Vitor Probst Curtarelli

Análise de Sinais e Sistemas Lineares

1ª Edição

Florianópolis
2020

Agradecimentos

À minha família, que me deu condições,
Aos meus amigos, que me deram ajuda,
À minha namorada, que me deu apoio,
Aos meus professores, que me deram conhecimento,

Muito obrigado

Introdução

Na engenharia, sistemas físicos e práticos são modelados matematicamente de forma que, ao se estudar e se conhecer o comportamento matemático do modelo, possa-se compreender melhor o comportamento real do sistema físico.

Uma das principais técnicas para se estudar os os fenômenos físicos, é a modelagem através de sistemas lineares, em especial através de equações diferenciais.

O objetivo desse livro é expor ao leitor, de uma maneira didática e simples, os principais conceitos dessa área do conhecimento, com o objetivo de fazê-lo compreender todas as nuances e diversas aplicações daquilo que aqui é exposto.

Embora não seja necessário um conhecimento profundo e intrínseco de outras áreas da matemática, é interessante o leitor ter uma base boa de cálculo, geometria, álgebra e matemática básica. Fora esses conhecimentos, o livro não requer nenhuma outra leitura ou complemento, já que todos os conceitos e fundamentos que serão utilizados, estão também explicados aqui.

Conteúdo

Página

1 Fundamentos **1**

1.1 Definições 1

1.2 Funções Fundamentais 3

2 Sinais **7**

2.1 Intensidade de um Sinal 7

2.2 Operações Básicas sobre Sinais 9

2.3 Classificação de um Sinal 11

2.3.1 Modo Físico 11

2.3.2 Paridade 11

2.3.3 Valores Temporais 12

2.3.4 Valores de Amplitude 12

2.3.5 Periodicidade 13

3 Sistemas **14**

3.1 Classificação de Sistemas 14

3.1.1 Linearidade 14

3.1.2 Variância no Tempo 15

3.1.3 Instantâneo ou Com Memória 17

3.1.4 Causalidade 18

3.1.5 Estabilidade BIBO 19

3.2 Análise no Tempo de Sistemas *LIT* 20

3.2.1 Método do Operador D 21

3.2.2 Resposta à Entrada Nula 23

3.2.3 Operação de Convolução 25

3.2.4 Resposta ao Impulso 26

3.2.5 Caracterização do Sistema pela Resposta ao Impulso 27

3.2.6 Obtenção da Resposta ao Impulso . . 28

3.2.7 Resposta ao Estado Nulo 29

3.2.8 Respostas Forçada e Natural 30
3.2.9 Resposta de Sistema LIT à Entrada e^{st} 31

4 Transformadas **32**
4.1 Transformada de Laplace 33
4.1.1 Transformada Inversa de Laplace . . 33
4.1.2 Condição de Convergência e Abscissa de Convergência 34
4.1.3 Propriedades da Transformada de Laplace 35
4.1.4 Teorema do Valor Inicial 36
4.1.5 Teorema do Valor Final 36
4.2 Transformada Unilateral de Laplace 37
4.3 Resolução de E.D.O. usando Transformada de Laplace 38
4.3.1 Função de Transferência e Respostas do Sistema 38
4.3.2 Separação de Frações Parciais 40
4.4 Estabilidade de um Sistema 43
4.4.1 Diagrama de Polos e Zeros 43
4.4.2 Estabilidade por Análise dos Polos . 45
4.4.3 Convergência Marginal 47
4.4.4 Estabilidade por Análise da Resposta ao Impulso 48
4.5 Caracterização do Sistema pela Resposta ao Impulso 49
4.5.1 Instantâneo ou Com Memória 49
4.5.2 Causalidade 50
4.6 Resposta em Frequência de um Sistema 51
4.7 Diagrama de Bode 52
4.7.1 Comportamento de Zeros na Origem 54
4.7.2 Comportamento de Polos na Origem 55

