Bouchaïb Radi
Abdelkhalak El Hami

MPSI
MP2I

Maths

Cours, exercices et problèmes corrigés

NOUVEAUX PROGRAMMES



ellipses

Références sciences

Maths
MPSI-MP2I

Cours, exercices et problèmes corrigés



Bouchaïb Radi
Abdelkhalak El Hami

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-063631
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est conforme au nouveau programme de mathématiques (mai 2021) des classes de MPSI et MP2I 1ère année et il progresse au rythme de ce programme officiel.

Organisé en vingt chapitres qui s'enchaînent ainsi logiquement, le livre développe successivement les différents thèmes de ce programme de mathématiques depuis le vocabulaire ensembliste et le calcul algébrique jusqu'au dénombrement et aux probabilités. Chaque chapitre est divisé en deux parties :

- La première partie est un rappel des définitions et des principaux résultats du cours s'appuyant sur des exemples variés choisis avec soin et des illustrations graphiques pour faire comprendre le propos. Les propositions et théorèmes sont énoncés avec précision mais sans démonstration.
- La deuxième partie est un ensemble d'exercices d'application choisis pour faciliter la compréhension et l'assimilation du sujet traité. Au total ce sont plus de 400 exercices et problèmes de synthèse complètement résolus qui sont proposés. Ils sont de trois types :
  - des exercices d'application directe du cours,
  - des exercices d'approfondissement variés, classés par difficulté croissante,
  - des problèmes de synthèse impliquant différents thèmes.

Pour permettre un travail régulier et ordonné, ces exercices et problèmes ne font appel qu'aux seules connaissances des cours déjà développés, assurant ainsi une possibilité de véritable autocontrôle continu durant toute l'année.

Pour les élèves des classes de MPSI et MPII , dont il suit exactement le nouveau programme, ou des préparations intégrées des INSA, ENSAM et UT, comme pour les étudiants de première année universitaire universitaires MI, ce livre est un outil de travail pour acquérir des bases solides en mathématiques et il peut devenir un indispensable compagnon d'étude.

Table des matières

1 Raisonnement et vocabulaire ensemblistes **1**
- 1.1 Rudiments de logique . . . 1
- 1.2 Ensembles . . . 3
- 1.3 Applications et relations . . . 4
- 1.4 Exercices résolus . . . 7

2 Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie **15**
- 2.1 Sommes et produits . . . 15
- 2.2 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot . . . 17
- 2.3 Inégalités . . . 18
- 2.4 Trigonométrie . . . 20
- 2.5 Exercices résolus . . . 21

3 Nombres complexes **33**
- 3.1 Nombres complexes . . . 33
- 3.2 Conjugaison et module . . . 34
- 3.3 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie . . . 34
- 3.4 Forme trigonométrique . . . 36
- 3.5 Équations algébriques . . . 37
- 3.6 Racines n-ièmes . . . 37
- 3.7 Exponentielle complexe . . . 38
- 3.8 Interprétation géométrique des nombres complexes . . . 38
- 3.9 Exercices résolus . . . 39
- 3.10 Problèmes résolus . . . 50

4 Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral **55**
- 4.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes . . . 55
  - 4.1.1 Généralités sur les fonctions . . . 55
  - 4.1.2 Dérivation . . . 57
  - 4.1.3 Fonctions usuelles . . . 60
  - 4.1.4 Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle . . . 64
- 4.2 Primitives et équations différentielles linéaires . . . 65
  - 4.2.1 Calcul de primitives . . . 65
  - 4.2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre . . . 68

4.2.3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants 70
4.3 Exercices résolus 74

5 Nombres réels et suites numériques 119
5.1 Ensembles de nombres usuels 119
5.2 Propriété de la borne supérieure 120
5.3 Généralités sur les suites réelles 120
5.4 Limite d'une suite réelle 121
5.5 Suites monotones 122
5.6 Suites extraites 123
5.7 Traduction séquentielle de certaines propriétés 123
5.8 Suites complexes 123
5.9 Suites particulières 124
5.10 Exercices résolus 126
5.11 Problèmes résolus 140

6 Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité 145
6.1 Limites et continuité 145
6.1.1 Limite d'une fonction en un point 145
6.1.2 Continuité en un point 148
6.1.3 Continuité sur un intervalle 149
6.1.4 Fonctions complexes 150
6.2 Dérivabilité 151
6.2.1 Nombre dérivé, fonction dérivée 151
6.2.2 Extremum local et point critique 153
6.2.3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis 153
6.2.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ 155
6.2.5 Fonctions complexes 156
6.3 Convexité 157
6.3.1 Généralités 157
6.3.2 Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables 157
6.4 Exercices résolus 158
6.5 Problèmes résolus 187

7 Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs 201
7.1 Divisibilité et division euclidienne 201
7.2 PGCD et algorithme d'Euclide 201
7.3 Entiers premiers entre eux 202
7.4 Nombres premiers 203
7.5 Congruences 204
7.6 Exercices résolus 204

8 Structures algébriques usuelles 219
8.1 Loi de composition interne . . . 219
8.2 Structure de groupe . . . 220
8.3 Structures d'anneau et de corps . . . 221
8.4 Exercices résolus . . . 222
8.5 Problèmes résolus . . . 229

9 Calcul matriciel et systèmes linéaires 233
9.1 Opérations sur les matrices . . . 233
9.2 Opérations élémentaires . . . 234
9.3 Systèmes linéaires . . . 235
9.4 Anneau des matrices carrées . . . 238
9.5 Exercices résolus . . . 240
9.6 Problèmes résolus . . . 246

10 Polynômes et fractions rationnelles 251
10.1 Anneau des polynômes à une indéterminée . . . 251
10.2 Divisibilité et division euclidienne . . . 252
10.3 Fonctions polyomiales et racines . . . 253
10.4 Dérivation . . . 254
10.5 Arithmérique dans $\mathbb{K}[X]$ . . . 255
10.6 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ . . . 255
10.7 Formule d'interpolation de Lagrange . . . 256
10.8 Fractions rationnelles . . . 256
10.9 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ . . . 257
10.10Exercices résolus . . . 257
10.11Problèmes résolus . . . 265

11 Analyse asymptotique 269
11.1 Relations de comparaison : cas des fonctions . . . 269
11.2 Développements limités . . . 270
11.3 Relations de comparaison : cas des suites . . . 274
11.4 Problèmes d'analyse asymptotique . . . 274
11.5 Exercices résolus . . . 275
11.6 Problèmes résolus . . . 295

12 Espaces vectoriels et applications linéaires 303
12.1 Espaces vectoriels . . . 303
12.1.1 Espaces vectoriels . . . 303
12.1.2 Sous-espaces vectoriels . . . 304
12.1.3 Familles de vecteurs . . . 305
12.1.4 Somme de deux sous-espaces . . . 305
12.2 Espaces de dimension finie . . . 306
12.2.1 Existence de bases . . . 306
12.2.2 Dimension d'un espace de dimension finie . . . 306
12.2.3 Sous-espaces et dimension . . . 307
12.3 Applications Linéaires . . . 308

12.3.1 Généralités . . . 308
12.3.2 Endomorphismes . . . 309
12.3.3 Détermination d'une application linéaire . . . 310
12.3.4 Théorème du rang . . . 311
12.3.5 Formes linéaires et hyperplans . . . 311
12.4 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel . . . 311
12.5 Exercices résolus . . . 312
12.6 Problèmes résolus . . . 323

13 Matrices **329**
13.1 Matrices et applications linéaires . . . 329
13.1.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases . . . 329
13.1.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice . . . 330
13.1.3 Systèmes linéaires . . . 330
13.2 Changements de bases, équivalence et similitude . . . 331
13.2.1 Changements de bases . . . 331
13.2.2 Matrices équivalentes et rang . . . 331
13.2.3 Matrices semblables et trace . . . 332
13.3 Exercices résolus . . . 333
13.4 Problèmes résolus . . . 339

14 Groupe symétrique et déterminants **345**
14.1 Groupe symétrique . . . 345
14.1.1 Généralités . . . 345
14.1.2 Signature d'une permutation . . . 345
14.2 Déterminants . . . 346
14.2.1 Formes n-linéaires alternées . . . 346
14.2.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base . . . 347
14.2.3 Déterminant d'un endomorphisme . . . 347
14.2.4 Déterminant d'une matrice carrée . . . 347
14.2.5 Calcul des déterminants . . . 348
14.2.6 Comatrice . . . 349
14.3 Exercices résolus . . . 349

15 Intégration **357**
15.1 Continuité uniforme . . . 357
15.2 Fonctions continues par morceaux . . . 357
15.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . 358
15.4 Sommes de Riemann . . . 359
15.5 Lien entre intégrale et primitive . . . 360
15.6 Formules de Taylor globales . . . 361
15.7 Exercices résolus . . . 362

16 Dénombrement **391**
16.1 Cardinal d'un ensemble fini . . . 391
16.2 Listes et combinaisons . . . 392
16.3 Exercices résolus . . . 392

17 Probabilités **403**
17.1 Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois . . . 403
17.1.1 Univers, événements, variables aléatoires . . . 403
17.1.2 Espaces probabilisés finis . . . 403
17.1.3 Probabilités conditionnelles . . . 404
17.1.4 Loi d'une variable aléatoire . . . 405
17.1.5 Événements indépendants . . . 405
17.1.6 Variables aléatoires indépendantes . . . 406
17.2 Espérance et variance . . . 406
17.2.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe . . . 406
17.2.2 Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance 407
17.2.3 Inégalités probabilistes . . . 408
17.3 Exercices résolus . . . 408
17.4 Problèmes résolus . . . 427

18 Espaces préhilbertiens réels **435**
18.1 Produit scalaire . . . 435
18.2 Norme associée à un produit scalaire . . . 435
18.3 Orthogonalité . . . 436
18.4 Bases orthonormées . . . 437
18.5 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie . . . 437
18.6 Exercices résolus . . . 438

19 Procédés sommatoires discrets **449**
19.1 Convergence et divergence . . . 449
19.2 Séries à termes positifs ou nuls . . . 450
19.3 Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes . . . 451
19.4 Théorème des séries alternées . . . 451
19.5 Familles sommables de nombres réels positifs . . . 451
19.6 Familles sommables de nombres complexes . . . 452
19.7 Exercices résolus . . . 453
19.8 Problèmes résolus . . . 461

20 Fonctions de deux variables réelles **467**
20.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues . . . 467
20.2 Dérivées partielles . . . 468
20.3 Dérivées partielles et composées . . . 470
20.4 Extremums . . . 471
20.5 Exercices résolus . . . 473

Chapitre 1

Raisonnement et vocabulaire ensemblistes

1.1 Rudiments de logique

Définition 1.1 *Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas en même temps vraie et fausse.*

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, on définit de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q.

