

2^{EDICIÓN}

MÉTODOS NUMÉRICOS CON APLICACIÓN A LA INGENIERÍA

Solón Efrén Losada H. - Néstor Orlando Forero
Juan David Tole Lozano



ECOE
EDICIONES



MÉTODOS NUMÉRICOS CON APLICACIONES

SOLÓN EFRÉN LOSADA H.
NÉSTOR ORLANDO FORERO
JUAN DAVID TOLE LOZANO

Losada H., Solón Efrén, autor

Métodos numéricos con aplicación a la ingeniería / Solón Efrén Losada H., Néstor Orlando Forero, Juan David Tole Lozano -- Segunda edición -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2023.
298 páginas. -- (Ciencias básicas. Matemáticas)

Incluye datos curriculares de los autores -- Incluye índice alfabético -- Incluye bibliografía.

ISBN 978-958-503-523-2 -- 978-958-503-524-9 (e-book)

1. Cálculo numérico 2. Matemáticas - Enseñanza con ayuda de computadores 3. Ingeniería - Procesamiento de datos I. Forero, Néstor Orlando, autor II. Tole Lozano, Juan David, autor

CDD: 515 ed. 23

CO-BoBN- a1104217



Área: Ciencias básicas

Subárea: Matemáticas

ECOE
EDICIONES



© Solón Efrén Losada H.
© Néstor Orlando Forero
© Juan David Tole Lozano

► Ecoe Ediciones S.A.S.
info@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 # 63 C 32 - Tel.: 919 80 02
Bogotá, Colombia

Primera edición: Bogotá, enero del 2023

ISBN: 978-958-503-523-2
e-ISBN: 978-958-503-524-9

Directora editorial: Claudia Garay Castro
Coordinadora editorial: Paula Bermúdez B.
Corrección de estilo: Miguel Pachon Higuera
Diagramación: Denise Rodríguez
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: Xpress Estudio Gráfico y digital
Carrera 69 H # 77 - 40

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

*Con especial aprecio y cariño a nuestras familias,
por su comprensión, estímulo y sacrificio.*

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	XIII
CAPÍTULO 1. TEORÍA DEL ERROR	1
1.1 Tipos de error	1
1.2 Aplicaciones en contexto.....	18
1.3 Ejercicios propuestos	22
1.4 Ejercicios de aplicación.....	23
CAPÍTULO 2. SERIES DE TAYLOR.....	25
2.1 Series de MacLaurin.....	25
2.2 Series de Taylor	31
2.3 Aplicaciones en contexto.....	41
2.4 Ejercicios propuestos	42
2.5 Ejercicios de aplicación.....	44
CAPÍTULO 3. RAÍCES DE FUNCIONES	47
3.1 Raíces reales de funciones	49
3.2 Aplicaciones en contexto.....	85
3.3 Ejercicios propuestos	86
3.4 Ejercicios de aplicación.....	88
CAPÍTULO 4. RAÍCES REALES DE POLINOMIOS	93
4.1 Preliminares sobre polinomios	93
4.2 Sucesiones de Sturm.....	101

4.3 Deflación polinomial	117
4.4 Algoritmo sugerido para hallar raíces reales de un polinomio.....	119
4.5 Raíces complejas de polinomios	128
4.6 Aplicaciones en contexto.....	137
4.7 Ejercicios propuestos	138
4.8 Ejercicios de aplicación.....	138
CAPÍTULO 5. AJUSTE DE CURVAS	141
5.1 Método de mínimos cuadrados	141
5.2 Linealización	148
5.3 Mínimos cuadrados vs linealización	154
5.4 Interpolación polinomial	161
5.5 Aplicaciones en contexto.....	185
5.6 Ejercicios propuestos	186
5.7 Ejercicios de aplicación.....	187
CAPÍTULO 6. INTEGRACIÓN NUMÉRICA	189
6.1 Aproximación por medio de funciones escalonadas.....	191
6.2 Aproximación por medio de un polinomio de grado 1 (método del trapecio).....	202
6.3 Aproximación por medio de un polinomio de grado 2 (método de Simpson).....	211
6.4 Aproximación de Newton-Cotes (orden superior)	219
6.5 Método de integración de Romberg.....	225
6.6 Aplicaciones en contexto.....	230
6.7 Ejercicios propuestos	231
6.8 Ejercicios de aplicación.....	232
CAPÍTULO 7. DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA	235
7.1 Aproximación de la derivada hacia adelante	238
7.2 Aproximación de la derivada hacia atrás.....	241
7.3 Aproximación de la derivada centrada	241
7.4 Aplicaciones en contexto.....	243
7.5 Ejercicios propuestos	246
7.6 Ejercicios de aplicación.....	247
CAPÍTULO 8. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	249
8.1 Solución numérica de E.D.O. de Orden uno	249
8.2 Método de Euler	250
8.3 Solución Numérica de EDO de Orden 2	269
8.4 Aplicaciones en contexto.....	273
8.5 Ejercicios propuestos	276
BIBLIOGRAFÍA	283
RESPUESTAS	285
ÍNDICE ALFABÉTICO	297

Sistema de Información en Línea



Al final del libro encontrará el código para ingresar al **Sistema de información en Línea - SIL** - donde podrá acceder a ejercicios complementarios resueltos, algunos de forma gráfica con programación Matlab, y sus correspondientes explicaciones, indicando el paso a paso de su desarrollo, sobre distintos temas como la Teoría del error, series de Taylor, Ceros de funciones, ajustes de curvas, integración numérica, diferenciación numérica y solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

SÍMBOLOS

ε_a	Error absoluto.
ε_r	Error relativo.
$\varepsilon_{r\%}$	Error relativo porcentual.
$\{x_n\}$	Sucesión.
EN	Error normalizado.
ENn	Término n -ésimo del error normalizado.
ENP	Error normalizado porcentual.
Tm	Tolerancia con m cifras significativas.
s_n	Suma parcial de una serie.
$R_n(\xi)$	Error n -ésimo evaluado en ξ .
bi	Aproximación i -ésima aplicando el método de bisección.
rfi	Aproximación i -ésima aplicando el método de regla falsa.
$a_n x^n$	Término n -ésimo de un polinomio.
(ρ, ρ)	Intervalo donde se encuentran las raíces de un polinomio.
$Vp(c)$	Número de cambios de signo del valor c , evaluado en las sucesiones de Sturm.
li	Intervalo donde se garantiza una única raíz.

