

Aurélien Barrau, Julien Grain

Relativité générale

3^e ÉDITION

DUNOD

Les auteurs remercient le Laboratoire d'excellence ENIGMASS pour son soutien.

© Dunod, Paris, 2011, 2016, 2023
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086075-3

TABLE DES MATIÈRES

Préface	V
Chapitre 1. Les idées de la relativité générale	1
1.1 Vers le principe d'équivalence	1
1.2 Conséquences du point de vue relativiste	3
1.3 Retour sur le principe d'équivalence	4
Exercices	7
Corrigés	8
Chapitre 2. Relativité restreinte	11
2.1 Construction de la transformation de Lorentz	11
2.2 Quelques conséquences fondamentales	18
Exercices	27
Corrigés	30
Chapitre 3. Qu'est-ce que la courbure ?	35
3.1 Principe d'équivalence : un peu plus précisément	35
3.2 Courbure spatiale	37
3.3 Courbure spatiotemporelle	42
Exercices	44
Corrigés	46
Chapitre 4. Premier aspect de la relativité générale : la physique en espace courbe	51
4.1 Éléments d'analyse tensorielle	51
4.2 Première approche de la théorie d'Einstein	58
4.3 Covariance généralisée et équation géodésique	64
Exercices	68
Corrigés	70
Chapitre 5. Second aspect de la relativité générale : comment la masse crée la courbure	75
5.1 Tenseur de courbure de Riemann	75
5.2 Tenseur énergie-impulsion	80
5.3 Équations d'Einstein	83
5.4 Ondes gravitationnelles	86
5.5 Qu'est exactement la relativité générale ?	91
Exercices	94
Corrigés	97

Relativité générale

Chapitre 6. Approche lagrangienne de la relativité générale	103
6.1 Retour sur le principe de moindre action	103
6.2 Action de Einstein-Hilbert	104
6.3 Dérivation des équations d'Einstein	107
6.4 Constante cosmologique	115
6.5 Extension de la relativité générale	116
Exercices	118
Corrigés	122
Chapitre 7. Cosmologie	127
7.1 Métrique FLRW	127
7.2 Équations de Friedmann-Lemaître	133
7.3 Dynamique cosmologique	141
7.4 Modèle cosmologique standard : morceaux choisis	146
7.5 Éléments de thermodynamique dans l'univers primordial	162
7.6 Des paradoxes dans le paradigme ?	168
Exercices	172
Corrigés	174
Chapitre 8. Trous noirs	179
8.1 Métrique de Schwarzschild	179
8.2 Physique au voisinage d'un trou noir	187
8.3 À l'intérieur du trou noir	195
8.4 Un peu plus loin	198
Exercices	204
Corrigés	208
Chapitre 9. Vers la gravitation quantique : la voie des cordes	216
9.1 Idées fondamentales	216
9.2 Une première ébauche d'introduction	218
9.3 Histoire, incertitudes et conséquences	223
Exercices	224
Corrigés	227
Chapitre 10. Vers la gravitation quantique : la voie des boucles	230
10.1 Idées fondamentales	230
10.2 Un peu de formalisme	233
10.3 Cosmologie quantique à boucles	238
Exercices	241
Corrigés	244
Bibliographie	248
Index	249

PRÉFACE

La relativité générale n'est pas une théorie parmi d'autres. Elle est notre meilleure description de l'espace et du temps. Elle est la découverte, d'une part de ce que l'un et l'autre sont susceptibles de se distendre et de se distordre en présence de matière mais surtout de ce qu'ils deviennent des grandeurs dynamiques. Des champs parmi d'autres. Ce qu'on pourrait encore exprimer ainsi : la relativité d'Einstein montre que l'espace-temps est le champ gravitationnel.

Ce livre n'a aucune prétention à l'exhaustivité ni à la rigueur. Il est une première introduction à cet univers fascinant, qui se veut accessible et intuitive. Nous y évitons soigneusement les formalismes trop abstraits et les notions trop complexes. Nous proposons néanmoins de découvrir ce que la relativité a changé à notre compréhension du Cosmos et des trous noirs. Nous esquissons même une ébauche de description des modèles spéculatifs de gravitation quantique. Sans oublier les ondes gravitationnelles qui se trouvent au cœur de l'actualité.