- L'assertion « P et Q » est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.
- L'assertion « P ou Q » est vraie si et seulement si l'une des deux assertions P ou Q est vraie.
- L'assertion « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.
- L'assertion $\forall x \in E \quad P(x)$ est vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E, se lit « *Pour tout x appartenant à E, $P(x)$* », sous-entendu « *Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie* ».
- L'assertion $\exists x \in E \quad P(x)$ est vraie lorsqu'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie, se lit « *Il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie* ».

Les négations des quantificateurs correspondantes sont

- La négation de « pour tout $x \in E \quad P(x)$ » est « il existe $x \in E$ non $P(x)$ ».
- La négation de « il existe $x \in E \quad P(x)$ » est « pour tout $x \in E$ non $P(x)$ ».
- L'assertion « (non P) ou Q » est notée « $P \Rightarrow Q$ ».

Remarques 1.1

1. L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple, les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y > 0) \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x + y > 0)$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse.

2. Quand on écrit « $\exists x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = 0)$ ». Cela signifie seulement qu'il existe un réel x pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. Dans un premier temps, on peut lire la phrase ainsi : « *Il existe au moins un réel x tel que $f(x) = 0$* ».

Implication
L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » se lit en français « P *implique* Q ».
Equivalence
L'équivalence est définie par : « $P \Leftrightarrow Q$ ». C'est l'assertion « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ ».

On dit : « P *est équivalent à* Q » ou « P *équivaut à* Q » ou encore « P *si et seulement si* Q ».
Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

Propositions 1.1 *Soient P,Q,R trois assertions. On a les équivalences suivantes :*

1. $P \Leftrightarrow non(non(P))$
2. $(P$ *et* $Q) \Leftrightarrow (Q$ *et* $P)$
3. $(P$ *ou* $Q) \Leftrightarrow (Q$ *ou* $P)$
4. $non(P$ *et* $Q) \Leftrightarrow (non\ P)$ *ou* $(non\ Q)$
5. $non(P$ *ou* $Q) \Leftrightarrow (non\ P)$ *et* $(non\ Q)$
6. $(P$ *et* $(Q$ *ou* $R) \Leftrightarrow (P$ *et* $Q)$ *ou* $(P$ *et* $R)$
7. P *ou* $(Q$ *et* $R) \Leftrightarrow (P$ *ou* $Q)$ *et* $(P$ *ou* $R)$
8. « $P \Rightarrow Q$ » $\Leftrightarrow$ « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ »

Modes de raisonnement

Direct : Pour montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Contraposé : Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence des assertions :
« $P \Rightarrow Q$ »et « $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ».

Par l'absurde : Pour montrer « $P \Rightarrow Q$ »: on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.

Par analyse-synthèse : Le raisonnement se fait en deux étapes :

- Phase d'analyse : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- Phase de synthèse : on montre que les conditions obtenues sont suffisantes.

Raisonnement par récurrence

Simple : Pour démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels, on peut utiliser un raisonnement par récurrence. Notons la propriété en question $P(n)$ pour indiquer la dépendance en l'entier n. On peut alors l'obtenir pour tout entier n en démontrant ces deux assertions :

1. $P(0)$ (0 vérifie la propriété) : c'est l'initialisation (ou la base) de la récurrence ;
2. Pour tout entier n, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$: c'est l'hérédité (on dit que P est héréditaire).

On dit alors que la propriété P s'en déduit par récurrence pour tout entier n. On précise parfois « récurrence simple », quand il est nécessaire de distinguer ce raisonnement d'autres formes de récurrence.

Double : Il peut arriver que, pour l'hérédité, quand il s'agit de démontrer $P(n+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux deux rangs précédents, c'est-à-dire non seulement pour n, mais aussi pour $n+1$. On est amené à utiliser le principe de récurrence suivant :

Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$, si :

- $P(0)$ vraie
- $P(1)$ vraie
- $[P(n)$ et $P(n+1)] \Rightarrow P(n+2)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

alors $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette propriété est en apparence plus forte que la récurrence simple, puisque l'on a une hypothèse supplémentaire à notre disposition, mais lui est en fait équivalente, puisque cela revient à démontrer $[P(n)$ et $P(n+1)]$ par récurrence simple.

Forte : La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc. Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs. On a une version plus forte de l'hérédité :

Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$, si :

- $P(0)$ vraie
- $[\forall k \leq n, P(k)] \Rightarrow P(n+1)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

alors $P(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation reste identique, mais l'hérédité est modifiée. Pour démontrer la propriété au rang $n+1$, on peut supposer la propriété vraie non seulement pour n mais aussi pour tous les entiers inférieurs à n.

1.2 Ensembles

Définition 1.2 (Ensemble) *On appelle ensemble une collection d'éléments. Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\emptyset$, ne contenant aucun élément.*

Soit E un ensemble. L'écriture : $x \in E$, signifie que x est un élément de E. On dit que x appartient à E. Lorsque x n'appartient pas à E, on écrit $x \notin E$.

Considérons deux ensembles E et F. L'écriture : $E \subset F$, signifie que E est une partie de F ou E est un sous ensemble de F. On dit que E est inclus dans F.

On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Opérations sur les parties d'un ensemble

$E \cap F$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui sont à la fois dans E et dans F. Ainsi, $E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \in F\}$. $E \cap F$ se lit « E inter F ».

$E \cup F$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui sont soit dans E, soit dans F. Ainsi, $E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}$. $E \cup F$ se lit « E union F ».

On suppose que $A \subset B$. L'écriture : $B \setminus A$, désigne l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à B sans appartenir à A.

Dans le cas où $A \subset B$, on a : $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = \complement_E^A$, noté aussi $\bar{A}$. $\complement_E^A$ se lit « complémentaire de A dans E ».

Définition 1.3 (Produit cartésien) *Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.*

Exemple 1.1 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) | \, x,y \in \mathbb{R}\}$.

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Par exemple si $E = \{1,2\}$ alors $\mathcal{P}(1,2) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

Définition 1.4 (Recouvrement disjoint) *Un recouvrement d'un ensemble E est une famille disjointe $(X_i)_{i \in I}$ d'ensembles dont l'union contient E, c'est-à-dire telle que tout élément de E appartient à au moins l'un des X_i.*

Définition 1.5 (Partition) *Un recouvrement est une partition de E s'ils sont des sous-ensembles de E non vides et deux à deux disjoints.*

Exemple 1.2 Pour $E = \{1,2,3,4\}$, la famille $(\emptyset,\{1,2,3\},\{3,4\})$ n'est qu'un recouvrement alors que $(\{1,2\},\{3,4\})$ est une partition.

1.3 Applications et relations

Définition 1.6 (Application) *Une application (ou une fonction) $f : E \to F$, est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$.*

Par exemple, l'application : $x \mapsto x$, de E dans lui même, est appelée application identique et est notée par : id_E ou $\mathbb{1}_E$. On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définition 1.7 *Soient $f : E \to F$ une application de E dans F, $a \in E$ et $b = f(a) \in F$. L'élément b est appelé image de a par f et a est l'antécédant de b. E est appelé ensemble de départ de f et F est l'ensemble d'arrivée de f.*

Théorème 1.1 *Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.*

Le graphe de $f : E \to F$ est $\Gamma_f = \{(x,f(x) \in E \times F \mid x \in E\}$.

Définition 1.8 (Famille d'éléments d'un ensemble) *Soient E et I deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indexée par I, toute application de I dans E. L'ensemble I s'appelle ensemble des indices. Si $x : i \mapsto x(i)$ est une famille, on note x_i l'image de i par x et $(x_i)_{i \in I}$ cette famille.*

Si I est une partie de $\mathbb{N}$, alors la famille est une suite.
Si I est un ensemble fini, alors la famille est dite finie.
Si E est remplacé par $\mathcal{P}(E)$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est appelée une famille de parties de E.

Définition 1.9 (Indicatrice) *La fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de l'ensemble E notée $\mathbb{1}_A$ est la fonction définie sur A qui vaut 1 sur A et 0 à l'extérieur de A :*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \in E \setminus A. \end{cases}$$

Définition 1.10 (Restriction et Prolongement) *Soient E et F deux ensembles, E_1 un sous-ensemble de E, $f\colon E \to F$ et $f_1\colon E_1 \to F$. On suppose que pour tout élément x de E_1, on a $f(x) = f_1(x)$. Alors, on dit que f_1 est la restriction de f à E_1 et que f est un prolongement de f_1 à E. On note $f_1 = f\,|_{E_1}$.*

Définition 1.11 (Image directe/réciproque) *Soient E et F deux ensembles $f\colon E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$. L'image directe par f de A, notée $f(A)$, est*

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists\, x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

L'image réciproque par f de B, notée $f^{-1}(B)$, est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Définition 1.12 (Composition d'applications) *Soient $f\colon E \to F$, et $g\colon F \to G$ deux applications. On désigne par : $g \circ f$, l'application de E dans G définie par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, pour tout $x \in E$.*

Soient E et F deux ensembles et $f\colon E \to F$.