β_i	Parámetros de los modelos de regresión.
e_i	Error i -ésimo generado por un modelo de regresión.
$\vec{\Delta}f$	Primera diferencia finita hacia adelante.
$Dom_X(f)$	Valores que puede tomar la función f en un conjunto de valores X .
$\vec{\Delta}^n f n$	n -ésima diferencia finita hacia adelante.
$\prod_{i=1}^n x_i$	Productoria de los n primeros términos.
R_i^s	Aproximación n -ésima del valor de la integral utilizando sumas superiores de Riemman.
R_i^I	Aproximación n -ésima del valor de la integral utilizando sumas inferiores de Riemman.
A_i^T	Aproximación n -ésima del valor de la integral utilizando el método del trapecio.
M_T	Cota superior para acotar el error utilizando trapecios.
E_n^T	Iteración n -ésima del error del método del trapecio.
A_i^S	Aproximación n -ésima del valor de la integral utilizando el método de Simpson.
A_i^B	Aproximación n -ésima del valor de la integral utilizando el método de Boole.
$R_{k,j}$	Fórmula de recurrencia de aproximación de Romberg de la fila i , columna j .
$O(h^n)$	Error n -ésimo generado al utilizar un método de aproximación.
$\frac{\vec{df}}{dx}(x_k)$	Aproximación de la derivada en x_k , utilizando diferencias hacia adelante.

INTRODUCCIÓN

Debemos aclarar que las presentes notas son producto de los cursos de métodos numéricos dictados durante varios años y no pretende ser un libro formal de métodos numéricos, más bien, sirve como complemento a libros conocidos. Por ello, se tratará de dar un enfoque un poco diferente en un lenguaje más cotidiano.

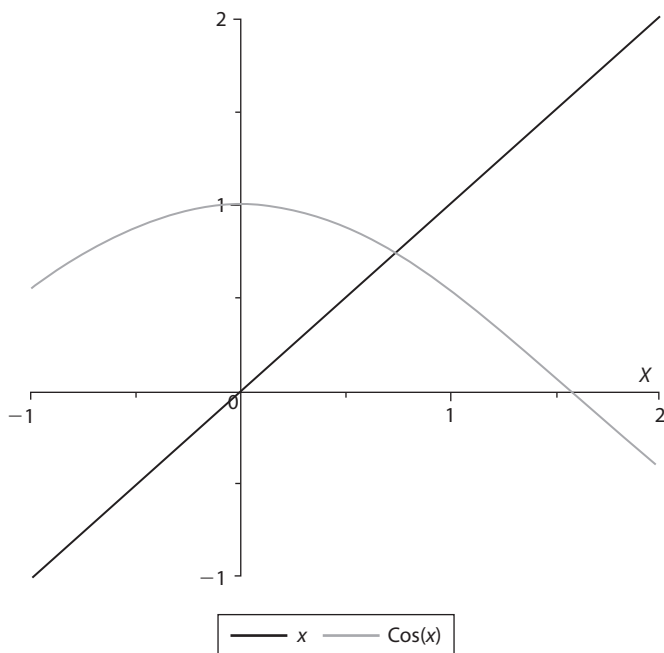
Dentro del quehacer del profesional, la interpretación, análisis y toma de decisiones constituyen el eje fundacional para la formación de personal competente. De esta lógica el modelamiento, entendido como el acto de hacer inteligible un modelo, necesita de la comprensión y uso de los métodos numéricos, ahora una gran variedad de los problemas que obedecen a la especificidad de la ingeniería, la física, la biología, la medicina y la ecología, permean campos de conocimiento de naturaleza social y humana como la economía, la administración y la misma sociología.

Muchos de estos problemas se expresan en términos matemáticos de naturaleza no lineal, como es el caso de problemas de orden inverso: construcción de funciones, a partir de un arreglo de datos experimentales, solución de ecuaciones diferenciales que describen fenómenos discretos, continuos o mixtos: cálculo de cargas de una viga, confinamiento de campos electrostáticos y magnetostáticos, determinación de perfiles de velocidades en fluidos laminares y sus transición a fluidos rotacionales, por mencionar algunos casos particulares.

Es por esto que uno de los objetivos de este libro, contempla la importancia en lo que refiere a la implementación y modificación de algoritmos que expresan las particularidades de las aproximaciones numéricas, mediante la utilización de herramientas computacionales de tipo comercial como Matlab y de desarrollo libre GNU-GPL, como es el caso de octave.

Un problema frecuente en matemáticas es solucionar una ecuación $f(x) = 0$, algunas de estas se pueden resolver de forma explícita; sin embargo, nos encontramos, por ejemplo, con este tipo de problemas $x - \cos(x) = 0$, la cual gráficamente se ve que tienen solución (ya que es la intersección de las gráficas de x y $\cos(x)$). A esta solución no se puede llegar de forma inversa; pero, si se puede aproximar su solución de forma numérica.

