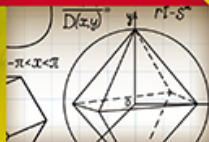
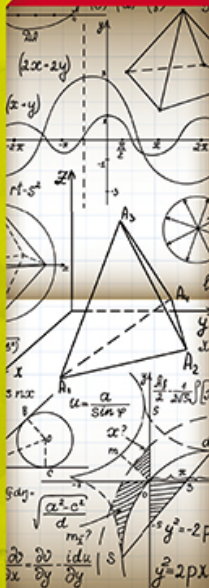


Colección
REVISADA y
ACTUALIZADA

Colección
Chuletas



MATEMÁTICAS

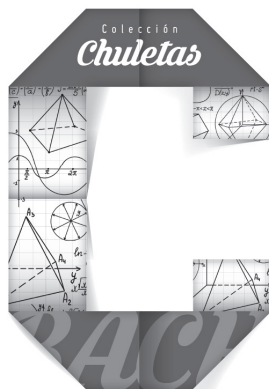
fáciles

Francisco Sánchez



BACHILLERATO
Y ACCESO A LA UNIVERSIDAD


ESPASA



MATEMÁTICAS

fáciles

BACHILLERATO

Francisco Sánchez

I

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

TEMA 1. LOS NÚMEROS REALES

1. NÚMEROS RACIONALES

Consideremos el conjunto de los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

La división entre estos números no es siempre posible, por ejemplo, si **12** lo dividimos entre **7**, el resultado no es otro número entero. Nos vemos en la necesidad de ampliar el conjunto $\mathbb{Z}$ a fin de poder realizar la división en todos sus casos.

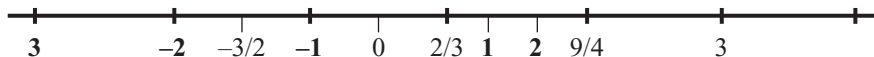
☞ Números racionales son todos los números de la forma $\frac{a}{b}$, siendo, $a, b \in \mathbb{Z}$ pero $b \neq 0$. El conjunto de los números racionales se representa por $\mathbb{Q}$. Son ejemplos de números racionales: $\frac{5}{3}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{3}$; etc.

2. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

☞ Los números racionales pueden ser representados sobre una recta. En un punto cualquiera de la misma situamos el **0** y eligiendo una unidad de medida arbitraria, situamos el **1** a la derecha. Todos los números positivos quedarán a la derecha de **0**, y los negativos, a la izquierda. Las divisiones, todas iguales, que haremos a la derecha se corresponden con los enteros positivos, y las de la izquierda, con los enteros negativos.

Cada número racional tiene un punto en la recta que le corresponde, por ejemplo, para representar el número $2\frac{2}{3}$, dividimos la primera unidad de la derecha de 0 en tres partes y tomamos dos.

Supongamos que queremos representar el número $9\frac{1}{4}$. Como $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$, a partir del número 2, dividimos la unidad en cuatro partes iguales y tomamos una.



3. EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL

Se realiza dividiendo el numerador entre el denominador.

Pueden darse dos casos:

A) NÚMEROS DECIMALES EXACTOS

☞ Se obtienen cuando la división tiene un número exacto de cifras decimales.

🔗 Ejemplos: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{5}{4} = 1,25$; $\frac{29}{200} = 0,145$

B) NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS

☞ Se obtienen cuando el número de cifras decimales es infinito, pero entre ellas se aprecia la existencia de un grupo de cifras que se repite indefinidamente. Son ejemplo de ello los siguientes:

$0,424242... = 0,4\overline{2}$; $3,14205205205... = 3,14\overline{205}$; etc.