4.7.3 Comportamento de Zeros Simples . . 56
4.7.4 Comportamento de Polos Simples . . 58
4.7.5 Comportamento de Zeros Complexo-Conjugados 60
4.7.6 Comportamento de Polos Complexo-Conjugados 64
4.8 Série de Fourier 67
4.8.1 Funções Ortogonais 67
4.8.2 Decomposição de um Vetor 69
4.8.3 Série de Fourier Exponencial Complexa 69
4.8.4 Série de Fourier de Senos e Cossenos 70
4.8.5 Série de Fourier de Cossenos Defasados 72
4.8.6 Identidade de Parseval 74
4.8.7 Existência e Convergência da Série de Fourier 75
4.8.8 Resposta em Frequência à Entrada Periódica 77
4.8.9 Transformada de Laplace de Sinais Periódicos 78
4.9 Transformada de Fourier 79
4.9.1 Extensão da Série de Fourier 79
4.9.2 Caso Particular da Transformada de Laplace 81
4.9.3 Transformada Inversa de Fourier . . 82
4.9.4 Propriedades da Transformada de Fourier 83
4.9.5 Teorema de Parseval 85
4.9.6 Análise de Fourier 86
4.9.7 Filtragem de Sinais pelo Espectro em Frequência 88

5 Amostragem e Sinais Amostrados **91**
5.1 Funções Importantes 92
5.2 Tipos de Amostragem 94
5.2.1 Amostragem Ideal 95
5.2.2 Amostragem Natural 96
5.2.3 Amostragem Sample'n'Hold 97
5.3 Análise no Domínio da Frequência 98
5.3.1 Teorema da Amostragem de Nyquist 98
5.3.2 Amostragem Ideal 99
5.3.3 Amostragem Natural 103
5.3.4 Amostragem Sample'n'Hold 105
5.3.5 Desrespeitando o Teorema da Amostragem 108

6 Sinais e Sistemas Discretos **111**
6.1 Discretização e Notações 111
6.2 Sinais Fundamentais 113
6.3 Operações sobre Sinais Discretos 115
6.3.1 Operadores Atraso e Avanço 115
6.3.2 Diferenciador Discreto 116
6.3.3 Integrador Discreto 118
6.3.4 Convolução Discreta ou Soma de Convolução 119
6.3.5 Reversão e Escalonamento 120
6.4 Diagrama de Blocos 122
6.4.1 Blocos Fundamentais e Equações de Diferenças 122
6.5 Transformada Z 125
6.5.1 Particularização da Transformada de Laplace 126
6.5.2 Região de Convergência 127
6.5.3 Propriedades da Transformada de Z . 128
6.5.4 Regime Permanente Oscilatório . . . 130

6.6 Transformada Unilateral Z 131
6.6.1 Deslocamento no Tempo 131
6.6.2 Resolução de Equações de Diferenças 132
6.7 Transformada Discreta de Fourier 134
6.7.1 Discretização da Transformada de Fourier 135
6.7.2 Particularização da Transformada Z . 136
6.7.3 Periodicidade da Transformada Discreta de Fourier 137
6.8 Estabilidade de Sistemas Discretos 138
6.9 Filtros Discretos 139
6.9.1 Filtros com Resposta Finita ao Impulso 139
6.9.2 Filtros com Resposta Infinita ao Impulso 141

A Apêndice de Exemplos 143
A.1 Intensidade de um Sinal 143
A.1.I Pulso Retangular 143
A.1.II Cosseno 144
A.1.III Função Constante 145
A.1.IV Exponencial 145
A.2 Sistemas Lineares e Não-Lineares 146
A.3 Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo . . 147
A.4 Sistemas Instantâneos ou Com Memória . . . 148
A.5 Sistemas BIBO 149
A.6 Sistemas Causais 150
A.7 Propriedades da Transformada de Laplace . . 151
A.8 Sinais e suas transformadas de Laplace 152
A.9 Sinais e Suas Transformadas de Fourier 155
A.10 Exemplo de Diagrama de Bode 158
A.11 Tabela de Transformadas Z 166