Gráfica A. Cos $x = x$



Fuente: elaboración propia.

Otro ejemplo, de este tipo de solución, es la integral de la función e^{-x^2} ; que es usada para hallar la probabilidad de una variable aleatoria que tenga una distribución normal, $\int_a^b e^{-x^2} dx$ la cual cumple las condiciones para ser integrable; continua y acotada (Apóstol, 1996), pero no aplica teorema fundamental del cálculo para solucionarla de forma explícita, pero se puede aproximar utilizando la definición de integral (Sumas de Riemann) o analíticamente por series de Taylor.

Gráfica B. Distribución normal

Fuente: elaboración propia.

Por las razones antes mencionadas, empezamos nuestro primer capítulo con un estudio breve de la teoría del error y damos una definición alterna de tolerancia, la cual puede ser usada al aprovechar la potencia de las máquinas actuales que nos permiten trabajar con bastantes cifras significativas, lo cual da un criterio para verificar si los métodos numéricos recursivos (es decir, que usan un algoritmo recursivo) son lo suficientemente “buenos” para ser tenidos en cuenta e implementarlos.

El segundo capítulo está dedicado a un repaso de las series y al teorema de Taylor desde el punto de vista numérico, el cual es parte fundamental del desarrollo de la mayoría de los métodos numéricos.

En el tercer capítulo, discutimos uno de los problemas más comunes en matemáticas, como lo es la resolución de ecuaciones reales, tal y como fue mostrado en el primer ejemplo de esta introducción.

En el cuarto capítulo, dado que las funciones más naturales para nosotros son los polinomios, dedicamos la última parte de este capítulo a encontrar las raíces de ecuaciones polinómicas y damos un algoritmo completo para aproximar las raíces reales de estas ecuaciones, el cual no se encuentra completo en la bibliografía actual (como parte opcional se aproximarán las raíces complejas).

Para el quinto capítulo, estudiamos el ajuste de curvas (funciones), empezamos por el método de mínimos cuadrados y lo estudiamos teóricamente como un problema de minimización de la norma del vector error, para después comparar explícitamente el método teórico a funciones no polinomiales con las regresiones lineales aplicadas a linealizaciones de los modelos y mostrar sus diferencias. En segundo lugar, se muestra la forma de construir un polinomio de interpolación de manera sencilla y natural, haciendo uso únicamente del teorema del factor.

En el capítulo sexto, nos dedicamos al cálculo en una variable al comenzar por la integración (orden histórico) y centrándonos en los métodos y errores de los métodos de Newton-Cotes, los cuales son simplemente aplicación de la interpolación polinomial.

En el capítulo séptimo usaremos el teorema de Taylor para llegar a aproximaciones de la derivada (al mostrar explícitamente el desarrollo de estas fórmulas) y las escribiremos de manera simplificada, al hacer uso de las diferencias finitas divididas; especificando su error $O(h)$.

En el capítulo octavo, como complemento de la primera edición, se incluyó la aproximación a la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) con condición inicial, denominada Problema de Valor Inicial (PVI).

CAPÍTULO 1

TEORÍA DEL ERROR

Como ya se mencionó en la introducción, el propósito de estas notas es buscar soluciones aproximadas a problemas que no pueden ser resueltos con los métodos analíticos conocidos y, dado que se va a trabajar con aproximaciones, es necesario saber si efectivamente estas son cercanas a la solución real del problema y, si lo son, qué tan “buenas” son.

Para esto, se hará un breve estudio de la teoría del error y se centrará en la precisión, ya que la mayoría de los métodos que se estudiarán en estas notas son recursivos.

Es de destacar, que el término “error” se usará para representar tanto la inexactitud como la imprecisión en los cálculos numéricos. Hecha esta aclaración, se analizarán los factores que contribuyen al error.

1.1 Tipos de error

1.1.1 *Experimental*

Al momento de medir las variaciones de algún evento, se debe ser cuidadoso de no producir perturbaciones en el sistema que está bajo observación. Por ejemplo, para medir la temperatura de un cuerpo, este se debe colocar en contacto con un termómetro, pero al ponerlos juntos algo de energía (calor) se intercambia (transfiere) entre el objeto y el termómetro, generando un cambio en la temperatura del cuerpo que deseamos medir. Así, el instrumento de medición afecta el resultado de la medida.

Además, es necesario tener en cuenta que todas las medidas están afectadas en algún grado por un error experimental, debido a las imperfecciones inevitables tanto del instrumento de medida como de las limitaciones impuestas por los sentidos al registrar la información.

1.1.2 Error de máquina

Teóricamente, se tiene la existencia de números reales con una cantidad infinita de cifras decimales (por ejemplo, π), sin embargo, en los cálculos con computadores es imposible manejar una cantidad de información infinita. Por ejemplo, el resultado de multiplicar dos números con cuatro cifras decimales es en general un número con ocho cifras decimales, pero si se tienen que efectuar varias multiplicaciones sucesivas, en algunos momentos será imposible manejar una larga cantidad de cifras decimales.

El computador solo utiliza números con una cantidad finita de cifras, de modo que los cálculos se realizan únicamente con representaciones aproximadas de los números exactos. En un computador, solo se usa un subconjunto relativamente pequeño del sistema de números reales para representarlos a todos, este conjunto es el conocido como los puntos flotantes, por ejemplo: $3153,07 = 3,15307 * 10^3$.

Para estudiar las causas del error con algo de profundidad, el lector se puede dirigir al anexo 1 (números de máquina). Otro inconveniente es el sistema numérico de los computadores actuales: el sistema numérico en base dos o binario. Desde luego, esto no impide que la comunicación con el computador se haga en el sistema decimal (base 10), con el cual estamos familiarizados, sin embargo, se tiene cierto grado de pérdida en la información, ya que el computador debe con estos dos sistemas convertir la información.

