } |f(z)| \leq e^{|z|^a} \forall z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r)\}.$$

El orden (u orden de crecimiento) de f será denotado por $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$.

Exponente de convergencia

Sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos no nulos con $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. El exponente de convergencia asociado a la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ viene dado por

$$\mu = \inf\{k > 0 : \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^k} < \infty\}.$$

Radio de convergencia

Dada una serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, el radio de convergencia asociado a ella viene dado por

$$r = (\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n})^{-1}.$$

Notación topológica

Sea A un conjunto del plano complejo.

-El interior de A es denotado por
 $\text{int } A$.

-La frontera de A es denotada por
 $\text{Fr } A$.

-La clausura de A es denotada por
 $\overline{A}$.

Curva, camino y traza

- Una curva es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, con $a < b$, tal que a un número real t le corresponde el número complejo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales y continuas en $[a, b]$.
- Llamaremos camino a una curva diferenciable con continuidad a trozos, y ciclo a una suma de la forma $\gamma = a_1\gamma_1 + \dots + a_n\gamma_n$, con $a_j \in \mathbb{Z}$ y γ_j camino cerrado para $j = 1, \dots, n$. En general, la notación empleada para curvas, caminos y ciclos será γ .
- La traza o trayectoria de la curva, $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$, será representada por γ^* .

Segmento y poligonal

Denotaremos por $[z_1, z_2]$ el camino determinado por el segmento que une los puntos z_1 y z_2 . Si en lugar de dos puntos tuviésemos n puntos, denotaremos por $[z_1, z_2, \dots, z_n]$ la poligonal formada por tales puntos.

Índice de un punto respecto de un camino

Sea γ un camino cerrado y $z_0 \notin \gamma^*$. El índice de z_0 respecto del camino γ vendrá dado por

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Funciones Gamma de Euler y Zeta de Riemann

- La función gamma de Euler:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\gamma} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}},$$

donde $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right)$ es la constante de Euler-Mascheroni.

- La función zeta de Riemann:

$$\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} \text{ si } \operatorname{Re} z > 1.$$

Números primos y contador de primos

Se indica por p_n el n -ésimo primo: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5 \dots$

$\pi(x)$ denota la cantidad de números primos menores o iguales a x (con $x > 0$).

El cuerpo de los números complejos. Funciones complejas elementales

El carácter bidimensional de los números complejos confiere un rol protagonista a las descripciones geométricas de los objetos involucrados en este contexto. Precisamente, este carácter explica, en parte, el destacado papel de la topología del plano en el análisis de variable compleja. En la primera parte de este capítulo estudiaremos la estructura algebraica y geométrica de los números complejos. Al respecto, se supondrá que el lector está familiarizado con el sistema de los números reales (algunos manuales básicos en este sentido son [9, 17, 43]).

En la segunda parte del capítulo consideraremos las funciones complejas de variable compleja. Sobre esta clase de funciones expondremos los conceptos de límite y continuidad, e introduciremos el concepto de función holomorfa, cuyo papel será clave en todo el desarrollo posterior. Finalmente, extenderemos al caso complejo las principales funciones elementales, tales como la exponencial, la logarítmica, la función potencia, las trigonométricas y las hiperbólicas, y estudiaremos las propiedades básicas de cada una de ellas.

Además de los ejemplos, ejercicios y problemas planteados en este capítulo, se recomienda la realización de otros problemas no rutinarios de números complejos como los que se exponen en la referencia [12], elaborada por el autor de este manual junto con el profesor J. M. Conde.

1.1 Primeras nociones

Los números complejos constituyen un sistema más amplio que el de los números reales, en el que se consigue que toda ecuación polinomial con coeficientes complejos

admita todas sus soluciones en el propio conjunto. A diferencia del cuerpo de los números reales, este hecho da lugar a calificar el conjunto de los números complejos como un cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición 1.1 (Conjunto de los números complejos) *Se define el conjunto de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de números reales dotados de las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, definidas por*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad y \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Si $z = (x, y)$ (notación en coordenadas cartesianas), llamamos parte real del número complejo z a la cantidad x , y lo denotamos como $\operatorname{Re} z = x$, y llamamos parte imaginaria de z a la cantidad $\operatorname{Im} z = y$.