B Apêndice de Demonstrações **167**
B.1 Forma Exponencial Complexa do Seno e Cosseno 167
B.2 Decomposição pelo Modo Físico do Sinal . . . 168
B.3 Integração de Sinal Periódico num Período . . 169
B.4 Potência de um Sinal Periódico 171
B.5 Decomposição pela Paridade do Sinal 172
B.6 Propriedades da Convolução 173
B.6.I Comutatividade 173
B.6.II Associatividade 174
B.6.III Associatividade Escalar 175
B.6.IV Distributividade 175
B.6.V Elemento Neutro 176
B.6.VI Deslocamento 176
B.7 Propriedades da Transformada de Laplace . . 177
B.7.I Deslocamento no tempo 177
B.7.II Deslocamento no domínio s 178
B.7.III Escalonamento de variável 179
B.7.IV Convolução 180
B.7.V Diferenciação no Tempo 181
B.7.VI Multiplicação no tempo por t 182
B.8 Teorema do Valor Inicial 183
B.9 Teorema do Valor Final 184
B.10 Transformada Unilateral de $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 185
B.11 Transformada Unilateral de $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ 186
B.12 Saída Marginalmente Instável 187
B.13 L'Hopital da Saída Instável 188
B.14 Saída para Entrada Oscilatória 188
B.15 Ângulo do Inverso do Número 189
B.16 Derivada da Fase de um Zero Complexo-Conjugado 190
B.17 Produto Interno Sobre a Base $\mathcal{B}$ 192
B.18 Produto Interno de Vetores LD 193

B.19 Produto Interno entre $f(t)$ e um Vetor da Base 194
B.20 Coeficiente a_k em termos de c_k 195
B.21 Série de Fourier em Senos e Cossenos 196
B.22 Identidade de Parseval 197
B.23 Coeficiente c_k Existe 199
B.24 Propriedades da Transformada de Fourier . . . 200
B.24.I Simetria 200
B.24.II Dualidade 201
B.25 Demonstração do Teorema de Parseval 202
B.26 Coeficientes de Fourier do Pente de Dirac . . . 204
B.27 Transformada de Fourier do Pente de Dirac . 204
B.28 Transformada de Fourier do Pente de Pulsos . 205
B.29 Transformada de Fourier de $x_i(t)$ 206
B.30 Transformada de Fourier de $x_n(t)$ 207
B.31 Transformada de Fourier de $x_{SH}(t)$ 208
B.32 Propriedades da Transformada Z 209
B.32.I Deslocamento no Domínio n 209
B.32.II Escalonamento no Domínio z 210
B.32.III Convolução no Domínio n 210
B.32.IV Diferenciação no Domínio n 211
B.32.V Multiplicação no Domínio n por n . . 211
B.32.VI Integração no Domínio n 212
B.33 Periodicidade de Sinal Discreto 213
B.34 Transformada Unilateral Z de uma Função Deslocada 214
B.35 Periodicidade da D.F.T. 215
B.36 Estabilidade de um Sistema Discreto 216

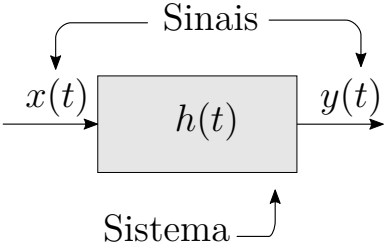
1 Fundamentos

1.1 Definições

Sinal - Um sinal é toda e qualquer entidade portadora de informação. Pode caracterizar-se como um sinal espacial (a temperatura de uma barra de ferro), um sinal químico/eletrônico (bits em um disco rígido), um sinal temporal (uma onda eletromagnética viajando pelo espaço), mas de forma geral, é uma forma de caracterizar matematicamente a informação. Nessa disciplina, serão abordados principalmente sinais temporais, embora a teoria desenvolvida possa ser aplicada a qualquer tipo de sinal. As caracterizações de um sinal, e como analisá-lo e usá-lo, serão conteúdos desse material e dessa disciplina.