1. On dit que f est *injective* si, pour tous x,$x' \in E$, on a : $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, ce qui est équivalent à : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
2. On dit que f est *surjective* si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
3. On dit que f est *bijective*, s'il existe une application $g\colon F \to E$ telle que : $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.
   Lorsque f est bijective, l'application g est notée par f^{-1} et est appelée réciproque (ou inverse) de f.

Théorème 1.2 (Caractérisation de la bijection) *On dit que f est bijective si et seulement si, f est à la fois injective et surjective, ou si et seulement si, pour tout $y \in F$, il existe un élément et un seul $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.*

Théorème 1.3 *Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ des applications bijectives.*
L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition 1.13 (Relation binaire) *Une relation binaire sur un ensemble E, est la donnée pour tout couple $(x,y) \in E \times E$ de « Vrai » (s'ils sont en relation), ou de « Faux » sinon.*

Définition 1.14 (Relation d'équivalence) *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire entre éléments de E. $\mathcal{R}$ est dite une relation d'équivalence si elle possède les propriétés suivantes :*

i) *$\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout élément x de E, on a : $x\mathcal{R}x$.*

ii) *$\mathcal{R}$ est symétrique : $x\mathcal{R}y$ entraîne $y\mathcal{R}x$.*

iii) *$\mathcal{R}$ est transitive : pour tous x, y et z éléments de E si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.*

Définition 1.15 (Partition d'un ensemble) *Une partition de E est un ensemble de parties non vides de E, disjointes deux à deux, dont la réunion est E.*

Définition 1.16 (Classe d'équivalence) *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x \in E$, la classe d'équivalence de x est*

$$cl(x) = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}.$$

$cl(x)$ est donc un sous-ensemble de E, on le note aussi $\bar{x}$. Si $y \in cl(x)$, on dit que y est un représentant de $cl(x)$.

Théorème 1.4 (Propriétés des classes d'équivalence) *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On a les propriétés suivantes :*

i) $cl(x) = cl(y) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

ii) *Pour tout x,$y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ ou $cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$.*

iii) *Soit C un ensemble de représentants de toutes les classes alors $\{cl(x) \mid x \in C\}$ constitue une partition de E.*

Définition 1.17 (Congruence) • *La relation dans $\mathbb{R}$ définie, quels que soient x et x' de $\mathbb{R}$, par :*

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que } x - x' = k2\pi$$

est une relation d'équivalence appelée congruence modulo 2π dans $\mathbb{R}$. On écrit : $x \equiv x'\ [2\pi]$.

• *Soient $n \in \mathbb{N}$ et a,$b \in \mathbb{Z}$. On dit que a est congru à b modulo n si $n \mid (b - a)$, i.e. s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$; cette relation entre a et b se note $a \equiv b\ [n]$.*

Définition 1.18 (Relation d'ordre) *Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans un ensemble E, si elle est réflexive, antisymétrique (c'est à dire si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$) et transitive.*

Définition 1.19 (Ordre total, ordre partiel) *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre total sur E lorsque deux éléments de E sont toujours comparables pour $\mathcal{R}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x).$$

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

1.4 Exercices résolus

Exercice 1.1 *Soient les quatre assertions suivantes :*
a) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
d) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.
Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Solution.

a) L'assertion est fausse, car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$.
b) L'assertion est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x+1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y \leq 0$.
d) L'assertion est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leq x.$$

Exercice 1.2 *Écrire la négation des assertions suivantes où P,Q,R,S sont des propositions.*
a) $P \Rightarrow Q$,
b) P *et non* Q,
c) P *et (*Q *et* R*),*
d) P *ou (*Q *et* R*),*
e) *(*P *et* Q*)* $\Rightarrow$ $(R \Rightarrow S)$.

Solution.
a) P et non Q;
b) « non P ou Q »ce qui est la même chose que « $P \Rightarrow Q$ »;
c) (non P) ou ((non Q) ou (non R)) ;
d) non P et (non Q ou R) (ici les parenthèses sont importantes) ;
e) P et Q et R et non S.

Exercice 1.3 *Montrer que si* a,$b \in \mathbb{Q}$ *alors* $a + b \in \mathbb{Q}$.

Solution. On prend $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. On a $a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{qq'}$. Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 1.4 *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que si* n^2 *est pair alors* n *est pair.*

Solution. Par l'absurde, on suppose que n n'est pas pair. On veut montrer que n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2l+1$ avec $l = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$, et donc n^2 est impair. On a montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 1.5 *Soient a,$b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.*

Solution. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Exercice 1.6 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

Solution. Pour $n \geq 0$, on note $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$.
On va démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On fixe $n \geq 0$. On suppose que $P(n)$ est vraie. On montre que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \text{car par } P(n) \text{ on sait que } 2^n > n, \\ &> n + 1 \quad \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 1.7 *On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^n.$$

Solution.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_1^2 - u_2u_0 = 1^2 - 1 \times 0 = 1 = (-1)^0$, donc la formule est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 - u_{n+3}u_{n+1} &= u_{n+2}^2 - (u_{n+2} + u_{n+1})u_{n+1} \\ &= (u_{n+2}^2 - u_{n+2}u_{n+1}) - u_{n+1}^2 \\ &= u_{n+2}(u_{n+2} - u_{n+1}) - u_{n+1}^2 \\ &= u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 \\ &= -(u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.
Ce qui montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.8 *On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0.$$

Solution.
Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et pour $n = 2$, on a

$$u_2 = \frac{u_1 + u_0}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

donc la propriéte est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour n et $n+1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\frac{u_{n+1}+u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n+2$.
Ce qui montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.9 *Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Solution. Si l'on a $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, alors $2q^2 = p^2$; et donc p est pair. Par suite : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. D'où $q^2 = 2k^2$, alors q est pair. Ceci contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Exercice 1.10 *On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont la même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intruse ?*

Solution. On compare deux paquets de trois billes.

- Si l'un est plus lourd que l'autre, c'est qu'il contient l'intrus.
- Sinon, l'intrus est parmi les trois billes restantes.

Ainsi, on sait dans quel paquet de trois billes se trouve l'intruse. Dans ce problème, on compare deux billes.

- Si l'une est plus lourde que l'autre, c'est l'intruse.
- Sinon, l'intruse est la troisième.

Exercice 1.11 *On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une.*
Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intruse en trois pesées ?

Solution. On note 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nos billes.
On commence par comparer 2 lots constitués de 1,2,3 et de 4,5,6. Si ceux-ci ont même masse alors l'intruse est parmi 7,8,9 et l'on peut utiliser la bille 1 comme bille témoin.

On compare alors les billes 1 et 7 puis les billes 1 et 8 pour démasquer l'intruse. Si en revanche les deux premiers lots n'ont pas même masse, l'intruse se trouve parmi l'un deux. La bille 9 servira alors de bille témoin. Pour fixer les idées (et sans perte de généralités), on suppose que le premier lot est plus lourd que le second. On compare les billes 1 et 4 avec les billes 2 et 5.

Si celles-ci ont même masse commune, l'intruse se trouve dans les deux autres billes 3 et 6. Une comparaison de 3 avec 9 permet alors de savoir qui est l'intrus de 3 ou de 6. Si celles-ci n'ont pas même masse commune, pour fixer les idées (et sans perte de généralités), on suppose que 1 et 4 soient plus lourdes que 2 et 5. Si l'intruse est plus lourde que ses congénères alors cela ne peut ni être 4 ni être 2 à cause respectivement des première et deuxième pesées. Si l'intruse est plus légere que ses congénères alors cela ne peut ni être 2 ni être 4 à cause respectivement des première et deuxième pesées. Dans tous les cas l'intrus est soit 1, soit 5. Une comparaison de la bille 1 avec la bille 9 permet alors de démasquer cette intruse.

Exercice 1.12 *Soient f,g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :*

a) f est majorée ;
b) f est bornée ;
c) f est paire ;
d) f est impaire ;
e) f ne s'annule jamais ;
f) f est périodique ;
g) f est croissante ;
h) f est strictement décroissante ;
i) f n'est pas la fonction nulle ;
j) f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
k) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
l) f est inférieure à g ;

Solution.

a) $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq M$;
b) $\exists M \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ m \leq f(x) \leq M$;
c) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)$;
d) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = -f(-x)$;
e) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$;
f) $\exists a \in \mathbb{R}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x+a) = f(x)$;
g) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$;
h) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
i) $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$;
j) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$;
k) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = n$;
l) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq g(x)$;

Exercice 1.13 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Exprimer les négations des assertions suivantes :*
a) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ f(x) = y$
c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ |\ f(x)\ | \leq M$
d) $\forall x,y \in I,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
e) $\forall x,y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
f) $\forall x \in I,\ f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Solution.
a) $\exists x \in I,\ f(x) = 0$
b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) \neq y$
c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ |f(x)| > M$
d) $\exists x,y \in I,\ x \leq y$ et $f(x) > f(y)$
e) $\exists x,y \in I,\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$
f) $\exists x \in I,\ f(x) > 0$ et $x > 0$.