Podemos encontrar la fracción generatriz que corresponde a cada número decimal periódico de la forma siguiente:

Sea, por ejemplo, el número decimal: **2,13131313...**

⇒ Llamamos x a la fracción que buscamos, es decir, $x = 2,13131313...$

⇒ Multiplicamos por 100 porque el grupo que se repite es de dos cifras:

$100x = 213,131313...$

⇒ Restamos miembro a miembro las dos igualdades obtenidas:

$$100x - x = 213,131313... - 2,13131313...; \text{ es decir, } 99x = 213 - 2$$

$$\Rightarrow \text{Despejamos la incógnita: } x = \frac{213 - 2}{99} = \frac{211}{99}$$

De una manera general podemos proceder de la forma siguiente:

$$f = \frac{EP - E}{\text{tantos nueves como cifras tiene } P}; \quad E: \text{ parte entera; } P: \text{ parte periódica}$$

En el caso de que exista un grupo de cifras antes de empezar la repetición, aplicaremos la fórmula siguiente:

$$f = \frac{EAP - EA}{\text{tantos nueves como cifras tiene } P \text{ seguido de tantos ceros como cifras tiene } A};$$

A : anteperíodo

 Ejemplo:

 Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

$$6,25252525...; 62,3125125125...$$

⇒ El primer número decimal es periódico puro, siendo $E = 6$; $P = 25$

$$6,25252525... = \frac{625 - 6}{99} = \frac{619}{99}$$

⇒ El segundo número es periódico mixto, donde $E = 62$; $A = 3$; $P = 125$

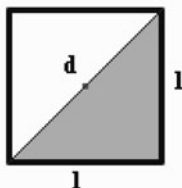
$$62,3125125125... = \frac{623.125 - 623}{9.990}$$

4. NÚMEROS IRRACIONALES

Tenemos un cuadrado de lado 1.

Para calcular la diagonal, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$



No existe ningún número racional de la forma $\frac{a}{b}$ que, elevado al cuadrado dé como resultado 2. El número $\sqrt{2}$ recibe el nombre de número irracional, ya que no es racional.

 Son ejemplos de números irracionales $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π , etc.

5. EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Si tratamos de extraer la raíz cuadrada de 2 con una calculadora o un ordenador, veremos que el número de cifras decimales no acaba nunca y no se aprecia la existencia de grupos de cifras que se repitan como en el caso de los números racionales.

 Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1,4142135623\dots$; $\pi = 3,141592653\dots$

Ésta es la característica de los números irracionales.

6. NÚMEROS REALES

 Es el conjunto formado por los números racionales y los irracionales. Se representa por la letra $\mathbb{R}$.

$$\text{Números reales} \begin{cases} \text{Números racionales : } \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-7}{5}, \text{ etc.} \\ \text{Números irracionales : } \sqrt{3}, 2\sqrt{7}, \pi, e, \text{ etc.} \end{cases}$$

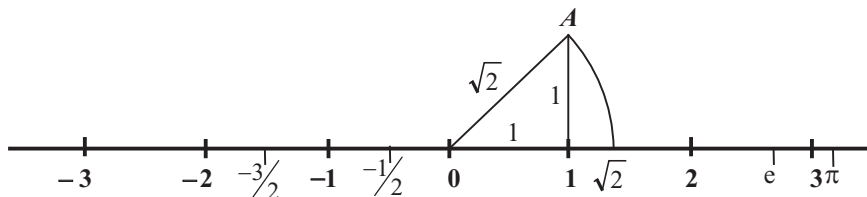
6.1. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

 Se representan sobre una recta y la representación se inicia de la misma manera que en el caso de los racionales.

Es muy importante destacar que no quedan puntos de la recta vacíos; es decir, a cada punto de la recta le corresponde un número real y para cada número real existe un punto en la recta para él.

Los números reales llenan totalmente la recta y ésta recibe el nombre de recta real.

Es engorrosa la representación de ciertos números reales, sin embargo, en algunos casos, puede ser hasta divertido. Veamos, por ejemplo, cómo se representa $\sqrt{2}$:



En el punto 1 elevamos un segmento a fin de construir un triángulo rectángulo cuyos catetos miden una unidad. Por el teorema de Pitágoras se obtiene que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$. Giramos la hipotenusa hasta que el punto A llegue a la recta y el punto de contacto representa a $\sqrt{2}$.

Hemos situado algunos números más en la recta y, entre ellos, de manera aproximada $\pi = 3,141592653\dots$ y $e = 2,7182818284\dots$

7. INTERVALOS EN LA RECTA REAL

Se emplean para designar tramos de la recta.