Sistema - Ferramenta, ou método, para transformação de um sinal. É um mecanismo que realiza uma operação sobre um sinal de entrada (que será comumente chamado $x(t)$, ao longo das aulas e desse material), de forma a gerar um sinal de saída (denotado $y(t)$). São exemplos de sistemas: Uma caixa de som, responsável por amplificar o volume da música que entra nela; Um filtro, que remove sons de determinadas frequências de um sinal de áudio; Ou um processamento gráfico que, quando você amplia uma imagem, interpola os valores dos pixels que estão sendo gerados.

Como funciona um sistema, em particular um sistema linear, e as ferramentas para analisá-lo e estudá-lo, bem como uma introdução à teoria de como construí-los fisicamente e aplicá-los, são abordados nessa disciplina.



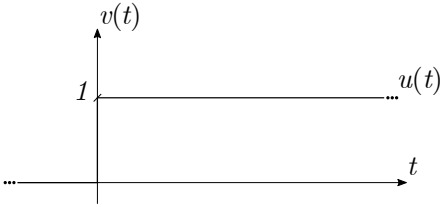
A relação entre a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ em um sistema, é dada por $x(t) \mapsto y(t)$.
A entrada $x(t)$ não necessariamente é unidimensional. Um sistema pode ter uma entrada $x(t)$ composta por m sinais unidimensionais, e uma saída $y(t)$ composta por n sinais unidimensionais. Nessa disciplina, serão estudados somente sistemas SISO (Single Input Single Output).

1.2 Funções Fundamentais

Existem algumas funções pouco conhecidas, mas que serão usadas extensivamente ao longo do curso. Essas são:

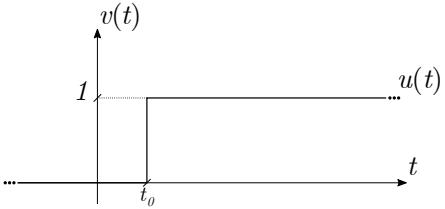
Degrau unitário:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & | \quad t < 0 \\ 1 & | \quad t > 0 \end{cases} \tag{1.2.1}$$



O degrau unitário é uma função convencionada criada para representar matematicamente descontinuidades de funções, e outros eventos que podem acontecer que não possuem representação adequada. Pode-se deslocar $u(t)$, tal que

$$u(t - t_o) = \begin{cases} 0 & | \quad t < t_o \\ 1 & | \quad t > t_o \end{cases}$$

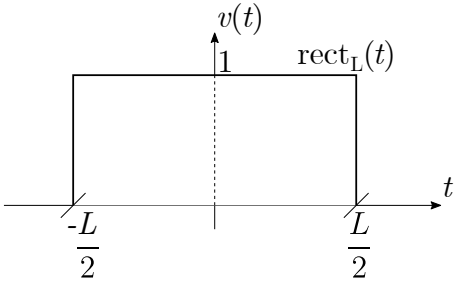


Retângulo simétrico:

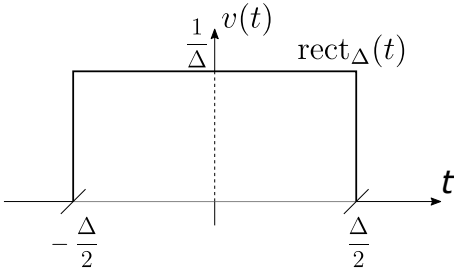
$$\text{rect}_L(t) = u\left(t + \frac{L}{2}\right) - u\left(t - \frac{L}{2}\right)$$

ou ainda

$$\text{rect}_L(t) = \begin{cases} 0 \;\; | & t < -\dfrac{L}{2} \\ 1 \;\; | & -\dfrac{L}{2} < t < \dfrac{L}{2} \\ 0 \;\; | & \dfrac{L}{2} < t \end{cases}$$