Exercice 1.14 *Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :*
1. $\forall A,B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A,B,C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Solution. On va démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon « directe ». On suppose que A et B sont telles que $A \cap B = A \cup B$. On montre que $A = B$.
   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.
   On prend $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.
2. Ensuite par contraposition. On suppose que $A \neq B$ et on monte que $A \cap B \neq A \cup B$.
   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, on suppose qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Exercice 1.15 *Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point*

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right[\quad et \quad I_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1+\frac{1}{n},n\right].$$

Solution.

$$I_1 = [0,2] \quad \text{et} \quad I_2 =]2,+\infty[\,.$$

Exercice 1.16 *Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$n \geq N \Rightarrow 2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon.$$

Solution. On remarque d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$ car $2n+1 \leq 2(n+2)$. Étant donné $\epsilon > 0$, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon$$

On cherche maintenant une condition sur n pour que l'inégalité $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ soit vraie.

$$\begin{aligned} 2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2} &\Leftrightarrow (2-\epsilon)(n+2) < 2n+1 \\ &\Leftrightarrow 3 < \epsilon(n+2) \\ &n > \frac{3}{\epsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici ϵ est donné, on prend un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\epsilon} - 2$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $n \geq N > \frac{3}{\epsilon} - 2$ et par conséquent : $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2}$. Conclusion : étant donné $\epsilon > 0$, on a trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon$.

Exercice 1.17 *1. Dans le plan, on considère trois droites Δ_1,Δ_2,Δ_3 formant un « vrai » triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.*

2. *On considère quatre droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.*
3. *On considère n droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$.*
   Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. *Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.*

Solution. On montre par récurrence sur $n \geq 1$ la proposition suivante :

H_n : n droites en position générale découpent le plan en $R_n = \dfrac{n(n+1)}{2}+1$ régions.

- Pour $n = 1$, on a alors une droite divise le plan en deux régions. $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Soit $n \geq 2$ et on suppose que H_{n-1} soit vraie, et on montre $\mathcal{H}_n$. Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ n droites en position générale. La droite Δ_n rencontre les droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ en $n-1$ points, donc Δ_n traverse (et découpe en deux) n régions du découpage $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. Le découpage par Δ_n donne donc la relation $R_n = R_{n-1} + n$.
  Or par hypothèse de récurrence H_{n-1} : $R_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ donc

$$R_n = R_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

  Et H_n est vraie.
  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_{n-1} \Rightarrow H_n$.

- Conclusion : par récurrence on a montré que H_n est vraie quelque soit $n \geq 1$.

Exercice 1.18 *Etant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :*

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

d) $\begin{cases} A \cup B &= A \cup C \\ A \cap B &= A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$.

Solution.

a) ($\Rightarrow$) On suppose $A \subset B$. On a toujours $B \subset A \cup B$.
Pour $x \in A \cup B$. Que $x \in A$ ou $x \in B$ on a $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$. Ainsi $A \cup B = B$.
($\Leftarrow$) On suppose $A \cup B = B$. Puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \subset B$.

b) ($\Rightarrow$) On suppose $A = B$. On a $A \cap B = A = A \cup B$.
($\Leftarrow$) On suppose $A \cap B = A \cup B$. On a $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$ et de même $B \subset A$ donc $A = B$.

c) ($\Rightarrow$) On suppose $A \cup B = A \cap C$. On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$.
($\Leftarrow$) On suppose $B \subset A \subset C$. $A \cup B = A = A \cap C$.

d) ($\Rightarrow$)) On suppose $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Soit $x \in B$. Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$.
Si $x \notin A$ et $x \in A \cup C$ donc $x \in C$. Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et de manière symétrique $C \subset B$ d'où l'égalité.
($\Leftarrow$) Si $B = C$ alors clairement $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 1.19 *Soient A,B,$C \in \mathcal{P}(E)$. Etablir $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.*

Solution.

$$A \backslash (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C).$$

Exercice 1.20 *Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X,X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.*

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.*
2. *Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.*

Solution.

1. On montre la proposition demandée par récurrence : soit A_n l'assertion $f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose A_n vraie. Alors

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

On a utilisé la definition de f^{n+2}, puis la proposition A_n, puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1}. Donc A_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n \circ f = f \circ f^n.$$

2. On procède de même par récurrence : soit A_n l'assertion $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on suppose A_n vraie. Alors

$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$

Donc A_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$

Exercice 1.21 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.*

1. *f est-elle injective? surjective?*
2. *Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.*
3. *Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.*

Solution.

1. f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.
2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1,1]$. On vient de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1,1]$.
3. Soit $y \in [-1,1]$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Donc pour $g : [-1,1] \to [-1,1]$ on a trouvé un inverse $h : [-1,1] \to [-1,1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc g est une bijection.

Chapitre 2

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

2.1 Sommes et produits

Définition 2.1 *Soit* $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ *;*

- *La notation* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *désigne la somme* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *et se lit somme des* a_i *pour* i *allant de* 1 *à* n*.*
- *La notation* $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ *désigne la double somme qui est une somme de sommes, et on peut toujours intervertir les deux.*
- *La notation* $\prod_{i=1}^{n} a_i$ *désigne le produit* $a_1 a_2 \ldots a_n$ *et se lit produit des* a_i *pour* i *allant de* 1 *à* n*.*
- *La notation* $\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{i,j}$ *désigne le double produit qui est le produit de produits.*

Théorème 2.1 *Pour tout entier* $n \geq 1$*, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Théorème 2.2 *Soit* x *un nombre réel différent de* 0 *et de* 1 *et soient* p *et* q *des entiers relatifs tels que* $p \leq q$*. Alors on a :*

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}.$$

On généralise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Théorème 2.3 (Factorisation) *Pour tout entier n,*

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\right) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Définition 2.2 (Factorielle) *Étant donné un entier positif n, on note $n!$ et on lit factorielle n, le nombre obtenu par le produit de tous les nombres entiers de 1 à n.*

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

De même $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

si $m < n$, on a

$$\frac{n!}{m!} = \prod_{p=1}^{n-m} (m+p)$$

Par convention $0! = 1$.

Remarque 2.1 Dans toute la suite $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$.

Définition 2.3 (Coefficient binomial) *Le coefficient binomial s'écrit sous la forme* $\binom{n}{p}$ *et est égal à :*

$$\binom{n}{p} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Théorème 2.4 (Formule du binôme dans $\mathbb{R}$) *Soient a,$b \in \mathbb{R}$ et n un entier positif alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k$$

Le théorème est aussi vrai si a et b sont des nombres complexes.

Exemple 2.1

1. Pour $n = 2$, on retrouve la formule classique :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. Pour $n = 3$, on a $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
3. Si $a = 1$ et $b = 1$, on retrouve la formule : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2.2 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Le système linéaire de n équations à p inconnues s'écrit sous la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ \cdots & = \cdots \\ \cdots & = \cdots \\ \cdots & = \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

avec a_{ij} $(1 \leq i \leq n\,;\, 1 \leq j \leq p)$ et $b_i (1 \leq i \leq n)$ sont des nombres réels donnés et $x_i (1 \leq i \leq p)$ sont des inconnues.

En utilisant la notation matricielle, le système linéaire (S) s'écrit d'une manière plus simple sous la forme $Ax = b$, avec A la matrice carrée formée par les éléments a_{ij}, x et b les matrices colonnes formées respectivement par les éléments x_i et b_i.

Le système linéaire homogène associé s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= 0 \\ \vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= 0 \end{cases}$$

Algorithme du pivot

L'algorithme du pivot consiste à transformer le système linéaire $Ax = b$ en un système linéaire équivalent $A'x = b'$ ayant la même solution et tel que A' soit triangulaire supérieure.

Pour ce faire, on utilise les transformations élémentaires suivantes, qui laissent un système linéaire équivalent à lui même :

- Permutation de deux lignes,
- Multiplication d'une ligne par une constante non nulle,
- Faire ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par une constante non nulle.

On définit une matrice $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1}$, associée au système (S) telle que $a_{i,n+1} = b_i$.

Pour obtenir le système triangulaire équivalent, il suffit d'appliquer $(n-1)$ itérations de l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes de la matrice $\mathcal{A}$.

On définit l'itération k de l'algorithme du pivot de Gauss de la façon suivante :

1^{ier} **cas :** Si $a_{kk} \neq 0$, on laisse les lignes 1 à k inchangées et on construit une nouvelle matrice à partir de $\mathcal{A}$ de la façon suivante :

$$a_{ij}^{(k)} \leftarrow a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n\,; \quad j = k, \ldots, n+1. \tag{2.1}$$

$2^{ème}$ **cas :** Si $a_{kk}^{(k)} = 0$, on échange la ligne k avec une ligne l $(k+1 \leq l \leq n)$ telle que $a_{lk}^{(k)} \neq 0$. Les lignes 1 à $k-1$ restent inchangées et on transforme le reste de la matrice A comme précédemment c-à-d :

$$a_{kj}^{(k)} \leftrightarrow a_{lj}^{(k)}, \quad j = k, \ldots, n+1 \tag{2.2}$$

et

$$a_{ij}^{(k)} \leftarrow a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n\,; \quad j = k, \ldots, n+1 \tag{2.3}$$

$3^{ème}$ **cas :** Si $a_{kk}^{(k)} = 0$, et $a_{lk}^{(k)} = 0 \ \forall k \leq l \leq n$, on arrête le processus (le système est singulier).

Ainsi, après l'itération k, la matrice $\mathcal{A}$ est de la forme :

$$\mathcal{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \ldots & . & . & \ldots & a_{1n}^{(k)} & a_{1,n+1}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \ldots & . & . & \ldots & a_{2n}^{(k)} & a_{2,n+1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ \vdots & & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ii}^{(k)} \neq 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq k$.