7.1. INTERVALO ABIERTO

☞ Intervalo abierto de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b pero sin contar los extremos. Se representa por (a, b) o bien por $]a, b[$. Simbólicamente: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

7.2. INTERVALO CERRADO

☞ Intervalo cerrado de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluidos los extremos.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

Del mismo modo se definen los intervalos semiabiertos:

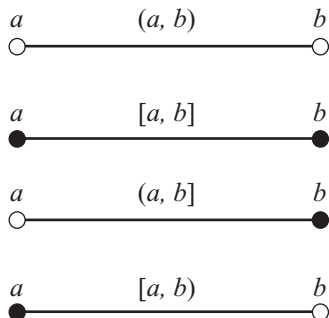
7.3. INTERVALO ABIERTO-CERRADO

$$\text{☞ } (a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

7.4. INTERVALO CERRADO-ABIERTO

$$\hookrightarrow [a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

Gráficamente, los intervalos definidos se representan así:



8. VALOR ABSOLUTO

$\hookrightarrow$ Valor absoluto de un número real a es el mismo número si a es positivo o nulo y el opuesto si a es negativo, es decir:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Ejemplo: $|3| = 3$; $|-5| = 5$

9. DISTANCIA

$\hookrightarrow$ Distancia entre dos números a y b es el valor absoluto de su diferencia.

$$d(a, b) = |b - a|$$

$\hookrightarrow$ Ejemplo: La distancia entre los números -3 y 5 será: $d(-3, 5) = |5 - (-3)| = 8$

10. ENTORNO

☞ Entorno de centro a y radio r es el conjunto de números reales cuya distancia al número a es menor que r . Se expresa por $E_r(a)$.

$$\text{Simbólicamente, } E_r(a) = \{x \in \mathbb{R} / |x - a| < r\}$$

La definición dada es equivalente a ésta: $E_r(a) = (a - r, a + r)$.

📎 Ejemplos:

✎ Escribe en forma de entorno el intervalo $I = (-2, 6)$.

$$\Rightarrow \text{Centro del entorno: } a = \frac{-2+6}{2} = 2; \text{ Radio: } r = d(2, 6) = |6 - 2| = 4 \\ (-2, 6) = E_4(2)$$

✎ Representa gráficamente $E_1(3)$.

$$\Rightarrow E_1(3) = (3-1, 3+1) = (2, 4)$$



11. APROXIMACIÓN DE NÚMEROS EN LOS CÁLCULOS

Ante la dificultad de operar con algunos números decimales es lícito tomar aproximaciones que simplifiquen las operaciones y faciliten el trabajo.

☞ Las aproximaciones que se realizan tomando números menores que el valor exacto, se llaman **aproximaciones por defecto**. Las que son mayores, **aproximaciones por exceso**.

11.1. APROXIMACIÓN POR REDONDEO

☞ Consiste en eliminar todas las cifras que siguen a una determinada cifra decimal sumando una unidad a la última de las no suprimidas si la siguiente es igual o mayor que 5.

 Ejemplos:

⇒ Al redondear hasta las centésimas el número 6,47692 hacemos lo siguiente:

$$6,47\cancel{692} \rightarrow \mathbf{6,48}$$

⇒ Al redondear hasta las milésimas el número 2,41632 procedemos así:

$$2,416\cancel{32} \rightarrow \mathbf{2,416}$$

Siempre que aproximamos números cometemos un error.

ERROR ABSOLUTO

☞ Es la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto.

ERROR RELATIVO

☞ Es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto.

12. RADICALES

Muchos números irracionales suelen expresarse en la forma $\sqrt[n]{a}$. Dicha expresión recibe el nombre de **radical**. Cada una de las partes del radical recibe el siguiente nombre: **a**: radicando; **n**: índice; $\sqrt{}$: signo radical.

 Ejemplos de radicales: $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[5]{b^2}$; etc.

☞ Los radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando reciben el nombre de radicales semejantes.

12.1. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

☞ Consiste en dividir el índice y el exponente del radicando por un mismo número. No siempre es posible simplificar un radical.

✎ Ejemplo: $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$

12.2. EXTRACCIÓN DE FACTORES DEL SIGNO RADICAL

☞ Cuando en un radical existen distintos factores en el radicando, pueden extraerse aquellos cuyo exponente sea divisible por el índice de la raíz. El factor extraído sale fuera del signo radical elevado al cociente de la división.