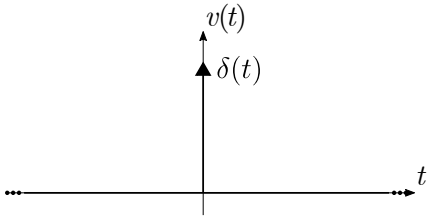
O retângulo simétrico é uma "porta" ao redor da origem, de largura L, e amplitude 1. O retângulo simétrico unitário (também conhecido como **Impulso** P_Δ) é dado por $P_\Delta = \dfrac{\text{rect}_\Delta(t)}{\Delta}$, de forma que sua energia é unitária.



Impulso unitário de Dirac:

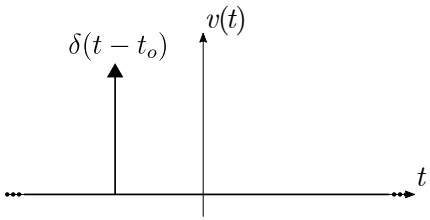
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \mid \forall \quad t \neq 0 \\ \infty & \mid \ t = 0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$



O impulso de Dirac, $\delta(t)$, é outra função convencionada. Ele possui valor 0 para todo $t \neq 0$, valor "infinito" em $t = 0$, e uma área (integral) de 1.

O impulso $\delta(t)$ pode ser descrito em função do impulso $P_\Delta(t)$, de forma que $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0^+} P_\Delta(t)$. Além disso, tem-se que $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau$. O impulso também pode ser deslocado, resultando em



Função exponencial:

A função exponencial, tanto a exponencial real quanto a complexa, também são de intenso uso no decorrer dessa disciplina, pelo fato de que sua derivada é proporcional a ela. É possível separar a função exponencial completa em 4 tipos diferentes:

$$x(t) = \kappa e^{st}; \qquad s = \sigma + j\omega$$

$$\begin{aligned}
s &= 0 && x(t) = \kappa e^{0t} = \kappa \\
s &= \sigma && x(t) = \kappa e^{\sigma t} \\
s &= j\omega && x(t) = \kappa e^{j\omega t} = \kappa \left[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\right] \\
s &= \sigma + j\omega && x(t) = \kappa e^{(\sigma + j\omega)t} = \kappa e^{\sigma t} \left[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\right]
\end{aligned}$$

Em ordem, tem-se a constante; a exponencial monotônica; a exponencial complexa (ou espiralar); e a exponencial complexa monotônica.

Também é importante observar que

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos(\omega t) \quad \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2} = \sin(\omega t) \quad \text{(Ap. B.1)}.$$

2 Sinais

Como já explicado anteriormente, um sinal é uma entidade portadora de informação, ou uma representação matemática dessa entidade. Um sinal pode ser visto como uma função matemática, sobre um domínio especificado. Os domínios que serão utilizados nessa disciplina serão o domínio temporal (t), e o domínio discreto [n].

2.1 Intensidade de um Sinal

Um dos primeiros conceitos sobre sinais a ser compreendido é a intensidade de um sinal. Dado um sinal $x(t)$, é útil quantizar de alguma maneira a quantidade de energia que ele possui. De maneira semelhante à física, é possível calcular sua energia como

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \tag{2.1.1}$$

De uma maneira gráfica, E_x é a integral da amplitude ao quadrado do sinal (essa ideia vinda da física), ao longo de toda a sua extensão de duração. Como, matematicamente, a duração de um sinal é indefinida e variável, calcula-se sua energia de $-\infty$ até $+\infty$, de modo que todo o sinal está sendo capturado pelo cálculo.