Cette nouvelle édition est enrichie d'un chapitre original dévolu à l'inflation cosmologique et à la thermodynamique dans l'Univers primordial.

La découverte de la relativité générale est un moment privilégié dans la vie des jeunes physiciens et physiciennes. Ce livre tente de le rendre aussi exaltant que possible, en minimisant les rencontres indigestes qui, inévitablement, jalonnent le parcours de celles et ceux qui se destinent à la recherche.

Nous sommes aujourd'hui à l'orée d'une catastrophe civilisationnelle sans précédent qui se manifeste, entre autres, par le désastre écologique en cours. Nous pensons que la science peut jouer un rôle essentiel dans ce drame qui trouve son origine dans nos valeurs et nos symboles nécrosés.

Non pas en proposant d'équilibrer les bilans carbone mais en contribuant à réenchanter le monde et à proposer de nouveaux horizons ontologiques. Nous aimerions que ce petit ouvrage soit une très infime et modeste contribution à cet immense chantier.

LES IDÉES DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1

INTRODUCTION

Ce chapitre entend donner un premier aperçu rapide des idées fondatrices de la relativité générale. Il s'agit, de façon très qualitative, de comprendre rapidement d'où vient le célèbre adage suivant lequel, dans la théorie d'Einstein, « l'espace-temps est courbe » et cette courbure *est* la gravitation. Il s'adresse au lecteur déjà familier des rudiments de relativité restreinte.

1.1 VERS LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

La caractéristique la plus frappante du champ gravitationnel est sans doute la suivante : tous les corps, quelles que soient leurs masses et leurs compositions, s'y meuvent de la même manière pour les mêmes conditions initiales. Autrement dit, quand on écrit la loi fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ pour la force gravitationnelle $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, la masse se simplifie et ne subsiste pas dans l'équation du mouvement : $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Ce résultat demeure évidemment valide même si l'on ne considère pas un champ gravitationnel uniforme. Dans le champ de gravité (et seulement dans le champ de gravité), les trajectoires ne dépendent pas des particularités des corps.

Cette propriété fondamentale du champ gravitationnel permet d'établir un parallèle très important entre le mouvement d'un corps dans le champ de gravité et celui d'un corps libre (non soumis à la force gravitationnelle), mais considéré dans un référentiel accéléré. Si, en effet, on rapporte le mouvement de corps – préparés suivant les mêmes conditions initiales dans un référentiel d'inertie – à un référentiel accéléré, ils s'y déplaceront tous de la même façon. Exactement comme dans un champ de gravitation. C'est le cœur du principe d'équivalence : les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont les mêmes qu'en l'absence de champ mais dans un référentiel accéléré et donc non inertiel. De façon remarquable, nous avons ici déjà fait l'essentiel du chemin menant à la relativité générale !

Il est nécessaire de considérer un référentiel *accéléré* car les trajectoires dans un champ de gravitation ne sont, vues d'un référentiel d'inertie, bien évidemment pas uniformes. Le déplacement du référentiel qui permet de générer des trajectoires équivalentes à celles du champ gravitationnel est donc bel et bien accéléré. Considérons, par exemple, la chute d'objets de masses et de compositions différentes, mais soumis

aux mêmes conditions initiales, dans une petite pièce où le champ de gravité peut être considéré comme identique en tous points. Ils suivent une trajectoire uniformément accélérée (avec une accélération g) vers le sol. Si maintenant on considère exactement la même situation, à ce détail près que le champ gravitationnel serait absent mais que la pièce et son référentiel associé seraient accélérés vers le haut (avec, en valeur absolue, la même accélération g), on se trouve bien face à des observations strictement identiques. Les deux circonstances ne peuvent être distinguées. Un référentiel uniformément accéléré est équivalent à un champ gravitationnel homogène. Si l'accélération du référentiel n'est pas uniforme, elle peut rendre compte d'un champ non constant temporellement.