✎ Ejemplo: $\sqrt[4]{a^2b^5c^8} = \sqrt[4]{a^2b^4bc^8} = bc^2\sqrt[4]{a^2b}$

12.3. TRANSFORMACIÓN DE UN RADICAL EN UNA POTENCIA

☞ Una radical puede expresarse en forma de potencia de exponente fraccionario poniendo el radicando como base de la potencia y el índice de la raíz como denominador del exponente.

✎ Ejemplos: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}; \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$

13. OPERACIONES CON RADICALES

13.1. SUMAYRESTA

☞ Sólo está definida para aquellos que sean semejantes.

$$x^n\sqrt[n]{a} + y^n\sqrt[n]{a} + z^n\sqrt[n]{a} = (x + y + z)\sqrt[n]{a}$$

✎ Ejemplo: $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (1 - 5 + 2)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

13.2. PRODUCTO Y COCIENTE

☞ Tienen que tener el mismo índice. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

📎 Ejemplos: $\sqrt[3]{a^5b} \cdot \sqrt[3]{ab^4c} = \sqrt[3]{a^6b^5c}$; $\frac{\sqrt[5]{30a^2}}{\sqrt[5]{6a}} = \sqrt[5]{\frac{30a^2}{6a}} = \sqrt[5]{5a}$

13.3. POTENCIA

☞ $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

📎 Ejemplo: $(\sqrt[5]{a^2})^3 = \sqrt[5]{a^6}$

13.4. RAÍZ

☞ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

📎 Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

14. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

☞ Consiste en eliminar las raíces del denominador. Estudiaremos tres casos.

A) Producto de raíces cuadradas en el denominador.

⇒ Se multiplican numerador y denominador por las raíces que aparezcan en el denominador.

📎 Ejemplo: $\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{6^2}} = \frac{2\sqrt{30}}{5 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{15}$

B) En el denominador aparece un producto de una o más raíces de índice superior a 2.

⇒ Se multiplican numerador y denominador por las raíces del denominador modificadas en los siguientes términos: el exponente de cada una de las raíces que agregamos será la diferencia entre el índice y el exponente de las raíces iniciales.

✎ Ejemplo:
$$\frac{3}{\sqrt[7]{a^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[7]{a^5}} = \frac{3\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^2 a^5}} = \frac{3\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{3\sqrt[7]{a^5}}{a}$$

C) El denominador es un binomio con raíces cuadradas.

⇒ Se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador.

✎ Ejemplo:
$$\frac{10}{\sqrt{6}-2} = \frac{10(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{10(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = \frac{10(\sqrt{6}+2)}{6-4} = 5(\sqrt{6}+2)$$

15. LOGARITMOS

Observemos la siguiente operación: $2^3 = 8$.

Esta operación recibe el nombre de **potenciación** y en ella hemos tenido que calcular el 8, pero pueden darse otras situaciones:

A) No se conoce la base de la potencia, es decir, el 2.

⇒ Para obtenerla usamos la operación llamada **radicación**: $\sqrt[3]{8} = 2$.

B) No se conoce el exponente, es decir, el 3.

⇒ Para obtenerlo usamos la operación llamada **logaritmación** que se expresa así: $\log_2 8 = 3$.

☞ Logaritmo de un número x , en base a , es el número real y al que hay que elevar la base para obtener el exponente.

$\log_a x = y$ significa que $a^y = x$

Sólo están definidos los logaritmos para bases positivas y distintas de 1.

☞ Cuando la base es el número 10, ésta no se escribe. En este caso, los logaritmos reciben el nombre de **logaritmos decimales**.

📎 Ejemplo: $\log 1.000 = 3$ porque $10^3 = 1.000$

☞ Cuando la base es el número $e = 2,7182818284\dots$, los logaritmos reciben el nombre de **logaritmos neperianos**. Suelen designarse por **L**.

15.1. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

⇒ El logaritmo de 1, en cualquier base es 0 porque toda potencia de exponente 0 vale la unidad.

⇒ $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$

⇒ Logaritmo de un producto: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

⇒ Logaritmo de un cociente: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

⇒ Logaritmo de una potencia: $\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x$

⇒ Logaritmo de una raíz: $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$

Todas las propiedades se demuestran usando las propiedades de las potencias.