Enfin, après $(n-1)$ itérations, la matrice $\mathcal{A}$ devient :

$$\mathcal{A}^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n}^{(n-1)} & a_{1,n+1}^{(n-1)} \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Le système linéaire associé est alors triangulaire supérieur et admet la même solution que le système initial.

Pour l'itération k, l'élément $a_{kk}^{(k)}$ s'appelle le pivot. Ce dernier doit être non nul et pour des raisons de précision des calculs, on a intérêt à choisir un pivot dont la valeur est la plus éloignée possible de 0, c.à.d la plus grande possible en valeur absolue.

Ainsi, à chaque itération k, on commencera par chercher la ligne l tel que :
$|a_{lk}| = \max\limits_{k \leq i \leq n} |a_{ik}|$.
Si $|a_{lk}| = 0$, on arrête le processus (système singulier), sinon on échange la ligne k avec la ligne l et on transforme la matrice comme précédemment.

2.3 Inégalités

Définition 2.4 (Ordre dans $\mathbb{R}$) *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels muni de l'addition $+$, de la multiplication $\times$ et de la relation d'ordre $\leq$, est totalement ordonné ; c'est-*

à-dire pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

1. $(a \leq b\ ,\ c \leq d) \implies (a + c \leq b + d)$
2. $(0 \leq a\ ,\ c \leq d) \implies (ac \leq ad)$.

Définition 2.5 (Intervalles de $\mathbb{R}$) *Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tous $a, b \in I$, alors tout élément $x \in \mathbb{R}$ compris entre a et b, appartient à I.*

Définition 2.6 (Valeur absolue) *Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est définie par :*

$$| x |= \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0. \end{cases}$$

On a $| x |= \max(x, -x)$, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ l'inégalité triangulaire s'écrit :

$$| x + y | \leq | x | + | y | .$$

Définition 2.7 (Parties bornées de $\mathbb{R}$) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que A est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait $x \leq b$.*
2. *On dit que A est minorée s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait $x \geq a$.*
3. *On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, en d'autres termes, s'il existe un réel positif r tel que pour tout $x \in A$ on ait $|x| \leq r$.*

Définition 2.8 *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.*

Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément c, on dit que c est la borne supérieure de A et on écrit

$$c = \sup(A) = \sup\{x \mid x \in A\}.$$

Si $c \in A$ on dit que c est le plus grand élément de A, et on écrit $c = \max(A)$.

Définition 2.9 *Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément m, on dit que m est la borne inférieure de A et on écrit*

$$m = \inf(A) = \inf\{x \mid x \in A\}$$

Si $m \in A$ on dit que m est le plus petit élément de A, et on écrit $m = \min(A)$.

Théorème 2.5 *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure et toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Exemple 2.2 Soit $A =]0,1[$. Tous les réels négatifs ou nuls minorent A. Le plus grand de ces minorants est 0. On note $\inf A = 0$. Tous les réels supérieurs ou égaux à 1 majore A. Le plus petit de ces majorants est 1. On note $\sup A = 1$. On note qu'il ne s'agit ni de minimum ni de maximun, puisque ni $\inf A$ ni $\sup A$ n'appartiennent à A.

Remarque 2.2 En considérant l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \right\}.$$

on constate que le théorème précédent n'est pas valable pour les parties de $\mathbb{Q}$.

Définition 2.10 (Partie entière d'un nombre réel) *Étant donné un nombre réel x, il existe un plus grand entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$, tel que $\lfloor x \rfloor \leq x$. On l'appelle la partie entière de x.*

On a donc, par définition : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

2.4 Trigonométrie

Définition 2.11 (Cercle trigonométrique) *On appelle cerle trigonométrique $\mathcal{U}$, un cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens positif qui correspond au sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre.*

Théorème 2.6 (Paramétrisation du cercle trigonométrique) *A tout réel x, on peut associer un point unique M de $\mathcal{U}$. Soit H et K les projections orthogonales de M respectivement sur la droite des abscisses (OA) et des ordonnées (OB). Alors on a*

$$\cos x = \overline{OH} \quad et \quad \sin x = \overline{OK}.$$

Théorème 2.7 (Relation entre les valeurs des fonctions circulaires) *On a les relations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x \qquad \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$$

Théorème 2.8 (Formules d'addition et de duplication)

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ *d'où* $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$.
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ *d'où* $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.

Théorème 2.9 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité suivante : $|\sin(x)| \leq |x|$.*

Définition 2.12 (Fonction tangente) *On appelle fonction tangente la fonction qui associe à tout réel a le nombre $\frac{\sin a}{\cos a}$ lorsqu'il existe. Ce réel se note $\tan x$.*

Théorème 2.10 (Formule exigible $\tan(a \pm b)$)

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(2a) \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

2.5 Exercices résolus

Exercice 2.1 *Soit n un entier naturel. Montrer que :* $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3}{2}n(n+1)$. *En déduire que, pour tout réel positif ou nul x :*

$$\prod_{k=n}^{2n} x^k = (\sqrt{x^3})^{n(n+1)}.$$

Solution. On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On a alors :

$$\sum_{k=n}^{2n} k = \left(\sum_{k=1}^{2n} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3}{2}n(n+1).$$

On en déduit :

$$\prod_{k=n}^{2n} x^k = x^{\sum_{k=n}^{2n} k} = x^{\frac{3}{2}n(n+1)} = (\sqrt{x^3})^{n(n+1)}.$$

Exercice 2.2 *Soient n et m deux entiers tels que $1 \leq n \leq m$. Montrer que :*

$$\prod_{k=n}^{m} k = \binom{m}{n-1}(m-n+1)!.$$

Solution. La formule est vraie pour $n = 1$, puisque dans ce cas : $\prod_{k=1}^{m} k = m!$ et $\binom{m}{0} = 1$.

Pour $n > 1$, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=n}^{m} k &= (\prod_{k=1}^{m} k)/(\prod_{k=1}^{n-1} k) \\ &= \frac{m!}{(n-1)!} \\ &= \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}(m-n+1)! \\ &= \binom{m}{n-1}(m-n+1)!\end{aligned}$$

Exercice 2.3 *Soit n un entier strictement positif.*

1. *Montrer que :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2(k+1) = \sum_{h=1}^{n} h(h-1)^2$.
2. *En déduire que :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2(k+1) - k(k-1)^2 = n^2(n+1)$.

3. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution. Soit n un entier strictement positif.

1. Si on pose $h = k+1$, alors $k^2(k+1) = h(h-1)^2$, et :
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2(k+1) = \sum_{h=1}^{n} h(h-1)^2.$$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2(k+1) - k(k-1)^2 = n^2(n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} k^2(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k(k-1)^2$.
D'après la question précédente, les deux sommes du membre de droite sont égales. D'où le résultat.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2(k+1) - k(k-1)^2 = \sum_{k=0}^{n} 3k^2 - k = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k = n^2(n+1)$. Donc :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left(n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 2.4 *Comparer les nombres réels*

$$\alpha = \sqrt{2}, \quad \beta = \sqrt[3]{3} \quad \textit{et} \quad \gamma = \sqrt[5]{5}.$$

Solution. On a

$$\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha - \beta)(\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5)$$

L'inégalité $\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5 > 0$, montre que $\alpha - \beta$ est de même signe que $\alpha^6 - \beta^6$:

$$\alpha^6 - \beta^6 = 8 - 9 = -1,$$

on a $\alpha - \beta > 0$. D'où $\alpha < \beta$. De la même manière, on montre que $\alpha - \gamma$ est de même signe que $\alpha^{10} - \gamma^{10}$. Puisqu'on a

$$\alpha^{10} - \gamma^{10} = 32 - 25 = 7$$

on en déduit que $\alpha > \gamma$. En résumé, on a : $\gamma < \alpha < \beta$.

Exercice 2.5 *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $a > 1$ *et* $b > 1$. *Montrer les inégalités*

1. $a + b < 2ab$
2. $\frac{2}{a+b} + ab < a^2 + b^2$
3. $3\left(a - \frac{1}{b}\right)\frac{a}{b} < a^3 - \frac{1}{b^3}$

Solution.

1. Puisque $a < ab$ et $b < ab$, on en déduit l'inégalité
$$a + b < 2ab.$$

2. Les hypothèses sur a et b donnent $a^3+b^3 > 2$. Par la suite $(a+b)(a^2-ab+b^2) > 2$. Donc
$$a^2 - ab + b^2 > \frac{2}{a+b},$$
ce qui entraîne
$$a^2 + b^2 > \frac{2}{a+b} + ab.$$

3. On a bien $a - \frac{1}{b} > 0$. D'où
$$\left(a - \frac{1}{b}\right)^3 = a^3 - 3a^2\frac{1}{b} + 3a\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^3} > 0.$$
On en déduit
$$a^3 - \frac{1}{b^3} > 3\left(a - \frac{1}{b}\right)\frac{a}{b}.$$

Exercice 2.6 *Soient $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ des nombres réels. Montrer les inégalités suivantes :*
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{2.4}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$(a_i x + b_i)^2 \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n\,;$$
c'est-à-dire,
$$a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2 \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n.$$
D'où
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq 0.$$
Par la suite
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$
Ceci implique l'inégalité (2.4).

D'autre part, on a :
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$
donc
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

D'où l'inégalité (2.5).