A la vista de la definición dada, deducimos que cualquier número complejo puede representarse en el plano bidimensional. Se suelen identificar los pares $(x, 0)$ con los números reales x . El conjunto de los números complejos contiene, por tanto, a los números reales como subconjunto. Los números complejos de la forma $(0, y)$ se llaman números imaginarios puros. Así, si denotamos por $i = (0, 1)$, entonces $(x, y) = x + iy$ (o también $(x, y) = x + yi$) y, por tanto, la descripción del conjunto de los números complejos dada en la definición 1.1 puede ser reescrita en su *forma binómica* como

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones binómicas usuales entre dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dadas por

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

y

$$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Se recomienda también al lector que lea los párrafos correspondientes a la introducción de este mismo manual donde se expone un enfoque intuitivo, basado en [46], para introducir los números complejos.

El número complejo i introducido anteriormente, cuya notación fue incorporada por Leonhard Euler en 1779, se denomina a veces *la unidad imaginaria* y satisface $i^2 = -1$.

Siempre que se escriba una igualdad del tipo $z = x + iy$, y no se especifique lo contrario, entenderemos que x y y son reales. También, dado que $\mathbb{C}$ no tiene orden, cuando entre dos variables escribamos una relación del tipo $>, <, \geq, \leq \dots$, entenderemos que se trata de variables reales.

Varias propiedades de la suma y del producto de números complejos coinciden con las de los números reales y, de hecho, algunas de ellas se deducen precisamente por el hecho de que los números reales las satisfacen. Así, las leyes conmutativa, asociativa y

distributiva son un ejemplo de ello. Por tanto, de acuerdo con la ley conmutativa del producto tenemos $iy = yi$, y consecuentemente está permitido escribir

$$z = x + yi \quad \text{o} \quad z = x + iy.$$

Además, el elemento neutro para la suma es $0 + 0i$ y el elemento simétrico (u opuesto) a $a + bi$ es $-a - bi$, que además es único y nos sirve para definir la resta de dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, dada por

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

El elemento unidad para el producto viene dado por $1 + 0i$ y el elemento inverso de un número complejo $a + bi$ no nulo es $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$. Finalmente, la división de z_1 por un número complejo no nulo z_2 se define mediante el producto de z_1 por el elemento inverso de z_2 .

En definitiva, los números complejos se multiplican como si se tratara de expresiones reales, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. Usualmente, la división de números complejos se efectúa multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor, que se obtiene cambiando de signo la parte imaginaria:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 - (di)^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Ejemplos 1.1

1. Si $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 4 + 5i$, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = 8 + 10i + 12i + 15i^2 = -7 + 22i.$$

2. Si $z_1 = -3 + i$ y $z_2 = 2 + 3i$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3 + i}{2 + 3i} = \frac{-3 + i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{-6 + 3 + (9 + 2)i}{2^2 - (3i)^2} = \frac{-3 + 11i}{13} = \frac{-3}{13} + \frac{11}{13}i.$$

3. Si $z_1 = 1 - 3i$ y $z_2 = 1 + i$, entonces

$$\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1 - 3i} \cdot \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{4 - 2i} = \frac{4 + 2i}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{4 + 2i}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i.$$

Para concluir esta sección, notemos también que $\text{Im}(iz) = \text{Re } z$ y $\text{Re}(iz) = -\text{Im } z$.

1.2 Conjugado, módulo y argumento

Como se señaló anteriormente, cualquier número complejo puede representarse en el llamado plano xy , llamado también, a estos propósitos, plano complejo. Así, $z = x + iy$ puede pensarse como el segmento dirigido, o vector, que va desde el origen hasta el punto (x, y) y la suma de dos números complejos es equivalente a la ley del paralelogramo referida a vectores.

Definición 1.2 (Conjugado de un número complejo) *Definimos el conjugado de un número complejo $z = x + iy$, y lo denotamos por $\bar{z}$, como $\bar{z} := x - iy$.*

La conjugación también se puede utilizar para definir la parte real e imaginaria:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Geométricamente, el conjugado de un número complejo $z = x + iy$ es el vector resultante de reflejar el punto (x, y) en la recta real.

Definición 1.3 (Módulo de un número complejo) *Se llama módulo de un número complejo $z = x + iy$, y lo denotamos por $|z|$, a la cantidad*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geométricamente, el módulo del número complejo $z = x + iy$ es la distancia entre el origen y el punto (x, y) , es decir, la longitud del vector que representa a z .

Más generalmente, la distancia entre dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define por

$$\operatorname{dist}(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

y, obviamente, equivale a la distancia euclídea entre dos puntos del plano, denotada usualmente por $d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$.