Também é possível calcular sua potência média ao longo da existência dele, dada por

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{T} \tag{2.1.2}$$

Como nem todo sinal possuirá uma energia finita, também é relevante criar um mecanismo para quantizar sinais que possuam energia e duração infinitas, mas que sejam ainda assim "quantizáveis". Também vindo da física, a potência de um sinal é definida por sua energia média num período de tempo, dividido por esse período. Como se está analisando um período de tempo infinito, nada mais cabível que fazer $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{T}$.

Generalizando, se $x(t)$ for um sinal complexo, pode-se fazer a substituição $|x(t)|^2 = x(t)\, x^*(t)$, e as expressões para energia e potência mantém-se as mesmas.
Um sinal é dito um **sinal de energia** se $E_x \neq 0$ e $E_x < \infty$, o que implica que $P_x = 0$.
Por outro lado, um sinal é dito um **sinal de potência** se $P_x \neq 0$ e $P_x < \infty$, o que implica que $E_x \to \infty$.

Como um sinal de potência possui energia infinita, e devido às leis da física, todo sinal real ou é um sinal de energia; contudo, modelam-se muitos sinais por aproximações matemáticas, o que torna útil o conceito de sinal de potência.

Exemplos no Ap. A.1, da pág. 143.

2.2 Operações Básicas sobre Sinais

Dado um sinal qualquer $x(t)$, é possível realizar operações sobre ele, obtendo o sinal resultante $\overline{x}(\bar{t})$, que pode ser expresso como uma "alteração" de $x(t)$. As 3 operações básicas são

Deslocamento	$x(t) \to \overline{x}(t - t_o)$	$\to$	$x(t_o) = \overline{x}(0)$
Escalonamento	$x(t) \to \overline{x}(at)$		
Reversão	$x(t) \to \overline{x}(-t)$		

Observe que reversão é um escalonamento por um fator de -1. Além disso, a combinação dessas operações básicas também é uma operação. Um fato importante a se observar é que, para um dado t_i a escolha, nos 3 casos anteriores, tem-se que $x(t_i) = \overline{x}(t_i - t_o)$ / $x(t_i) = \overline{x}(at_i)$ / $x(t_i) = \overline{x}(-t_i)$. Dessa maneira, é sempre possível observar se a operação que foi realizada analiticamente é coerente e está correta, testando valores úteis para t_i.

Exemplo: Seja $x(t)$ um sinal qualquer. Pode-se atrasá-lo, de forma que $\overline{x}(t) = x(t - 3)$. Em seguida, é possível atrasá-lo, de tal forma que $\overline{\overline{x}}(t) = x\left(\frac{t}{3} - 3\right)$. Inserindo um valor conveniente para t, como $t = 3$, concluímos que $\overline{\overline{x}}(3) = x(-2)$)

Aplicando agora um deslocamento em ambos os lados, pode-se obter $\overline{\overline{x}}(t'-2) = x\left(\frac{t'-2}{3}-3\right)$. Como $t = t'-2$, então $3 = t'-2 \implies t' = 5$, para o nosso teste. Assim, $\overline{\overline{x}}(5-2) = x\left(\frac{5-2}{3}-3\right)$, que resulta no mesmo $\overline{\overline{x}}(3) = x(-2)$. Fazendo as adaptações corretas de variáveis após uma transformação, e utilizando os valores corretos, sempre deve obter-se os mesmos valores.

Deve-se observar a ordem na qual se faz as operações, já que elas não são linearmente comutativas. Por exemplo: primeiro aplicar-se um deslocamento $t = t'-5$, e depois um escalonamento $t' = \frac{t''}{2}$ $\left(\text{portanto, } t = \frac{t''}{2}-5\right)$, é diferente de aplicar o mesmo escalonamento $t = \frac{t'}{2}$, e posteriormente o deslocamento $t' = t''-5$ $\left(\text{que implica } t = \frac{t''-5}{2} \neq \frac{t''}{2}-5\right)$.