📎 Ejemplo:

🔪 Calcula $\log_{\frac{1}{2}} 8$; $\log \frac{1}{10.000}$; $\log_3 \sqrt[5]{81}$

⇒ $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$; $\frac{1}{2^x} = 2^3$; $2^{-x} = 2^3$; es decir, $x = -3$

⇒ $\log \frac{1}{10.000} = x \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{10.000}$; es decir, $10^x = 10^{-4}$, luego $x = -4$

⇒ $\log_3 \sqrt[5]{81} = x \Leftrightarrow 3^x = \sqrt[5]{3^4}$; por tanto, $3^x = 3^{\frac{4}{5}}$ y entonces $x = \frac{4}{5}$

TEMA 2. ECUACIONES E INECUACIONES

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

☞ Son las que pueden ser reducidas a la forma $ax + b = 0$. Para resolverlas se siguen los siguientes pasos:

- ⇒ Quitar denominadores, si los hay.
- ⇒ Quitar paréntesis.
- ⇒ Reducir términos hasta llegar a la forma $ax + b = 0$.
- ⇒ Despejar la incógnita.

✎ Ejemplo:

✎ Resuelve la ecuación: $\frac{x-3}{2} + 7 = x - \frac{5-x}{4}$.

⇒ El m.c.m. de los denominadores es 4.

Dividimos el m.c.m. obtenido entre cada uno de los denominadores de la ecuación y los resultados se van multiplicando por los numeradores:

$$2(x-3) + 28 = 4x - 1 \cdot (5-x)$$

$$2x - 6 + 28 = 4x - 5 + x$$

$$27 = 3x ; \text{ es decir, } \frac{27}{3} = x; 9 = x ; \text{ o bien, } x = 9$$

2. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

☞ Son las de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo $a \neq 0$. Pueden ser de tres tipos:

A) Cuando $b = 0$, se obtiene $ax^2 + c = 0$. La solución es $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

 Ejemplo:

✎ Resuelve la siguiente ecuación incompleta: $4x^2 - 25 = 0$.

$$\Rightarrow 4x^2 = 25; \quad x^2 = \frac{25}{4}; \quad x = \sqrt{\frac{25}{4}} = \pm \frac{5}{2}$$

B) Cuando $c = 0$, resulta $ax^2 + bx = 0$. Se resuelve sacando factor común a x :

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

 Ejemplo:

✎ Resuelve la ecuación $2x^2 + 5x = 0$.

$$\Rightarrow x(2x + 5) = 0; \text{ y entonces } \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

En este tipo de ecuaciones siempre hay una solución que es $x = 0$.

C) Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, resulta $ax^2 + bx + c = 0$ (Ecuación completa de 2.º grado).

La fórmula para resolverla se obtiene de la forma siguiente:

⇒ Pasamos c al segundo miembro: $ax^2 + bx = -c$.

⇒ Multiplicamos por $4a$ buscando un cuadrado perfecto: $4ax^2 + 4abx = -4ac$.

⇒ Sumamos b^2 a los dos miembros: $4ax^2 + 4abc + b^2 = b^2 - 4ac$.

⇒ El primer miembro ya es un cuadrado perfecto, por tanto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

⇒ Ya podemos despejar la incógnita: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

 Ejemplo:

 Resuelve $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

⇒ Aplicando la fórmula obtenida anteriormente, se obtiene:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

El término $b^2 - 4ac = \Delta$ recibe el nombre de discriminante y el número de soluciones de la ecuación depende del signo de éste:

⇒ Si $\Delta > 0$, existen dos soluciones reales y distintas.

⇒ Si $\Delta = 0$, las dos soluciones son iguales (raíz doble).

⇒ Si $\Delta < 0$, no existen soluciones reales.

3. ECUACIONES BICUADRADAS

 Una ecuación es bicuadrada si es de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Puede resolverse directamente aplicando la fórmula $x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

También podemos hacer el cambio de variable $x^2 = t$ transformándola en una ecuación de 2.º grado: $at^2 + bt + c = 0$. Las soluciones finales se obtienen hallando las raíces cuadradas de t .

 Ejemplo:

 Resuelve la ecuación $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

⇒ Aplicando la fórmula $x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se obtiene:

$$x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

Si $x^2 = 4$, $x = \sqrt{4} = \pm 2$. Si $x^2 = 2$, $x = \pm \sqrt{2}$

4. ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO SUPERIOR A DOS

 No existe un método general para resolver este tipo de ecuaciones. En muchos casos puede ayudarnos la regla de Ruffini buscando soluciones entre los divisores del término independiente.