También, los números complejos z correspondientes a los puntos del círculo de centro z_0 y radio $R > 0$, denotado por $C(z_0, R)$, satisfacen la igualdad $|z - z_0| = R$, y viceversa. Asociado a un círculo de centro z_0 y radio R , encontramos el disco abierto formado por sus puntos interiores, dados por la condición $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ y denotado por $D(z_0, R)$, y el disco cerrado dado por la condición $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ y denotado por $\bar{D}(z_0, R)$.

Conviene notar que $\mathbb{C}$ como espacio métrico es igual a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sin embargo, hay enormes diferencias entre ambos, por lo que a estructura algebraica se refiere. Así, $\mathbb{C}$ es un cuerpo y $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial que, por ejemplo, no permite la división entre vectores.

Además, es importante remarcar que una sucesión $\{z_n\}_{n \geq 1}$ de números complejos tiende a 0 si, y solo si, $\{|z_n|\}_{n \geq 1}$ tiende a 0. Equivalentemente, $\{z_n\}_{n \geq 1}$ tiende a 0 si, y solo si, $\{x_n\}_{n \geq 1}$ y $\{y_n\}_{n \geq 1}$ tienden a 0, siendo $x_n = \operatorname{Re} z_n$ e $y_n = \operatorname{Im} z_n$ para cada $n = 1, 2, \dots$

Algunas de las propiedades básicas (y, por tanto, importantes) en torno a la conjugación y el módulo son las siguientes:

- | | |
|---|---|
| i) $\bar{\bar{z}} = z$; | ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; |
| iii) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; | iv) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; |
| v) $\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \ (z_2 \neq 0)$; | vi) $ \bar{z} = z $; |
| vii) $z \cdot \bar{z} = z ^2 \ (z^{-1} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}, z \neq 0)$; | viii) $ z ^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$; |
| ix) $\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} z \leq z $; | x) $\operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} z \leq z $; |
| xi) $ z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 $; | xii) $\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 } \ (z_2 \neq 0)$; |
| xiii) $ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $; | xiv) $ z_1 + z_2 \geq z_1 - z_2 $
$(z_1 - z_2 \geq z_1 - z_2)$. |

Se anima al lector a probar formalmente las propiedades indicadas anteriormente (véase el ejercicio 1.5 al final de este capítulo), incluyendo las dos últimas, que, respectivamente, reciben el nombre de *desigualdad triangular* y *desigualdad triangular inversa*.

Ejemplo 1.2 (Raíces de polinomios) Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $z \in \mathbb{C}$, un polinomio con coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ reales. Si $\alpha = a + bi$ es tal que $P(\alpha) = 0$, entonces claramente se tiene que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$ y, por tanto, las raíces

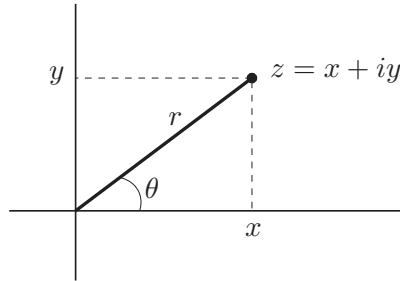


Figura 1.1: Representación geométrica de $z = x + iy \in \mathbb{C}$, de módulo r y ángulo asociado θ

complejas de un polinomio real se presentan siempre por pares conjugados (véase también la nota 2.15).

La correspondencia geométrica establecida con el plano, junto con la figura 1.1 (asociada a los valores $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$), sugiere las relaciones

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

y conducen de manera natural a representar $z = x + iy$ en las formas

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \tag{1.1}$$

o

$$|z|e^{i\theta},$$

que reciben respectivamente el nombre de *forma trigonométrica* y *forma polar* del número complejo $z \neq 0$. El valor θ se puede hacer corresponder con el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta que contiene el vector determinado por z (y queda determinado únicamente salvo posibles múltiplos de 2π).

Relacionada con la anterior, otra forma no elemental de representar un número complejo $z \neq 0$ es acudir a la expresión $re^{i\theta}$, donde r representa el módulo y θ el argumento de z . La fundamentación rigurosa de esta forma de expresar un número complejo, que recibe el nombre de *forma exponencial*, se basa en la definición de la función exponencial del análisis complejo que trataremos en la sección 1.4.1.