1.1.3 Exactitud

Se refiere a la aproximación de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa.

1.1.3.1 Error absoluto

Se da cuando se aproxima el valor real a un valor aproximado.

Mídase la distancia entre ellos (se notará que el error absoluto es una distancia siempre mayor o igual a cero).

Definición 1.1 (error absoluto). Se define el error absoluto de una aproximación como la distancia entre este x y el valor real $\tilde{x}$. Así:

$$(1.1) \varepsilon_a = |x - \tilde{x}|$$

Donde $\tilde{x}$ es el valor aproximado y x es el valor verdadero (Nieves, 1998).

Ejemplo 1.1. Suponer que por medio de un experimento de laboratorio se quiere medir la aceleración de la fuerza de la gravedad y el resultado es:

$$\tilde{x} = 10.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Este sería el valor aproximado, tomando el valor “real” como $x = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ se tiene que el error absoluto es:

$$\varepsilon_a = |10.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}| = 0.29 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 1.2. Suponer que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache, se obtiene **9.999 cm** y **9 cm** respectivamente. Si los valores son **10.000 cm** y **10 cm**, ¿cuál es el error absoluto en cada caso? El error absoluto en la medición del puente sería:

$$\varepsilon_a = |x - \tilde{x}| = |10.000 \text{ cm} - 9.999 \text{ cm}| = 1 \text{ cm}$$

Y para el remache:

$$\varepsilon_a = |x - \tilde{x}| = |10 \text{ cm} - 9 \text{ cm}| = 1 \text{ cm}$$

Uno de los problemas al considerar el error absoluto es que este depende de las unidades. Así, en el ejemplo anterior el error de 1 cm es igual para los dos experimentos, sin embargo, a pesar de que el error absoluto es el mismo, en el segundo experimento la experiencia nos dice que es “más grande” con respecto a lo que se mide, por esta razón, es bueno comparar el error con respecto a lo que se está midiendo, además, es bueno que el error sea independiente de la escala usada. Estas consideraciones motivan la siguiente definición.

1.1.3.2 Error relativo

Definición 1.2 (error relativo). Se define el error relativo como la razón entre el error absoluto y la magnitud del valor verdadero y se denota por:

$$(1.2) \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{|x|} = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right|$$

Siempre y cuando el valor real de x sea no nulo (en cuyo caso es suficiente trabajar con el error absoluto) (Burden y Faires, 2003, y Nieves, 1998).

Ejemplo 1.3. Calcular los errores relativos de los experimentos del ejemplo 1.2 de la sección anterior (el puente y el remache).

El error relativo en la medición del puente es:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| = \left| \frac{10.000 \text{ cm} - 9.999 \text{ cm}}{10.000 \text{ cm}} \right| = 0,0001$$

Y para el remache es:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| = \left| \frac{10 \text{ cm} - 9 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \right| = 0,1$$

Obsérvese que esta medida del error es un escalar (es un número independiente de las unidades), el cual muestra que el error en el experimento del remache es más grande que el del puente en su contexto. Estos valores, en realidad, son parte reales, es decir, el error cometido al medir el remache es la 0,1 parte total de lo que mide el remache, lo cual puede ser mejor explicado en términos de porcentajes, lo cual motiva una variación de la definición anterior.

1.1.3.3 Error relativo porcentual

Definición 1.3 (error relativo porcentual). Defínase el error relativo porcentual como el porcentaje entre el error absoluto y la magnitud del valor verdadero, se denota por:

$$(1.3) \varepsilon_{r\%} = \frac{\varepsilon_a}{|x|} * 100\% = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| * 100\%$$

Siempre y cuando el valor real sea no nulo (Burden y Faires, 2003).

Ejemplo 1.4. Calcular los errores relativos porcentuales del ejemplo 1.2 (el puente y el remache).

El error relativo porcentual en la medición del puente es:

$$\varepsilon_{r\%} = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| * 100\% = \left| \frac{10.000 \text{ cm} - 9.999 \text{ cm}}{10.000 \text{ cm}} \right| * 100\% = 0,01\%$$

Y para el remache es:

$$\varepsilon_r\% = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| * 100\% = \left| \frac{10 \text{ cm} - 9 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \right| * 100\% = 10\%$$

A pesar de las definiciones anteriores, estas no pueden ser usadas en las notas, ya que ellas recurren al uso del valor real. Existen dos problemas con el valor real, el primero es que no se tiene (si se conoce no hay necesidad de aplicar métodos numéricos) y el segundo es que se conoce, pero numéricamente no se entiende (por ejemplo $\sqrt{2}$).

Esto crea una necesidad de trabajar de un modo diferente el error, para esto se estudiará la precisión.

1.1.4 Precisión

Se refiere a qué tan cercano está un valor individual medido o calculado con respecto a otros valores medidos.

En la mayoría de métodos numéricos que se desarrollarán, se tratará de acercar a algún valor (ya sea solución de una ecuación, valor de una integral, etc.), esto se hará de forma recurrente, es decir, se da una primera aproximación y basándose en esta se dará una segunda y así sucesivamente, esto lleva al estudio de las sucesiones.

1.1.4.1 Sucesiones y series

Definición 1.4 (sucesión). Por una sucesión finita de n términos, se entenderá una función F , cuyo dominio sea el conjunto de números $\{1, 2, \dots, n\}$, e infinita cuando el dominio sea el conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ de todos los enteros positivos (o conjunto contable y totalmente ordenado) (Muñoz Quevedo, 2002).