 Ejemplo:

 Resuelve la ecuación $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = 0$.

⇒ Sacamos factor común a x : $x(x^3 - x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$

Para resolver $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$, buscamos otra solución entre los divisores del término independiente, que son ± 1 y ± 2 . Si aplicamos Ruffini:

1	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0

Ya tenemos otra solución que es $x = 0$.

El cociente de la división representa a una ecuación de segundo grado que ya podemos resolver: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$; es decir, $x = \pm 2$.

A veces, las ecuaciones aparecen factorizadas formando producto de polinomios de diferentes grados. Nunca se deben realizar los productos. Se resuelven igualando cada uno de los factores a cero y resolviendo las ecuaciones resultantes.

 Ejemplo:

 Resuelve la ecuación siguiente: $(x + \pi)(2x - 5)(x^2 - 3x + 2) = 0$.

⇒ Procedemos de la forma siguiente:

$$(x + \pi)(2x - 5)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \pi = 0 \\ 2x - 5 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo cada una de ellas por separado, se obtienen las soluciones siguientes: $x = -\pi$; $x = \frac{5}{2}$; $x = 2$; $x = 1$.

5. ECUACIONES IRRACIONALES

 Son aquellas en las que **la incógnita figura bajo un signo radical**. Son muy frecuentes las que llevan un radical o dos radicales de índice 2.

5.1. ECUACIONES CON UN SOLO RADICAL

- ⇒ Despejamos el radical dejándolo sólo en un miembro.
- ⇒ Elevamos los dos miembros al índice de la raíz.

5.2. ECUACIONES CON DOS RADICALES DE ÍNDICE 2

- ⇒ Despejamos uno de los radicales.
- ⇒ Elevamos los dos miembros al cuadrado y desaparece el radical despejado.
- ⇒ Se reducen términos y se despeja el radical que queda.
- ⇒ Se vuelve a elevar al cuadrado.

 Ejemplo:

✎ Resuelve estas ecuaciones: $\sqrt{2x+2} - x + 3 = 0$; $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} - 5 = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+2} = x-3; \left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = (x-3)^2; 2x+2 = x^2 - 6x + 9$$

La ecuación resultante es de segundo grado, por tanto, $x^2 - 8x + 7 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

Debe comprobarse que las soluciones obtenidas verifican la ecuación.

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} = 5 - \sqrt{x+4}; \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x+4}\right)^2$$

Desarrollando los cuadrados se obtiene $x-1 = 25 - 10\sqrt{x+4} + x+4$

Despejamos el radical que queda y reducimos términos: $10\sqrt{x+4} = 30$

Dividiendo por 10: $\sqrt{x+4} = 3$

Elevamos otra vez al cuadrado: $\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = 3^2$; es decir, $x+4 = 9 \Rightarrow x = 5$

6. ECUACIONES EXPONENCIALES

✎ Son aquellas en las que **la incógnita figura en el exponente**. No existe una regla general para resolverlas. Normalmente, hay que tener en cuenta las propiedades de las potencias.

 Ejemplos:

✎ Resuelve la siguiente ecuación exponencial: $2^{3x-1} = \sqrt[3]{4}$.

$\Rightarrow$ Como solamente hay dos términos, intentaremos expresarla como dos potencias de la misma base: $2^{3x-1} = \sqrt[3]{2^2}$; es decir, $2^{3x-1} = 2^{\frac{2}{3}}$. Y ahora igualamos los exponentes: $3x-1 = \frac{2}{3} \Rightarrow 9x-3 = 2 \Rightarrow 9x = 5$. La solución es $x = \frac{5}{9}$

✎ Resuelve la ecuación $3^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{x-1} = 81$.

⇒ La ecuación propuesta podemos expresarla en la forma siguiente:

$3^x \cdot 3^1 - 2 \cdot 3^x - 2 \cdot \frac{3^x}{3^1} = 81$. Haciendo el cambio de variable $3^x = y$, se obtiene:

$3y - 2y - 2\frac{y}{3} = 81$. Quitando denominadores: $9y - 6y - 2y = 243$; es decir,

$y = 243$. Si volvemos al cambio de variable, $3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

7. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

☞ Una ecuación es logarítmica cuando **la incógnita aparece afectada por un logaritmo**.