Como se ha señalado anteriormente, también debido a la periodicidad del seno y coseno, el valor de θ está determinado salvo posibles múltiplos de 2π . Así, cualquier θ que verifique (1.1) será llamado *argumento* de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Veamos a continuación la definición concreta de argumento y argumento principal de un número complejo no nulo.

Definición 1.4 (Argumento de un número complejo. Argumento principal)

Un argumento de un número complejo $z = a + bi \neq 0$ viene dado por el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la semirrecta de origen 0 conteniendo el afijo de z . El conjunto de todos los argumentos de z (incluyendo las vueltas de 2π) se representa por $\arg z$, y se expresa normalmente en radianes.

Eligiendo el valor θ de $\arg z$ satisfaciendo $-\pi < \theta \leq \pi$ se obtiene el llamado valor principal del argumento, que se denota por $\text{Arg } z$.

Por tanto, si $z = a + bi \neq 0$, entonces de manera operativa tenemos que

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0, b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a, b > 0 \\ -\arctan\left(\frac{-b}{a}\right) & \text{si } a > 0, b < 0 \\ -\arctan\left(\frac{b}{-a}\right) + \pi & \text{si } a < 0, b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a, b < 0 \\ 0 & \text{si } a > 0, b = 0 \\ \pi & \text{si } a < 0, b = 0 \end{cases}.$$

Naturalmente, las relaciones de arriba podrían ser simplificadas teniendo en cuenta que la función $\arctan x$ es impar.

Ejemplo 1.3 Consideremos los números complejos $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 2-5i$, $z_3 = -2+5i$ y $z_4 = -2-5i$. Entonces

$$\operatorname{Arg} z_1 = \arctan \frac{5}{2}, \operatorname{Arg} z_2 = -\arctan \frac{5}{2}, \operatorname{Arg} z_3 = -\arctan \frac{5}{2} + \pi, \operatorname{Arg} z_4 = \arctan \frac{5}{2} - \pi.$$

Dados dos números complejos z y w expresados en su forma trigonométrica o exponencial, $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta}$ y $w = |w|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) = se^{i\phi}$ ($r \geq 0$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$), se puede probar fácilmente que

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = r^{-1}e^{-i\theta}$$

y

$$zw = |z||w|(\cos(\theta + \phi) + i \operatorname{sen}(\theta + \phi)) = rs e^{i(\theta + \phi)}.$$

En particular,

$$(re^{i\theta})^n = z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = r^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De esta forma, en términos geométricos, el producto de dos números complejos de módulos respectivos r y s y argumentos respectivos θ y ϕ da lugar a otro número complejo de módulo igual al producto $r \cdot s$ y con $\theta + \phi$ como uno de sus argumentos. En particular, la multiplicación por $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ nos proporciona un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes en sentido positivo (o antihorario), ya que si $z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) entonces $z \cdot i = re^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ (véase también el ejemplo 4.21.3 sobre la aplicación giro o rotación).

Una implicación de las propiedades anteriores es la llamada *fórmula de Moivre*, dada por

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta),$$

y válida para cualquier número real θ y cualquier entero n .

Observación 1.1 (Argumento principal de un producto o cociente)

Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es importante observar que $\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ y que no es cierto siempre que $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg} z$ o que $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$. Por ejemplo $\operatorname{Arg}(-1/3) = \pi \neq -\operatorname{Arg}(-3)$ y $\operatorname{Arg}(-1) = \pi \neq \operatorname{Arg}(-i) + \operatorname{Arg}(-i)$. Sin embargo, como conjuntos, sí que se cumple que $\arg(z^{-1}) = -\arg z$ y $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Una importante consecuencia de la fórmula de Moivre consiste en la radicación de un número complejo. Las *raíces n -ésimas* de un número complejo $z \neq 0$ son números complejos que tienen como módulo la raíz n -ésima de su módulo y como argumento $\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Proposición 1.1 (Raíces n -ésimas) Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces z tiene n raíces n -ésimas diferentes, que vienen dadas en forma trigonométrica como

$$\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Prueba. Tomemos la expresión $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, con $\theta = \operatorname{Arg} z$. Se trata de encontrar todos los números complejos $w = |w|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$ que satisfagan $w^n = z$. Utilizando la fórmula de Moivre, esta ecuación equivale a

$$|w|^n (\cos(n\phi) + i \operatorname{sen}(n\phi)) = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

de la cual derivamos las relaciones $|w|^n = |z|$, $\cos(n\phi) = \cos \theta$ y $\operatorname{sen}(n\phi) = \operatorname{sen} \theta$. La primera condición nos proporciona

$$|w| = \sqrt[n]{|z|},$$

mientras que las otras dos se satisfacen únicamente si $n\phi = \theta + 2k\pi$ para algún entero k , es decir,