El recorrido de “ F ”, esto es el conjunto $\{F(1), F(2), F(3), \dots\}$, se designa también por $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$ y el valor F_n se llama al término n -ésimo de la sucesión, usualmente la sucesión se denota por (x_n) o (a_n) .

Ejemplo 1.5. Ejemplos de sucesiones:

- $A =$ Números primos 2, 3, 5, 7, 11, ...
- $B =$ Sucesión de Fibonacci:
$$\begin{cases} f_0=0 \\ f_1=1 \\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \end{cases}$$
- $C = \left\{ (-1)^n \right\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$
- $D = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots \right\}$
- $E = \left\{ (-1)^n n \right\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 2, -3, \dots, (-1)^n n, \dots\}$
- $F = \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots \right\}$

La idea es que estas sucesiones se acerquen al valor buscado, así estudiaremos a las sucesiones convergentes. Intuitivamente, las sucesiones A , B , C y E no convergen, las sucesiones D y F convergen:

para la sucesión D se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

para la sucesión F :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Nota 1.1. Para la sucesión $a_n = (-1)^n$, si n es par $a_n = 1$, si n es impar $a_n = -1$, luego el límite no existe, es decir no converge. Para el caso $(-1)^n n$ si n es par va hacia ∞ , si n es impar va para $-\infty$, es decir no converge y no es acotada. Cuando la sucesión va para infinito se dice que diverge.

Definición 1.5 (sucesión convergente) (Apostol, 1996). Sea (x_n) una sucesión en los reales, se dice que converge a un valor L si y solo si dado $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

Siempre que $n > N$.

Para ilustrar esta definición, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.6. Considerar la sucesión de números reales dada por:

$$x_n = \frac{3n}{7n+3} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Se sabe por los cálculos directos del límite que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{7n+3} = \frac{3}{7}$$

Ahora, la definición anterior si se incrementa n en la sucesión, estos valores van a ser muy cercanos al valor del límite $L = \frac{3}{7}$.

Tabla 1. Sucesión ejemplo 1.6

n	x_n	$ x_n - L $
1	0,3	0,1285714286
2	0,352941176	0,0756302521
3	0,375	0,0535714286
4	0,387096774	0,0414746544
1.000	0,428387834	0,0001835948
1.000.000	0,428571245	0,0000001837

Fuente: elaboración propia.

Gráfica 1. Código Matlab

```

function Ejemplo16()
% El titulo debe ser igual al nombre del archivo
epn=1;
% epn es una variable, arranca en 1
a(1)=0.3;
% a(1) es el valor inicial de la sucesion, se debe calcular manualmente
n=2;
% valor donde arranca el while, en este caso es 2, ya que se definio a(1)
b(1,1)=1;
b(1,2)=a(1);
b(1,3)=epn;
% Son los encabezados de la tabla
while(epn>0.001)
a(n)=3*n/(7*n+3);
epn=abs((a(n)-a(n-1))/a(n));
b(n,1)=n;
b(n,2)=a(n);
b(n,3)=epn;
% se definen las columnas, los valores que apareceran en estas
n=n+1;
% este es el contador
end
% siempre que se inicie un while; se debe terminar el ciclo con end
b;
a';

f = figure('Position', [100 100 752 250]);
% Las dos primeras son posicion, las otras dos son ancho y alto de la
% ventana
t = uitable('Parent', f, 'Position', [25 50 700 200], 'Data',b);
% Comando que muestra la tabla

t.ColumnName = {'n', 'xn', 'EPNn'};
% Encabezado de la tabla
t.ColumnWidth= {100, 100, 100};
% Ancho de las columnas dentro de la tabla
t.ColumnFormat={'long','long','long'};
% me indica la cantidad de decimales; 15 por defecto

end

```

Fuente: elaboración propia.

En muchas de las aproximaciones numéricas, hay acercamiento a la solución por medio de sucesiones, las cuales se esperan sean convergentes. La definición de sucesión convergente da un criterio para verificar la convergencia, sin embargo, esta recurre al uso del valor límite de la sucesión, el cual no se conoce (ni se conocerá). Retómese el ejemplo anterior y utilícen las ideas de Cauchy. En la Tabla 2. Distancia entre dos elementos de la sucesión se compara la distancia de un elemento de la sucesión y el siguiente, así:

Tabla 2. Distancia entre dos elementos de la sucesión

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $
1	0,3	0,05294117647059
2	0,352941176	
2	0,352941176	0,02205882352941
3	0,375	
3	0,375	0,01209677419355
4	0,387096774	
1.000	0,428387834	0,0000001833328818
10.001	0,428553064	
1.000.000	0,428571245	0,0000000000004286
1.000.001	0,428571245	

Fuente: elaboración propia.

En la tabla anterior se ve que entre más se avanza en la sucesión, la distancia entre cada par de términos es más pequeña. Esto motiva la siguiente definición, la cual es muy útil.

Definición 1.6 (sucesiones de Cauchy) (Apóstol, 1996). Una sucesión x_n se llama de Cauchy. Para cada $\varepsilon > 0$ y solo si dado $N \in \mathbb{N}$, existe tal que:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

Siempre que $n, m > N$.

Es decir, entre más adelante vaya la sucesión, la distancia entre los términos de la sucesión va a ser más pequeña.

De la anterior definición, se sigue la siguiente propiedad de las sucesiones de Cauchy para términos consecutivos:

Propiedad 1.1. Si x_n es una sucesión de Cauchy, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

Siempre que $n > N$.

Para ilustrar esta definición, véase el siguiente ejemplo: 1.5, una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, sin embargo, es bien sabido que el recíproco se cumple bajo ciertas condiciones, es decir, se cumple el siguiente teorema:

Teorema 1.1. En $\mathbb{R}^n$, toda sucesión de Cauchy es convergente.