Il est important de bien comprendre dès maintenant que cette démarche ne fonctionne qu'avec la gravitation. Imaginons qu'une charge électrique se déplace entre le plafond chargé positivement et le plancher chargé négativement. On peut évidemment, pour cette trajectoire particulière, considérer que tout se passe comme s'il n'y avait pas de champ électromagnétique mais plutôt un certain déplacement du référentiel. C'est toujours possible et cela semble analogue au raisonnement précédent. Mais, dans ce cas, cette démarche n'aurait aucun sens : une autre charge électrique aurait un autre mouvement (même à conditions initiales identiques) et il n'y a donc pas une accélération *unique* du référentiel qui permette de rendre compte de toutes les trajectoires. L'équation du mouvement est $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$ et les caractéristiques (charge q et masse m) de la charge ne se simplifient pas. C'est le caractère universel de la gravitation, le fait qu'elle se couple identiquement avec tous les corps, quelles que soient leurs caractéristiques intrinsèques, qui rend l'équivalence avec un mouvement accéléré du référentiel fructueuse.

Il faut insister sur un point fondamental dont les conséquences sont centrales en relativité générale : les champs auxquels sont équivalents les référentiels non inertiels ne sont pas rigoureusement identiques aux champs gravitationnels usuels dans les référentiels d'inertie. Les champs « réels » (cette expression ne sous-tend ici aucun « réalisme » philosophique supposant que la physique donnerait accès au « réel » en soi, bien au contraire) sont toujours inhomogènes et l'équivalence n'est donc possible que *localement*. L'élimination du champ ne peut se faire que dans une région de l'espace suffisamment petite pour que le champ soit considéré comme constant à la précision requise.

Fondamentalement, la relativité générale consiste à prendre au sérieux cette analogie. Bien qu'il nous soit très familier (mais la familiarité est parfois le signe d'une aveuglante proximité) le concept de « force à distance » est extrêmement complexe et conceptuellement coûteux. Il tire justement sa légitimité de sa capacité à rendre compte aisément d'effets qui dépendent des caractéristiques des corps. Si, dans le cadre gravitationnel, l'universalité du couplage permettrait de s'affranchir du

recours à des « forces » et autorisait un retour à une vision plus « géométrique » – une physique platonicienne en quelque sorte – il s’agirait sans aucun doute d’une simplification considérable de la théorie. Tel est l’enjeu de la relativité générale. Quelles que soient les difficultés calculatoires qui peuvent survenir, il est raisonnable de considérer que la théorie d’Einstein est, conceptuellement, beaucoup plus simple que la gravitation newtonienne.

1.2 CONSÉQUENCES DU POINT DE VUE RELATIVISTE

En explorant les conséquences du principe d’équivalence dans le cadre de la relativité restreinte, il est aisé de comprendre comment ce que Newton voyait comme un champ gravitationnel va devenir, chez Einstein, un effet géométrique. La quantité fondamentale en relativité restreinte est effectivement l’intervalle¹ $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Son invariance par changement de référentiel d’inertie est le cœur de la théorie. C’est ce qui traduit mathématiquement toute la structure de la relativité restreinte et permet de voir émerger immédiatement les effets de dilatation du temps ou contraction des longueurs. Suivant une approche historique, on pourrait aisément montrer que l’intervalle est invariant en utilisant les symétries fondamentales de l’espace-temps. Ou, suivant une approche plus moderne, construire la transformation de Lorentz (ce qui sera fait au prochain chapitre) et vérifier qu’elle laisse effectivement l’intervalle invariant. Quelle que soit l’approche, le fait que l’intervalle ne change pas lorsqu’on passe d’un référentiel d’inertie à un autre est le point nodal de la relativité restreinte.

Or, précisément, nous venons d’établir que les champs gravitationnels sont équivalents à des référentiels non inertiels. Et si l’on passe à un référentiel non inertiel, l’intervalle n’a plus aucune raison de garder la même forme ! En général, l’intervalle ne s’écrit plus comme une somme des carrés des différentielles des coordonnées. Puisque l’intervalle encode la géométrie (il est en quelque sorte la généralisation du théorème de Pythagore à un espace quadri-dimensionnel pseudo-euclidien²), la modification de sa forme signifie une *modification géométrique*. Le cadre conceptuel de la relativité générale est ici planté.