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ para algún entero } k.$$

Si tomamos $k = 0, 1, \dots, n-1$, obtenemos n raíces distintas de z . Cualquier otra elección de k nos lleva a duplicar alguna de estas raíces y, por tanto, el resultado sigue. $\square$

Conviene hacer notar que el símbolo $\sqrt[n]{z}$, que en otras referencias usuales se utiliza para denotar al conjunto formado por todas las raíces n -ésimas de $z \neq 0$, es un abuso de notación, pues por coherencia con el caso más habitual de $z > 0$ ese símbolo se debería utilizar únicamente para la raíz n -ésima principal (la de argumento $\frac{\text{Arg } z}{n}$).

A la vista de los argumentos obtenidos, si representamos las n raíces n -ésimas de un número complejo y unimos los afijos de cada una de ellas, obtenemos un polígono regular de n lados.

Ejemplos 1.4

1. **(Raíces cúbicas de la unidad):** Las raíces cúbicas de 1 vienen dadas por los puntos $z_0 = 1$, $z_1 = 1_{2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_2 = 1_{4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, que conforman los vértices de un triángulo equilátero.

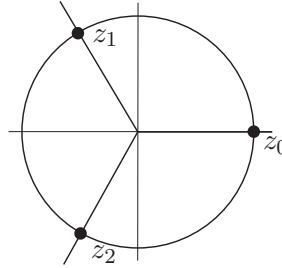


Figura 1.2: Afijos de las raíces cúbicas de 1

2. **(Raíces cuartas de -1):** Las raíces cuartas de -1 vienen dadas por los puntos $z_0 = 1_{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1 = 1_{3\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = 1_{5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ y $z_3 = 1_{7\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, que conforman los vértices de un cuadrado.

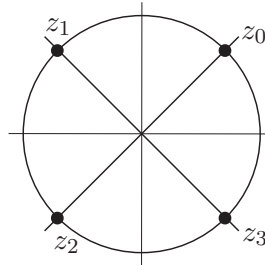


Figura 1.3: Afijos de las raíces cuartas de -1

1.3 Continuidad y holomorfía de funciones complejas de variable compleja

Sea S un conjunto arbitrario de números complejos. Si a cada número complejo z en S le podemos hacer corresponder otro número complejo w (dependiente de z), diremos que w es una *función* de la variable compleja z en el conjunto S y escribimos $w = f(z)$. Consideraremos que el término función hace referencia al de una función uniforme, en el sentido que a cada valor de z en el conjunto en cuestión le hace corresponder uno y solo un valor. La mayor parte de las proposiciones sobre correspondencias multivaluadas o multiformes (no uniformes), tales como $z^{1/2}$, pueden ser estudiadas mediante funciones uniformes. Abusando del lenguaje (pues no son auténticas funciones o aplicaciones), las correspondencias multivaluadas también aparecen en la literatura con el nombre de funciones multivaluadas o multiforme (entendiendo que se hace corresponder a cada z todas sus imágenes).

Utilizaremos la notación $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Cada función compleja f tiene asociada una componente real y otra imaginaria, que son funciones reales de las variables x e y , y las denotaremos respectivamente de ahora en adelante por $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ y $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$.

Definición 1.5 (Límite puntual) *Dada una función compleja f definida en los puntos de un cierto entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$, la expresión $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \in \mathbb{C}$ denota el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 y significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$ (con valores de z en el dominio de la función).*

La mayoría de las propiedades de los límites (y de la continuidad) que ya conocemos de etapas de formación anteriores se conservan debido a que el límite de una función f en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ existe si, y solo si, existen los límites de las partes real $u(x, y)$ e imaginaria $v(x, y)$ cuando x e y tienden a x_0 e y_0 respectivamente. En particular, el límite de una función compleja de variable compleja en un punto, si existe, es único. Véase también el ejercicio 1.22 en el que se manejan propiedades sobre la aritmética de los límites de funciones y la existencia del límite de la función módulo (justificado por la desigualdad triangular inversa).

Análogamente se definen los límites infinitos y en el infinito.

Definición 1.6 (Límites infinitos y límites en el infinito) *Dada una función compleja f definida en los puntos de un cierto entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$, pondremos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ (o $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$) cuando para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z)| > M$.*