La demostración se puede ver (Rudin, 1976).

La definición de sucesión de Cauchy, en particular las definiciones 1.1 y 1.6, permite determinar cuándo una sucesión en los números reales es convergente sin hacer uso del valor del límite, el cual no se puede usar, ya que se desconoce. Esta definición permite crear una medición para el error en una sucesión que calcule las distancias entre dos elementos diferentes de una sucesión, sin embargo, como se vio en el error absoluto, esto no representa una buena cuantificación del error.

Se hará uso de las ideas expuestas en la definición 1.2, para llegar a una mejor medición del error dentro de una sucesión. Para esto, la idea es comparar las distancias entre dos términos consecutivos con respecto al valor real, lo que sería:

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{L} \right|$$

Pero es ilógico trabajar con el valor real, así que el mejor candidato para asumir este papel es el último término calculado en la sucesión, es decir x_n , esto lleva a la siguiente definición.

1.1.4.2 Error normalizado

Definición 1.7 (error normalizado). Sea (x_n) una sucesión, se define el error normalizado como la sucesión $EN = (EN_n)$ dada por:

$$(1.4) \quad EN_n = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$$

Para $n = 2, 3, \dots$ (Burden y Faires, 2003).

Para que una sucesión sea de Cauchy es necesario (más no suficiente) que la sucesión EN tienda a cero.

Esto da una forma de ver si una sucesión posiblemente es convergente sin el uso del valor del límite, es decir, si $EN_n \rightarrow 0$ la sucesión posiblemente será convergente.

Ejemplo 1.7. Para ilustrar esta definición, véase el siguiente ejemplo: si una sucesión es de Cauchy $EN \rightarrow 0$, la sucesión $a_n = \frac{3n}{7n+3}$ se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 3. Ejemplo 1.7

n	a_n	EN_n
1	0,3	-----
2	0,352941176	0,15000000000000
3	0,375	0,05882352941176
4	0,387096774	0,03125000000000
$\vdots$		
1.000	0,428387834	
1.001	0,428388017	0,00000042795987

Fuente: elaboración propia.

Recuérdese que en muchas ocasiones es más claro hablar en términos de porcentajes, por lo cual será más utilizado el error normalizado porcentual, el cual será definido a continuación.

1.1.4.3 Error normalizado porcentual

Definición 1.8 (error normalizado porcentual). Sea (x_n) una sucesión, se define el error normalizado porcentual como la sucesión $ENP = (ENP_n)$ dado por:

$$ENP_n = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| * 100\%$$

Para $n = 2, 3, \dots$, (Nieves, 1998, y Burden y Faires, 2003).

Al igual que en la definición 1.7, si una sucesión es convergente, entonces: $ENP_n \rightarrow 0$

Cuando $n \rightarrow \infty$ (ver ejemplo 1.6).

Ahora se ilustrará el uso del error normalizado y normalizado porcentual en una sucesión a fin de analizar su posible convergencia.

Ejemplo 1.8. Considerar la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Calcular los primeros once términos de la sucesión junto con los errores de normalizado y normalizado porcentual.

Tabla 4. Ejemplo 1.8

n	x_n	EN_n	ENP_n
0	1		
1	2	0,5	50,00000000%
2	2,5	0,2	20,00000000%
3	2,66666666666667	0,0625	6,25000000%
4	2,70833333333333	0,015384615	1,53846154%
5	2,71666666666667	0,003067485	0,30674847%
6	2,71805555555556	0,000510986	0,05109862%
7	2,71825396825397	0,0000729927	0,00729927%
8	2,71827876984127	0,0000091240	0,00091240%
9	2,71828152557319	0,0000010138	0,00010138%
10	2,71828180114638	0,0000001014	0,00001014%

Fuente: elaboración propia.

Gráfica 2. Código Matlab

```
function Ejemplo18()

format long
epn=1;
epNn=100;
a(1)=1
%No puedo colocar a(0), ya que los indices debern se enteros positivos
n=2;
b(1,1)=1;
b(1,2)=a(1);
b(1,3)=epn;
while(epn>0.001)
a(n)=a(n-1)+1/factorial(n-1);
% En el termino a(n-1), el valor de n es un contador de iteraciones y en
% el factorial es el valor de n que arma la serie.
epn=abs((a(n)-a(n-1))/a(n));
b(n,1)=n;
b(n,2)=a(n);
b(n,3)=epn;
n=n+1;
end
b
a';
f = figure('Position', [100 100 752 250]);
t = uitable('Parent', f, 'Position', [25 50 700 200], 'Data',b)

t.ColumnName = {'n', 'a(n)', 'ENn'};
t.ColumnWidth= {100, 100, 100,100};
t.ColumnFormat={'long','long','long'};
end
```

Fuente: elaboración propia.

Como se ve en la Tabla 4, EN y ENP son sucesiones y tienden hacia cero, esto significa que la sucesión (x_n) es posiblemente de Cauchy y, por lo tanto, posiblemente converge, pero no se sabe a qué valor, incluso, nunca se sabrá a qué valor.

La pregunta natural que se debe hacer es: ¿dónde detengo esta sucesión para tener una “buena aproximación” del límite? Antes de contestar, se necesita dar sentido a la expresión “buena aproximación”.