Exercice 2.7 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

En déduire un encadrement du nombre réel

$$a = 9\left(\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

Solution. On a bien

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

et

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

D'où

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

On déduit

$$\frac{a}{9} > 2(\sqrt{101} - \sqrt{100}) + 2(\sqrt{102} - \sqrt{101}) + \cdots + 2(\sqrt{10001} - \sqrt{10^4}).$$

Par conséquent

$$\frac{a}{9} > 2(\sqrt{10001} - \sqrt{100}) = 2(\sqrt{10001} - 10)$$

et puisque $2(\sqrt{10001} - 10) > 2(\sqrt{10000} - 10) = 180$, alors $a > 9 \times 180 = 1620$. On a aussi

$$\frac{a}{9} < 2(\sqrt{100} - \sqrt{99}) + 2(\sqrt{101} - \sqrt{100}) + \cdots + 2(\sqrt{10^4} - \sqrt{9999}).$$

Par la suite

$$\frac{a}{9} < 2(\sqrt{10000} - \sqrt{99}) = 2(100 - \sqrt{99}).$$

Or $2(100 - \sqrt{99}) < 180{,}1003$ donc $a < 1620{,}9027$. En conclusion

$$1620 < a < 1620{,}9027.$$

Exercice 2.8 *Soit $a \in [1, +\infty[$. Simplifier $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.*

Solution. On pose $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

On a $x^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4(a-1)} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2}$.

- Si $a \in [1,2]$ alors $x^2 = 2a + 2(2-a) = 4$ donc $x = 2$.
- Si $a \in [2, +\infty[$ alors $x^2 = 4(a-1)$ puis $x = 2\sqrt{a-1}$.

Exercice 2.9 *Montrer que l'on a*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Solution. Sachant que $(a-b)^2 \geq 0$, cela donne $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(c^2 + a^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

Exercice 2.10 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On suppose*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$

Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = 1$.

Solution. On a

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 0$$

et puisqu'une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité est nulle, on obtient

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad x_k = 1.$$

Exercice 2.11 *En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ; \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} ; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (1+x)^n$. Par la formule du binôme de Newton, on sait que $f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

1. En calculant $f(1)$, on a $2^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$.
2. On calcule $f'(x) = n(1+x)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$. On évalue $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Il s'agit ici de calculer une primitive F de f :

$$F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1}.$$

On a $F(1) = \frac{1}{n+1}2^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 2.12 *En utilisant la formule du binôme montrer :*

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (b) \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.$$

Solution. Il s'agit de comparer les deux écritures de la fonction

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Pour $x = -1$, on obtient l'assertion (a). En dérivant la fonction f et en calculant $f''(1)$, on obtient l'assertion (b).

Exercice 2.13 *Soit $\alpha > 0$, montrer que l'on a*

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}, \quad (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2.$$

En déduire l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}, \quad \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n > \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right).$$

Solution. La formule du binôme de Newton, pour $n \geq 3$, donne

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \binom{n}{3}\alpha^3 + \cdots + \binom{n}{k}\alpha^k + \cdots + \binom{n}{n}\alpha^n$$

et puisque

$$\binom{n}{3}\alpha^3 + \cdots + \binom{n}{k}\alpha^k + \cdots + \binom{n}{n}\alpha^n > 0$$

alors $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$. Si l'on prend $\alpha = \frac{1}{2n}$, avec $n \geq 3$, on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{(n-1)}{8n}.$$

D'où

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n > \frac{3}{2} + \frac{(n-1)}{8n} = \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2.14 *Montrer que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a*

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{n}{p}\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n-p)^i}{i!(p-i)!p^i}.$$

En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{n}{p}\right)^p > \frac{1}{p!} + \frac{n-p}{p!} + \frac{(n-p)^2}{2p^2(p-2)!}$$

pour tout $n > p \geq 3$.

Solution. On écrit $n = n - p + p$, et on applique la formule du binôme de Newton ; ce qui donne

$$\begin{aligned} n^p &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (n-p)^i p^{p-i} \\ &= \sum_{i=0}^{p} \frac{p!}{i!(p-i)!} (n-p)^i p^{p-i}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{n^p}{p!p^p} = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n-p)^i}{i!(p-i)!p^i}.$$

Et, puisque

$$\sum_{i=0}^{p} \frac{(n-p)^i}{i!(p-i)!p^i} = \frac{1}{p!} + \frac{n-p}{p!} + \frac{(n-p)^2}{2p^2(p-2)!} + \sum_{i=3}^{p} \frac{(n-p)^i}{i!(p-i)!p^i},$$

et que

$$\sum_{i=3}^{p} \frac{(n-p)^i}{i!(p-i)!p^i} > 0 \quad (n > p \geq 3)$$

alors

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{n}{p}\right)^p > \frac{1}{p!} + \frac{n-p}{p!} + \frac{(n-p)^2}{2p^2(p-2)!}.$$

Exercice 2.15 *Résoudre par l'algorithme du pivot de Gauss les systèmes suivants :*

$$(S_1)\begin{cases} 2x & +y & -z & +t & = 1 \\ -4x & -2y & +3z & -4t & = -1 \\ 2x & +y & +2z & & = 4 \\ -2x & -y & +2z & -2t & = 0 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x & +2y & -z & = 2 \\ x & +y & -3z & = -1 \\ 2x & +y & +z & = 4 \\ x & -y & +z & = 1 \end{cases}$$

et

$$(S_3)\begin{cases} x & +2y & = 3 \\ 2x & -3y & = -1 \\ x & -y & = 1 \end{cases}$$

Solution.

1. Pour S_1 :

$$\begin{cases} [2]x & +y & -z & +t & = 1 \\ -4x & -2y & +3z & -4t & = -1 \\ 2x & +y & +2z & = 4 & \\ -2x & -y & +2z & -2t & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & +y & -z & +t & = 1 \\ & & [1]z & -2t & = 1 \\ & & 3z & -t & = 3 \\ & & z & -t & = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x & +y & -z & +t & = 1 \\ & & z & -2t & = 1 \\ & & & 5t & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont donc $t = 0$, $z = 1$, $x = 1 - \frac{y}{2}$ d'où $S_1 = \{(1-\frac{y}{2}, y, 1, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$.

2. Pour S_2 :

$$\left\{\begin{array}{rrrr} [1]x & +2y & -z & =2 \\ x & +y & -3z & =-1 \\ 2x & +y & +z & =4 \\ x & -y & +z & =1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x & +2y & -z & =2 \\ & -y & -2z & =-3 \\ & -3y & +3z & =0 \\ & -3y & +2z & =-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x & +2y & -z & =2 \\ & -y & -2z & =-3 \\ & & 9z= & 9 \\ & & +8z & =8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x & +2y & -z & =2 \\ & -y & -2z & =-3 \\ & & 9z & =9 \\ & & +0 & =0 \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc $z=1$, $y=1$, $x=1$ d'où $S_2=\{(1,1,1)\}$.

3. Pour S_3 :

$$\left\{\begin{array}{rrr} x & +2y & =3 \\ 2x & -3y & =-1 \\ x & -y & =1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x & +2y & =3 \\ & -7y & =-7 \\ & -3y & =-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x & +2y & =3 \\ & -7y & =-7 \\ & 0 & =1 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solutions.

Exercice 2.16 *Soit E la partie de $\mathbb{R}$ définie par : $E=\left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}\,;\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.*

1. *Montrez que E est infinie et bornée.*
2. *Déterminez, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de E.*
3. *Étudiez l'existence d'un plus petit élément, d'un plus grand élément, de E.*

Solution.

1. On note $u_n=\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$. Montrons que les éléments de E sont tous distincts, ce qui prouvera que E est infinie. On raisonne par l'absurde en supposant deux éléments égaux pour deux entiers strictement positifs n_0 et p_0 :

$$u_{n_0}=u_{p_0} \Leftrightarrow \frac{n_0}{p_0}=\frac{p_0}{n_0} \Leftrightarrow n_0=p_0.$$

On a $u_n\leq 1$ car $n-\frac{1}{n}\leq n+\frac{1}{n}$ et $0\leq u_n$ car $n-\frac{1}{n}\geq 0$.
E étant minorée par 0 et majorée par 1, admet une borne inférieure m et une borne supérieure M qui vérifient : $m\geq 0$ et $M\leq 1$.

2. Comme $u_1=0$, on a $m=0$ et 0 est le plus petit élément de E.
Montrons que $M=1$ en montrant que, pour tout $\epsilon>0$, $1-\epsilon$ n'est pas un majorant de E. Pour ceci, il faut trouver $n\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\begin{aligned} 1-\epsilon<\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow (1-\epsilon)\left(n+\frac{1}{n}\right)<n-\frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow (1-\epsilon)(n^2+1)<n^2-1 \\ &\Leftrightarrow \epsilon n^2>2-\epsilon \end{aligned}$$

- Si $\epsilon>1$, tous les éléments de E sont supérieurs à $1-\epsilon$.

- Si $\epsilon \leq 1$, il suffit de choisir $n > \sqrt{\frac{2-\epsilon}{\epsilon}}$ pour montrer que $1-\epsilon$ n'est pas un majorant de E.

On a donc bien $M = 1$.

3. Et comme 1 n'appartient pas à E car $n - \frac{1}{n} \neq n + \frac{1}{n}$, la partie E n'a pas de plus grand élément.

Exercice 2.17 *Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Montrez que :*

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Solution. Les parties A et B étant bornées, admettent des bornes supérieures.
x étant un élément quelconque de $A \cup B$, il appartient à A ou à B. Il vérifie donc $x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B$, soit $x \leq \max(\sup A, \sup B)$. Cela prouve que l'ensemble $A \cup B$ est borné.

Il admet donc une borne supérieure telle que $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$. Supposons que $\sup A \geq \sup B$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de $\sup A$, il existe $x \in A$ tel que

$$\sup A - \epsilon < x$$

c'est-à-dire qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que

$$\max(\sup A, \sup B) - \epsilon < x$$

ce qui prouve que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 2.18 *Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \,;\, x^2 < 2\}$. Prouvez que A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*

Solution. Il faut montrer que l'ensemble des majorants rationnels de A n'a pas de plus petit élément.