Si l’on considère, par exemple, la transformation des coordonnées lors du passage d’un système inertiel à un système en rotation à vitesse angulaire constante, il est très simple de montrer que l’expression de ds^2 dans le second système ne *peut pas*

1. Nous utilisons ici, comme dans l’essentiel du livre (sauf quand il est utile de procéder autrement), les unités naturelles. C’est-à-dire que la vitesse de la lumière est prise à $c = 1$. Quelle autre unité de vitesse serait en effet plus naturelle que celle de la lumière ?

2. « Pseudo »-euclidien signifie simplement qu’il y a des signes « - » devant les termes dx^2 , dy^2 et dz^2 . À ce détail près la structure est bien celle de l’espace euclidien usuel à 4 dimensions (3 dimensions d’espace et 1 dimension de temps).

se réduire à une somme des différentielles des quatre coordonnées. Dans un système non inertiel, il faut donc écrire l'intervalle sous une forme plus générale :

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

où $g_{\mu\nu}$ se nomme la *métrique* de l'espace temps. Pour des raisons dimensionnelles, il est bien clair que cette forme quadratique est l'écriture la plus générale possible (pour retrouver l'intervalle de la relativité restreinte dans un référentiel d'inertie, il ne peut pas y avoir de termes du type dx^3 ou $dt dy^2$ par exemple). Les quantités $g_{\mu\nu}$ (qu'on peut à ce stade voir comme des coefficients) déterminent toutes les propriétés géométriques. On comprend dès lors très simplement l'importance cruciale de cette métrique : son caractère non trivial (*i.e.* différent de la valeur particulière, notée $\eta_{\mu\nu}$, qu'elle acquiert dans un espace pseudo-euclidien) est engendré par le passage à un référentiel non inertiel, lui même imposé pour rendre compte de la gravitation dans l'optique du principe d'équivalence. Cela témoigne de l'apparition d'une géométrie elle aussi non triviale où la somme des angles d'un triangle ne vaut plus 180 degrés et où la circonférence d'un cercle ne vaut plus 2π fois son rayon.

Il apparaît ainsi non seulement que la géométrie n'est plus aussi simple que ce dont nous étions coutumiers mais surtout qu'elle devient fondamentalement dynamique. Les corps se déplacent et induisent donc une géométrie sans cesse mouvante. La masse dicte la courbure qui, en retour, dicte les mouvements suivis par les masses. Qu'on ne s'y trompe pas : cette description n'est nullement réursive : elle constitue au contraire l'une des propositions sur le monde les plus cohérentes et les mieux testées dont nous disposons à l'heure actuelle. La trame spatiotemporelle devient malléable et dynamique.

L'enjeu de cet ouvrage – celui de la relativité générale – consiste donc simplement à :

- comprendre comment s'écrit la physique déjà connue (par exemple l'électromagnétisme) dans un espace muni d'une métrique $g_{\mu\nu}$ arbitraire et généralement différente de la forme $\eta_{\mu\nu}$ de la relativité restreinte ;
- comprendre comment la masse impose un choix particulier de métrique $g_{\mu\nu}$. Ou, plus exactement, quelles sont les équations d'évolution de la métrique compte tenu de la présence de corps.

1.3 RETOUR SUR LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

La présentation précédente est sans doute la plus immédiatement accessible. Elle permet de « sentir » en quelques minutes les idées fondatrices de la relativité générale

1.3. Retour sur le principe d'équivalence

et d'introduire l'immense bouleversement conceptuel qu'elles constituent sans, justement, violer aucune des intuitions et connaissances déjà acquises. Il est néanmoins bénéfique de proposer dès maintenant une présentation alternative et complémentaire de la problématique³ (qui ne diffère évidemment pas de la précédente quant au contenu formel).

Dans la relation fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, le terme m qui intervient est la masse inertielle. Elle n'a rien à voir avec la gravitation. Elle témoigne du fait qu'il est, par exemple, plus difficile de mettre en mouvement un wagon de train de 20 tonnes qu'un modèle réduit de 20 grammes, même si une lubrification parfaite permettrait de négliger les frottements. L'inertie est cette tendance des corps, d'autant plus marquée que m est grande, à s'opposer à toute modification de leur état précédent : accélérer ou décélérer un corps demande un effort.