Comúnmente, se usa esta expresión para hablar de cifras decimales, por ejemplo, $\pi \approx 3.14$ es una aproximación de π con dos cifras decimales, pero ¿*cifras decimales* describe bien la magnitud que representa el número?, para esto se consideran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.9. El precio de un carro en el mercado es de 36.280.000, al quitar el IVA del 16% el valor del carro quedaría en:

$$(1.6) \ x = 31275862,06896552$$

Otra cantidad conocida es la décima parte de la unidad de masa atómica de un electrón que es:

$$(1.7) y = 0,000054857990946$$

Si se pide una aproximación de estos valores con tres cifras decimales se tendrá $\tilde{x} = 31.275.862,069$, $\tilde{y} = 0,000$, lo cual no es práctico en ninguno de los casos. En el primero es excesivo trabajar con tres cifras decimales y en el segundo no aporta nada de información acerca de la magnitud del valor, esto lleva a pensar cómo se puede dar una idea clara de la magnitud de un valor.

Esto ya no es un problema gracias a la notación científica, en el ejemplo anterior se tiene $x = 3,127586206896552 * 10^7$, $y = 5,4857990946 * 10^{-5}$, esto muestra que las cifras que realmente son significativas (sin importar la posición de ellas en la representación decimal) son las primeras que aparecen en la representación científica, esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.9 (dígito significativo o cifra significativa). Una cifra significativa es cualquiera de los dígitos 1, 2, 3, ..., 9; y 0 es una cifra significativa excepto cuando este es usado para fijar el punto decimal o para llenar los lugares de dígitos desconocidos o descartados. Así, en el número 0,00263 las cifras significativas son 2, 6, 3; los ceros son usados únicamente para fijar el punto decimal, por lo que no son cifras significativas. En el número 3.809, todos los dígitos, incluyendo el cero, son cifras significativas. En un número como 46.300 no hay cómo describir cuáles ceros son cifras significativas. Para corregir la ambigüedad, este número puede ser escrito en cualquiera de las siguientes formas $4.63 * 10^4$, $4.630 * 10^4$ o $4,6300 * 10^4$, así el número de cifras significativas está indicado por el factor a la izquierda (Scarborough, 1930).

De ahora en adelante (en lo posible), se buscará aproximar los valores por medio de cifras significativas y no de cifras decimales. Ahora, ¿cómo se sabe cuándo en una sucesión se está encontrando cierto número de cifras significativas?, para esto se definirá la tolerancia.

Antes de ver esto, considérese la relación entre el error relativo y el número de cifras significativas que se tienen en una aproximación con respecto al valor real.

Supóngase que se tienen los valores exactos dados por el precio sin IVA del carro del comentario anterior y la décima parte de la masa atómica de un electrón, es decir, los valores en las ecuaciones 1.6 y 1.7, se asume, además, que de alguna manera se llegó a una aproximación de estas cantidades, únicamente con cuatro cifras significativas, es decir, se tienen las aproximaciones:

$$(1.8) \bar{x} = 31.273.525 \quad \text{y} \quad \bar{y} = 0,00005485123$$

Se acotará el error relativo de manera independiente para estas aproximaciones:

$$\varepsilon_{rx} = \left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| = \left| \frac{31.275.862,06896552 - 31.273.525}{31.275.862,06896552} \right|$$

Y se pasarán estos valores a notación científica, entonces:

$$\left| \frac{3,127586206896552 * 10^7 - 3,1273525 * 10^7}{3,127586206896552 * 10^7} \right|$$

Al reducir, se tiene:

$$\left| \frac{3,127586206896552 - 3,1273525}{3,127586206896552} \right|$$

Y al restar la parte en el numerador se obtienen cuatro ceros, dado que la aproximación tiene cuatro cifras significativas:

$$\left| \frac{0,000233568965519737}{3,127586206896552} \right|$$

Como se tiene la certeza de cuatro ceros al inicio del numerador (podrían ser más), se puede desplazar la coma cuatro dígitos a la derecha y asegurar que este valor que queda va a ser menor a 10.

$$\left| \frac{2,33568965519737}{3,127586206896552} \right| * 10^{-4}$$

Y del denominador, como está expresado en notación científica, se puede asegurar que es mayor o igual a 1 y menor a 10. De esta observación se puede mostrar que este cociente es menor a 10, así se tiene, en general, que:

$$\varepsilon_{rx} = \left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| = \left| \frac{2,33568965519737}{3,127586206896552} \right| * 10^{-4} < 10^{-4} = 10^{-4}$$

Ahora, se realizará el mismo argumento para los valores y y $\bar{y}$, con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ry} &= \left| \frac{y - \bar{y}}{y} \right| = \left| \frac{0,000054857990946 - 0,00005485123}{0,000054857990946} \right| \\ &= \left| \frac{5,4857990946 * 10^{-5} - 5,485123 * 10^{-5}}{5,4857990946 * 10^{-5}} \right| \\ &= \left| \frac{6,760946}{5,4857990946} \right| * 10^{-4} < 10 * 10^{-4} \end{aligned}$$

Un caso extremo que se puede presentar es el siguiente, considérense las cantidades:

$$\bar{z} = 123,7421875 \text{ y } z = 123,73828125$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz} &= \left| \frac{z - \bar{z}}{z} \right| = \left| \frac{123,7421875 - 123,73828125}{123,73828125} \right| \\ &= \left| \frac{1,237421875 * 10^2 - 1,2373828125 * 10^2}{1,2373828125 * 10^2} \right| \\ &= \left| \frac{0,000039025}{7,3828125} \right| = \left| \frac{0,39025}{7,3828125} \right| * 10^{-4} < 10^{-1} * 10^{-4} \end{aligned}$$

Este es un caso muy especial debido a que en el tercer paso, al realizar la resta, el quinto dígito de $\bar{z}$, "4", debe prestar uno y queda convertido en "3", quedando un cero adicional en esa posición (cosa que no pasa en los ejemplos anteriores, con esto aparece un factor 10^{-1}).