Para resolver estas ecuaciones hemos de aplicar las propiedades de los logaritmos eliminando todas las sumas y diferencias de logaritmos que aparezcan. Después se quita el logaritmo.

✎ Ejemplos:

✎ Resuelve: $\log(x+1) - \log x = 1$.

⇒ $\log(x+1) - \log x = \log 10 \Rightarrow \log \frac{x+1}{x} = \log 10$:

Quitando el logaritmo:

$\frac{x+1}{x} = 10 \Rightarrow x+1 = 10x$; es decir, $1 = 9x$. La solución es $x = \frac{1}{9}$

✎ Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $2 \log x + 1 = \log 4 + \log 5x$.

⇒ $\log x^2 + \log 10 = \log 4 + \log 5x$

Transformamos las sumas en productos: $\log(10x^2) = \log(4 \cdot 5x)$

Quitamos el logaritmo: $10x^2 = 20x$

Ecuación incompleta de 2.º grado cuyas soluciones son: $x = 0$; $x = 2$

La solución $x = 0$ no es válida.

8. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

☞ Las inecuaciones son desigualdades que **se verifican para ciertos valores de la variable**. Tienen gran utilidad en el cálculo de dominios de muchas funciones.

8.1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO

☞ Se resuelven igual que las ecuaciones, pero siempre que se multiplique o divida por un número negativo tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad.

Veamos cómo se resuelve la inecuación $\frac{4-x}{5} - \frac{1-2x}{3} \geq 1+x$

⇒ Quitamos denominadores de la misma manera que si fuese una ecuación:

$$3(4-x) - 5(1-2x) \geq 15(1+x)$$

⇒ Quitamos paréntesis y reducimos términos: $12 - 3x - 5 + 10x \geq 15 + 15x$, y simplificando: $-8x \geq 8$. Antes de despejar la incógnita hemos de cambiar el signo cambiando también el sentido de la desigualdad: $8x \leq -8 \Rightarrow x \leq \frac{-8}{8}$; es decir, $x \leq -1$. El conjunto de soluciones son todos los números del intervalo $(-\infty, -1]$.

Muy importante

Antes de despejar la incógnita el término que la lleva debe de ser positivo.

8.2. INECUACIONES DE GRADO IGUAL O SUPERIOR A DOS

El procedimiento para resolver este tipo de inecuaciones es el siguiente:

⇒ La desigualdad la transformamos en igualdad y resolvemos la ecuación resultante.

⇒ Factorizamos la inecuación.

⇒ Las soluciones obtenidas las representamos en una recta.

⇒ Tomamos un punto cualquiera de cada intervalo resultante y sustituimos en la inecuación.

⇒ Si el punto elegido verifica la desigualdad, el intervalo correspondiente es solución de la inecuación.

Resolvemos, como ejemplo, la inecuación $x^2 - x - 6 < 0$.

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0; \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La inecuación factorizada queda de la forma siguiente: $(x+2)(x-3) < 0$.

Tomamos un punto de cada intervalo y estudiamos si se verifica la desigualdad.

Solamente se verifica para cualquier valor del intervalo $(-2, 3)$. En los otros dos intervalos no se cumple. Gráficamente lo podemos expresar así:



$\Rightarrow$ El conjunto de soluciones son todos los números del intervalo $(-2, 3)$.

8.3. INECUACIONES RACIONALES

Previamente hemos de operar en ellas hasta ponerlas en la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$,
El signo de desigualdad puede ser cualquiera: $\leq, <, \geq$ o $>$.

Procedimiento:

$\Rightarrow$ Igualamos el numerador a cero y resolvemos la ecuación resultante.

$\Rightarrow$ Igualamos el denominador a cero y también resolvemos la ecuación.

$\Rightarrow$ Todas las soluciones obtenidas las representamos en una recta. Los puntos correspondientes a soluciones del denominador siempre han de ser abiertos.

$\Rightarrow$ Se elige un punto cualquiera de cada intervalo y se estudia si se verifica la desigualdad de la misma manera que en el caso de las inecuaciones de grado igual o superior a dos.

Resolvamos, como ejemplo, la inecuación $\frac{x^2 - 9}{x + 1} \leq 0$.