Au contraire, dans la relation $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, le terme m qui intervient est la masse gravitationnelle. Elle n'a rien à voir avec l'inertie. Elle témoigne de l'intensité du couplage entre un champ $\mathbf{g}$ et un objet dont la masse gravitationnelle vaut m , exactement comme la charge électrique q témoigne de l'intensité de la force générée par un champ $\mathbf{E}$ sur un corps chargé. Ici, m doit être vue comme une *charge gravitationnelle*.

Le fait que deux objets de masses différentes chutent de la même façon dans le champ gravitationnel s'interprète dans le cadre newtonien comme une sorte de « miracle » : compte tenu de l'égalité – étrange – entre masse gravitationnelle et masse inertielle, le fait qu'un corps plus massif soit évidemment plus difficile à mettre en mouvement (c'est l'inertie) est exactement compensé par le fait qu'il est aussi plus intensément couplé avec le champ gravitationnel.

Cette « universalité de la chute libre » signifie que si l'on s'intéresse, localement, à un « repère en chute libre » en utilisant des corps et des horloges de référence soumis à la seule gravitation, tous les objets à proximité du repère sembleront n'être pas accélérés par rapport à lui. Un tel repère « efface » donc le champ gravitationnel. Là encore, cette procédure n'est possible que localement.

Puisque tout champ de gravitation est pratiquement constant dans une région suffisamment petite de l'espace-temps, il peut être effacé dans cette région. Or, en l'absence de gravitation, les lois de la physique sont valables dans les systèmes inertiels. Il est donc raisonnable de supposer que les référentiels qui effacent localement la gravitation – les référentiels en chute libre – sont aussi les systèmes inertiels, dans lesquels les lois de la physique locale sont valables. Ce postulat est le principe d'équivalence.

3. Il nous semble important que le lecteur se départisse d'une vision unitaire de la physique comme science purement déductive. Sentir la *diversité* des théories possibles et des manières de penser et de présenter une théorie donnée est aussi fondamental que d'en comprendre les vertèbres mathématiques. Les tensions et divergences (parfois cohérentes) qui se rencontrent au sein même d'un modèle ne devraient pas être escamotées : elles sont le cœur de la *praxis* scientifique.

Chapitre 1 • Les idées de la relativité générale

Le principe d'équivalence permet de formuler toutes les lois (non gravitationnelles) de la physique, en présence d'un champ de gravitation, dans des régions suffisamment petites. Pour disposer d'une description macroscopiquement significative des phénomènes, il faut donc relier ces zones possédant des référentiels d'inertie locaux différents. C'est lors de cette opération que les effets de la gravitation sur la matière se révèlent en relativité générale. Afin de relier entre eux les différents référentiels, on peut introduire un système de coordonnées unique, qui n'est évidemment pas partout inertiel, et exprimer les lois de la physique dans ce système.

Soit x^μ les coordonnées dans un référentiel localement inertiel où les lois de la relativité restreinte s'appliquent donc. L'intervalle s'y écrit

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.2)$$

avec

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Quand on change de référentiel localement inertiel (au voisinage du même point) par une transformation de Lorentz, ds^2 est naturellement invariant (dans sa valeur et dans sa forme). En revanche, les transformations qui conduisent au référentiel non inertiel étendu, de coordonnées x'^μ , sont en général non linéaires. La valeur de l'invariant ds^2 calculée dans le système étendu x'^μ s'écrit, en utilisant (c'est la définition de la différentielle quand on considère les anciennes coordonnées comme des fonctions nouvelles) $dx^\alpha = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} dx'^\mu$ et $dx^\beta = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx'^\nu$:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu, \quad (1.4)$$

avec

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad (1.5)$$

Les coefficients $g_{\mu\nu}$ dépendent du point d'espace-temps : $g_{\mu\nu}(x'^\mu, x'^\nu)$. La métrique n'est plus minkowskienne (elle diffère de $\eta_{\mu\nu}$) : l'espace-temps est devenu riemannien !