Soit y un majorant rationnel de A. On a $\sqrt{2} < y$. En effet, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel, et si on avait $y < \sqrt{2}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existerait un rationnel entre y et $\sqrt{2}$, ce qui contredirait la définition de y.
D'autre part, l'intervalle ouvert $]\sqrt{2},y[$ contient au moins un rationnel z, qui est alors un majorant rationnel de A tel que $z < y$.
A n'admet donc pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 2.19 *1. Si $n \in \mathbb{N}$, démontrez l'encadrement :*

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n - 1 < (3+\sqrt{5})^n < (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n.$$

2. Montrez alors que la partie entière de $(3+\sqrt{5})^n$ est un entier impair.

Solution.

1. Comme $3 - \sqrt{5} \approx 0{,}76$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$.
   Sans calculatrice, on aboutit à la même conclusion en remarquant que $4 < 5 < 9$ entraîne $2 < \sqrt{5} < 3$. On en déduit l'encadrement de l'énoncé :

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n - 1 < (3+\sqrt{5})^n < (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n.$$

2. Il reste à démontrer que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
   En appliquant deux fois la formule du binôme, on a :

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}[(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k].$$

   Dans cette somme, tous les termes correspondant à k impair sont nuls.
   Et si $k = 2p$, le terme correspondant s'écrit :

$$\binom{n}{2p} 3^{n-2p}(2 \times 5^p).$$

   C'est un nombre entier pair.
   Par conséquent, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$, somme de nombres entiers pairs, est un entier pair, ce qui entraîne le résultat annoncé.

Exercice 2.20 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*

1. $\tan x \geq 1$ 2. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leq \sin\left(\frac{x}{3}\right)$
3. $2\sin 2x \leq 1$ 4. $\cos 2x \geq \cos 2x$.

Solution.

1. On travaille cette fois sur un intervalle de longueur π. Puisque $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, on en déduit que l'ensemble des solutions est

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[.$$

2. On va d'abord poser $u = \frac{x}{3}$. Alors,

$$\cos(x/3) \leq \sin(x/3) \Leftrightarrow \cos(u) \leq \sin(u) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, u \in \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

   Revenant à $x = 3u$, il vient

$$\cos(x/3) \leq \sin(x/3) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 6k\pi, \frac{15\pi}{4} + 6k\pi\right].$$

   On en déduit que $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + 6k\pi, \frac{15\pi}{4} + 6k\pi\right]$.
3. On commence par utiliser la formule de trigonométrie :

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x).$$

   L'équation est donc équivalente à $\cos(2x) \geq 0$. On pose $u = 2x$. Alors $\cos(u) \geq 0$ est équivalent à $u \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]$.
   On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est donné par $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi]$.

4. On a
$$\cos 2x \geq \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x \geq 2\cos 2x - 1 \Leftrightarrow \cos 2x \leq 1.$$
Cette dernière inégalité étant toujours vérifiée, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos 2x \geq \cos 2x$.

Exercice 2.21 *Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant :*
$$\begin{cases} 2\cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \cos(x) + 2\sin(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{cases}$$

Solution. On pose $X = \cos x$ et $Y = \sin x$. Alors X et Y sont solutions du système
$$\begin{cases} 2X - Y &= \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ X + 2Y &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{cases}$$
On résout ce système en remarquant par exemple que
$$2 \times 2X + X = 2 \times (\sqrt{3} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$
On en déduit que $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puis que $Y = -\frac{1}{2}$. Ainsi, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = -\frac{1}{2}$. La valeur $x = -\frac{\pi}{6}$ est une solution particulière, et c'est la seule dans $[-\pi; \pi]$. On en déduit que l'ensemble des solutions est
$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 2.22 *Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.*

Solution. On met en facteur $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, de sorte que
$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos x - \sin x &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) \\ &= 2(\cos(\pi/6)\cos x - \sin(\pi/6)\sin x) \\ &= 2\cos(x + \frac{\pi}{6}). \end{aligned}$$
L'équation est donc équivalente à
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{2}.$$
Elle admet donc des solutions si et seulement si $m \in [-2{,}2]$.
Si $m = \sqrt{2}$, alors on a
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2.23 *Soient x et y dans $]0{,}\pi/2[$ vérifiant $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.*
1. *En utilisant $\tan(x + 2y)$, calculer $x + 2y$*

2. *Calculer* $\cos(2y)$.
3. *Soit* $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $\cos(a) = \frac{3}{5}$. *Exprimer* x *et* y *en fonction de* a.

Solution.

1. On a : $\tan(2y) = \frac{2\tan(y)}{1-\tan^2(y)} = -\frac{4}{3}$ et $u = \tan(x+2y) = \frac{\tan(x)+\tan(2y)}{1-\tan(x).\tan(2y)}$ donc

$$u = \frac{\frac{1}{7} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{7}.\frac{4}{3}} = \frac{-25}{25} = -1.$$

   On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 2y = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.
   On remarque que $0 < x + 2y < \frac{3\pi}{2}$ et $\tan(x+2y) < 0$ donc $\frac{\pi}{2} < x + 2y < \frac{3\pi}{2}$.
   $\frac{7\pi}{4}$ est la seule de la forme $\frac{3\pi}{4} + k\pi$ dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, donc $x + 2y = \frac{7\pi}{4}$.
2. On a vu que $\tan(2y) = -\frac{4}{3} < 0$ avec $2y \in]0,\pi[$ donc $2y \in]\frac{\pi}{2},\pi[$. On a :

$$\begin{aligned} \cos^2(2y) &= \frac{1}{1+\tan^2(2y)} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

   Comme $\cos(2y) < 0$ car $2y \in]\frac{\pi}{2},\pi[$, alors $\cos(2y) = -\frac{3}{5}$.
3. On a : $\cos(\pi - a) = -\frac{3}{5}$ avec $\pi - a \in]\frac{\pi}{2},\pi[$, donc $2y = \pi - a$ et comme $x + 2y = \frac{3\pi}{4}$ donc $x = -\frac{\pi}{4} + a$. On vient de prouver que $y = \frac{\pi - a}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{4} + a$.

Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Nombres complexes

Définition 3.1 (Parties réelle et imaginaire) *Soit $z = (x,y) \in \mathbb{C}$. Le réel x est appelé la partie réelle de z et noté $Re(z)$; de même, le réel y est appelé la partie imaginaire de z et noté $Im(z)$.*

Définition 3.2 (Forme algébrique d'un nombre complexe) *Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un couple unique (x,y) de réels tels que $z = x+\mathrm{i}y$. On a en fait $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.*

On a le résultat suivant : pour tous $z,z' \in \mathbb{C}$ $z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

Théorème 3.1 (Opérations sur les complexes) *Si $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ sont deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :*

- *addition :* $z + z' = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$.
- *multiplication :* $z \times z' = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + yx')$.
- *inverse d'un complexe :* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\dfrac{-y}{x^2+y^2} = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2+y^2}$
- *division :* $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

Définition 3.3 (Conjugué d'un complexe) *Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle conjugué de z, noté $\bar{z}$, le nombre complexe $Re(z) - \mathrm{i}Im(z)$.*

Théorème 3.2 (Compatibilité avec les opérations) *Pour tous $z,z' \in \mathbb{C}$:*

- $Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$,
- $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ *et* $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.

Définition 3.4 (Affixe d'un point, affixe d'un vecteur) *Soit M un point du plan de coordonnées (x,y). On appelle affixe de M le nombre complexe $x+\mathrm{i}y$; inversement M est appelé l'image de $x + \mathrm{i}y$.*
Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x,y). On appelle affixe de $\vec{u}$ le nombre $x + \mathrm{i}y$.

Règles de calcul sur les affixes

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectifs u et v et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.
- Soient A et B d'affixes respectifs a et b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(b-a)$.
- Soient $A_1,A_2,\ldots,A_n$ des points d'affixes respectifs $a_1,a_2,\ldots,a_n$ et $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ des réels. On pose $\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et on suppose que $\Lambda \neq 0$. Le barycentre des points pondérés (A_1,λ_1), $(A_2,\lambda_2),\ldots,(A_n,\lambda_n)$ a pour affixe $\frac{1}{\Lambda}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$.

3.2 Conjugaison et module

Définition 3.5 (Module) *Soit $z \in \mathbb{C}$. Le module de z, noté $|z|$, est le réel positif ou nul $\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.*

Remarque 3.1 La fonction module coïncide avec la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$, c'est pourquoi leurs notations sont identiques.

Propriétés
Pour tous $z,z' \in \mathbb{C}$:
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$, avec $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
- $z\bar{z} = |z|^2$, $|\bar{z}| = |z|$, $|zz'| = |z|.|z'|$
- Si $z' \neq 0$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$. (Inégalité triangulaire)

Définition 3.6 (Cercles et disques) *Soit A un point d'affixe a et $R \in \mathbb{R}_+^*$.*
i) Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/\ |z-a| = R\}$.
ii) Le disque fermé de centre A et de rayon R est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/\ |z-a| \leq R\}$.
iii) Le disque ouvert de centre A et de rayon R est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/\ |z-a| < R\}$.

3.3 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Définition 3.7 *Le groupe des nombres complexes de module 1 se note U et il est définie par $\{z \in \mathbb{C}/\ |z| = 1\}$.*

Définition 3.8 (Définition de $e^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$) *Soit $t \in \mathbb{R}$. On appelle exponentielle de $\mathrm{i}\theta$, notée $e^{\mathrm{i}\theta}$, le nombre complexe :*

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Théorème 3.3 (Exponentielle d'une somme) *Soient $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$. On a*

$$e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = e^{\mathrm{i}\theta}e^{i\theta'}.$$

Théorème 3.4 (Formules d'addition et de duplication)

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ *d'où* $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$.
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ *d'où* $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Théorème 3.5 (Transformation de produits en somme)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \tag{3.1}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \tag{3.2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \tag{3.3}$$

Théorème 3.6 (Transformation de sommes en produits) *On transforme la somme en produit grâce aux formules suivantes :*

- $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

Définition 3.9 (Fonction tangente) *On appelle fonction tangente la fonction qui associe à tout réel a le nombre $\frac{\sin a}{\cos a}$ lorsqu'il existe. Ce réel se note* $\tan x$.

Théorème 3.7 (Formule exigible $\tan(a \pm b)$)

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ • $\tan(2a)\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Théorème 3.8 (Formule d'Euler) *Soient θ,$\theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Linéarisation On exprime $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en fonction de $\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta$.

underline Méthode : avec la formule d'Euler, on écrit $\sin^n\theta = \left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^n$. On développe à l'aide du binôme de Newton puis on regroupe les termes par paires conjuguées.

Exemple 3.1

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^3 - 3(e^{\mathrm{i}\theta})^2 e^{-\mathrm{i}\theta} + 3e^{\mathrm{i}\theta}(e^{-\mathrm{i}\theta})^2 - (e^{-\mathrm{i}\theta})^3 \\
&= \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(e^{3\mathrm{i}\theta} - 3e^{\mathrm{i}\theta} + 3e^{-\mathrm{i}\theta} - e^{-3\mathrm{i}\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3\mathrm{i}\theta} - e^{-3\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} - 3\frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right) \\
&= -\frac{\sin 3\theta}{4} + \frac{3\sin\theta}{4}
\end{aligned}$$

Théorème 3.9 (Formule de Moivre) *Soient θ,$\theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

$$e^{\mathrm{i}n\theta} = (e^{\mathrm{i}\theta})^n,$$

ou encore : $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

Développement. On exprime $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
Méthode : on utilise la formule de Moivre pour écrire

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$$

que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Exemple 3.2

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que

$$\cos^3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin^3\theta = 3cos^2\sin\theta - \sin^3\theta.$$

3.4 Forme trigonométrique

Définition 3.10 *Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Alors il existe un réel θ, unique à 2π près, tel que $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$. Un tel réel θ est appelé un argument de z. Il existe un unique argument de z dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$: on l'appelle l'argument principal de z et on le note $arg(z)$.*

L'écriture $z = |z|e^{\mathrm{i}\arg(z)}$ est appelée la forme trigonométrique de z.
Géométriquement, $(|z|,\arg(z))$ est un couple de coordonnées polaires de l'image de z.

Proporiétés des arguments
Soient z,$z' \in \mathbb{C}$ non nuls.

i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \bmod 2\pi$,
ii) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \bmod 2\pi$
iii) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \bmod 2\pi$.

Théorème 3.10 (Transformation de $a\cos t + b\sin t$) *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $(a,b) \neq (0,0)$, il existe $(A,\phi) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$a\cos t + b\sin t = A\cos(t-\phi),$$

avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ appelée l'amplitude et ϕ la phase.

3.5 Équations algébriques

Soient a,b,c trois réels. L'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions, éventuellement complexes.

1. Si $b^2-4ac>0$, l'équation admet deux racines réelles,
$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,;$$
2. Si $b^2-4ac=0$, l'équation admet une racine réelle double,
$$r=\frac{-b}{2a}\,;$$
3. Si $b^2-4ac<0$, l'équation admet deux racines complexes,
$$r_1=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-b^2+4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}.$$

La somme de ces solutions vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$.

3.6 Racines n-ièmes

Définition 3.11 *Soient $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ièmes de z tout complexe ζ tel que $z=\zeta^n$.*
Les racines n-ièmes de 1 sont généralement appelées les racines n-ièmes de l'unité. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Théorème 3.11 *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $z\in\mathbb{C}$ non nul, donné sous forme trigonométrique $z=re^{\mathrm{i}\theta}$. Alors z possède exactement n racines n-ièmes ; ce sont les nombres complexes $\sqrt[n]{r}e^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$, k décrivant l'ensemble $[\![0,n-1]\!]$. En particulier on a :*
$\mathbb{U}_n=\{e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\}_{0\leq k\leq n-1}$.

Propriété des racines n-ièmes de l'unité
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

i) Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :
$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(z-\omega)=\prod_{k=0}^{n-1}(z-e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}})=z^n-1 \quad \text{et} \quad \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n\ \{1\}}(z-\omega)=\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}})=\sum_{k=0}^{n-1}z^k.$$

ii) La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle, i.e. :
$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}=0.$$

En particulier, $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$, avec j la racine cubique de l'unité.

3.7 Exponentielle complexe

Définition 3.12 *Soit $z \in \mathbb{C}$, donné sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$. On appelle exponentielle de z, notée e^z, le nombre complexe $e^z = e^x e^{\mathrm{i}y}$.*

Théorème 3.12 (Exponentielle d'une somme)
1. *L'exponentielle complexe est $2\mathrm{i}\pi-$périodique, i.e. : $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2\mathrm{i}\pi} = e^z$.*
2. *Pour tous z,$z' \in \mathbb{C}$: $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$. L'exponentielle transforme les sommes en produits.*

Théorème 3.13 *Pour tous z,$z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\mathbb{Z}$.*

Théorème 3.14 (Résolution de l'équation $\exp(z) = a$) *L'exponentielle complexe ne s'annule pas, et pour tous $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$, on a :*

$$e^z = a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} /\ z = \ln|a| + \mathrm{i}\, arg(a) + 2\mathrm{i}k\pi.$$

3.8 Interprétation géométrique des nombres complexes

Théorème 3.15 (Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$) *Soient a,b,$c \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq a$ et $z \neq b$. On note A l'image de a, B celle de b et M celle de z. On a*

$$\left|\frac{z-b}{z-a}\right| = \frac{MB}{MA} \quad et \quad arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \mod 2\pi.$$

Ce résultat peut être utilisé pour démontrer l'alignement de A,B et M, ou pour montrer l'orthogonalité des droites (AM) et (BM) :

$$A,B \text{ et } M \text{ sont alignés} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv 0 \mod \pi \Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}.$$

$$(AM) \text{ et } (BM) \text{ sont orthogonales} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Définition 3.13 (Similitudes) *Les similitudes planes sont toutes les applications de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$, où a,$b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Si en plus, elles préservent les angles orientés de vecteurs alors elles sont dites directes.*

Théorème 3.16 (Transformations usuelles élémentaires) *Soit M un point d'affixe z.*
1. *Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe u. L'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour affixe le nombre complexe $z + u$.*
2. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport λ a pour affixe le nombre complexe λz.*
3. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'image de M par la rotation de centre O et d'angle de mesure θ a pour affixe le nombre complexe $e^{\mathrm{i}\theta} z$.*
   En particulier, iz est l'affixe de l'image de M par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Remarque 3.2 Les translations, les rotations et les homothéties sont des similitudes directes.

Théorème 3.17 *Toute similitude plane directe est soit une translation, soit la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation de même centre. Dans ce cas, si f est la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda > 0$ et d'une rotation de même centre Ω et d'angle de mesure θ alors on dit que f est la similitude directe de centre Ω de rapport λ et d'angle de mesure θ.*

Théorème 3.18 (Interprétation géométrique de la conjugaison) *Si le point M est l'image de z et $\overline{M}$ est celle de $\bar{z}$, alors $\overline{M}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox) et $|z| = OM$.*

3.9 Exercices résolus

Exercice 3.1 *Mettre sous la forme $z = a + b\mathrm{i}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ les nombres :*

$$z_1 = \frac{2-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-2\mathrm{i}}\ ;\quad z_2 = \frac{(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{3+4\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$$

Solution.

On multiplie le numérateur et le dénominateur du complexe $\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}$ par le conjugué du dénominateur, c'est-à-dire, $c + \mathrm{i}d$

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{2-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-2\mathrm{i}} = \frac{(2-\sqrt{3}\mathrm{i})(\sqrt{3}+2\mathrm{i})}{(\sqrt{3}-2i)(\sqrt{3}+2i)} = \frac{4}{7}\sqrt{3} + \frac{1}{7}\mathrm{i}\\
z_2 &= \frac{(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}} = \frac{(2+i)^2(3+2\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{1}{5} + \frac{5}{8}\mathrm{i}\\
z_3 &= \frac{3+4\mathrm{i}}{(2+3\mathrm{i})(4+\mathrm{i})} = \frac{3+4\mathrm{i}}{5+14\mathrm{i}} = \frac{(3+4\mathrm{i})(5-14\mathrm{i})}{(5+14\mathrm{i})(5-14\mathrm{i})} = \frac{71}{221} - \frac{22}{221}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Exercice 3.2 *Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :*

$$z_1 = -2 + 2\mathrm{i}\ ;\ z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \textit{et} \quad z_3 = -(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$$

En déduire la forme exponentielle de ses nombres complexes.

Solution. Le module du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et θ l'argument de z est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) par les relations :

$$z = a + b\mathrm{i} = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}\frac{b}{|z|}\right) = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Puis on résout le système : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$

On écrit : $z_1 = -2 + 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$. Le module de z_1 est $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et l'argument de z_1 est $\theta = \arg(z_1) = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$.

De la même façon, on trouve : $|z_2| = 2$ et $\theta = \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$. Et $|z_3| = 2$ et $\theta = \arg(z_3) = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Exercice 3.3 *Calculer la somme $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.*