Esto es una breve muestra de que si se tiene una aproximación únicamente con cuatro cifras significativas exactas (sin importar la magnitud del número), entonces el error relativo será menor que 10^{1-4} , 10^{-4} , o 10^{-1-4} .

Si se quiere hacer el mismo ejercicio con m cifras significativas, se llegará a un resultado similar, así, supóngase que la primera cifra significativa de un número x es k y se tiene una aproximación del valor únicamente con m cifras significativas, entonces dichos valores se pueden escribir como:

$$x = k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots * 10^h$$

$$\bar{x} = k.k_1k_2\dots k_{m-1}\bar{k}_m\bar{k}_{m+1}\dots * 10^h$$

Entonces el error relativo es:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| = \left| \frac{k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots * 10^h - k.k_1k_2\dots k_{m-1}\bar{k}_m\bar{k}_{m+1}\dots * 10^h}{k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots * 10^h} \right|$$

Al reducir, se tiene que:

$$\left| \frac{k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots - k.k_1k_2\dots k_{m-1}\bar{k}_m\bar{k}_{m+1}\dots}{k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots} \right|$$

Y al restar la parte en el numerador se obtienen m ceros, dado que la aproximación tiene m cifras significativas:

$$\left| \frac{0.0\dots 0l_m l_{m+1}\dots}{k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots} \right|$$

Donde $l_j = |k_j - \bar{k}_j|$ para $j = m, m+1, \dots$

Como se tiene la certeza de m ceros al inicio del numerador (podrían ser más), se puede desplazar la coma m dígitos a la derecha y obtener:

$$\left| \frac{l_m l_{m+1}\dots}{k.k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots} \right| * 10^{-m}$$

De lo cual se está seguro que:

$$(1.9) |l_m \cdot l_{(m+1)}\dots| < 10 \text{ o } |l_m \cdot l_{(m+1)}\dots| < 1 \text{ o } |l_m \cdot l_{(m+1)}\dots| < 10^{(-1)}$$

Como el denominador fue la parte numérica de la notación científica, se tiene que:

$$1 \leq |k \cdot k_1 k_2 \dots k_{(m-1)} k_m k_{(m+1)} \dots| < 10$$

De lo cual:

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{|k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots|} \leq 1$$

Que junto a 1.9 se llega a:

$$(1.10) \left| \frac{l_m l_{m+1}\dots}{k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots} \right| < 10^{-1} \left| \frac{l_m l_{m+1}\dots}{k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots} \right| < 1$$

$$\left| \frac{l_m l_{m+1}\dots}{k.k_1k_2\dots k_{m-1}k_mk_{m+1}\dots} \right| < 1$$

De lo anterior, se tiene el siguiente resultado, el cual fue probado de una manera más precisa (en la cual se trabajó con el redondeo) en Scarborough (1930). Nótese que para que este análisis tenga sentido es necesario que, si se quieren m cifras significativas, se deben utilizar por lo menos $m + 2$ cifras significativas, lo cual es posible aprovechando la potencia de las máquinas actuales.

Teorema 1.2. Si el número $\bar{x}$ es correcto en m cifras significativas, entonces el error relativo es menor que:

$$\varepsilon_r < 10^{-1-m}$$

Esto es consecuencia directa de las desigualdades en 1.10.

Nota 1.2. Una consecuencia directa del teorema anterior es que el error relativo porcentual es menor que:

$$\varepsilon_{r\%} < 10^{1-m} \%$$

Esta cota será usada como una medida de tolerancia para el error normalizado y normalizado porcentual, esto lleva a definir este valor, el cual depende del número de cifras significativas que se quieren.

1.1.4.4 Tolerancia

Si se tiene una sucesión en la cual el término x_{n+1} es una aproximación al valor real con m cifras significativas correctas, entonces el error relativo se puede acotar de la siguiente manera:

Definición 1.10 (tolerancia). Sea m el número de cifras significativas que se quieren en la aproximación de cierto valor, defínase y denótese la tolerancia por:

$$(1.11) \quad T_m = 10^{-1-m} = 10^{1-m} \%$$

Nota 1.3. La tolerancia escrita como $T_m = 10^{-1-m}$ es usada cuando se trabaja con el error normalizado (EN), mientras que la tolerancia escrita como $T_m = 10^{-1-m}\%$ es usada con error normalizado porcentual (ENP) (note que son iguales con respecto a la tolerancia).

También nótese que la tolerancia es un valor que no depende de ningún tipo de unidades.

El siguiente teorema relaciona la tolerancia con las sucesiones que se están trabajando. De todas las afirmaciones anteriores se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente, si el término x_n es una aproximación del valor del límite de la sucesión con m cifras significativas, entonces $ENP_n < T_m$.

Nota 1.4. Desafortunadamente, el recíproco del teorema anterior no se cumple y esto se podrá evidenciar en el Ejemplo 1.14.

Nota 1.5. En los libros clásicos, por ejemplo *Métodos numéricos* de Burden y Faires (2003), Chapra C. Steven (1988) y *Numerical Mathematical Analysis* de Scarborough, J. (1930), se trabaja con una tolerancia dada por:

$$(0,5 * 10^{2-m})\%$$

Esto se debe a que al tomar el término de la sucesión usan el redondeo sobre el mismo.

En estas notas se hará uso de la tolerancia para truncar las sucesiones en la aproximación que posiblemente comparta por lo menos m cifras significativas con el valor del límite (en realidad se está verificando cuantas cifras significativas comparten los dos últimos elementos creados en la sucesión), para ilustrar esto, considérese el siguiente ejemplo: