

T^{le} S

Maths

Obligatoire et spécialité

EXOS +

Raymond Fleurat-Lessard

*Professeur agrégé de mathématiques
Lycée Léonard Limosin, Limoges*

Jean-Luc Millet

*Professeur agrégé de mathématiques
Formateur à l'IUFM du Limousin*

Marie-Madeleine Roumilhac

*Professeur agrégé de mathématiques
Lycée Pierre Bourdan, Guéret*

© Bordas

MémoBac

www.memobac.fr

Bordas

Dans la même collection

MémoBac EXOS +

Maths 2^{de}

Maths 1^{re} S

Maths T^{le} S obligatoire et spécialité

Maths T^{le} ES obligatoire et spécialité

Physique-Chimie 2^{de}

Physique 1^{re} S

Chimie 1^{re} S

Physique T^{le} S obligatoire et spécialité

Chimie T^{le} S obligatoire et spécialité

PRÉSENTATION

Cet ouvrage vous propose **plus de 300 exercices et QCM** qui portent sur l'ensemble du programme de Mathématiques de terminale S.

Chaque chapitre comprend quatre rubriques :

Rappel de cours, Exercices, QCM, Corrigés.

RAPPEL DE COURS

Vous trouverez dans ces résumés de cours **toutes les définitions et notions essentielles** que vous devez connaître pour réussir les exercices proposés dans cet ouvrage.

EXERCICES

La grande majorité de ces exercices est extraite des **annales du baccalauréat**.

Pour vous entraîner efficacement, ils comportent un **titre**, un **minutage** et un **niveau de difficulté**.

Ces niveaux de difficulté correspondent au barème suivant :

- Exercices d'application.
- Exercices d'entraînement.
- Exercices d'approfondissement.

La durée, indiquée en minutes, vous permettra de travailler dans les conditions d'un examen ou d'un devoir surveillé.

QCM

Chaque chapitre comporte une série de QCM, conçus à la fois **pour faire le point sur vos connaissances et pour aller plus loin**.

Un barème vous est donné au début de chaque série de QCM pour vous permettre de vous **évaluer** en vous notant sur 20.

CORRIGÉS

Tous les exercices et QCM sont accompagnés de **corrigés complets et détaillés** conformes aux attentes des examinateurs du baccalauréat.

Ils sont ponctués de **remarques** et d'astuces afin de vous aider à éviter les pièges et difficultés que vous ne manquerez pas de rencontrer.

SOMMAIRE

Enseignement obligatoire

1 FONCTIONS

Rappel de cours	7
Exercices	
Généralités	17
Exponentielles	20
Logarithmes	26
Problèmes de synthèse	30
QCM	44
Corrigés	46

2 INTÉGRATION ET PRIMITIVES

Rappel de cours	117
Exercices	
Applications directes du cours	121
Comme au bac	126
QCM	143
Corrigés	145

3 NOMBRES COMPLEXES

Rappel de cours	181
Exercices	
Entraînement	186
Problèmes	190
QCM	203
Corrigés	205

4 RÉCURRENCE – SUITES

Rappel de cours	241
Exercices	
Entraînement	245
Problèmes	248
QCM	258
Corrigés	260

5 PROBABILITÉS

Rappel de cours	291
Exercices	
Entraînement	298
Problèmes	303
QCM	317
Corrigés	319

6 GÉOMÉTRIE – PLAN ET ESPACE

Rappel de cours	351
Exercices	
Barycentres	358
Plans et espaces euclidiens	359
Géométrie analytique	361
Calculs de distances	364
Sphères	367
QCM	374
Corrigés	378

Enseignement de spécialité

7 SIMILITUDES DU PLAN

Rappel de cours	423
Exercices	
Approche géométrique	426
Approche complexe	436
QCM	446
Corrigés	448

8 ARITHMÉTIQUE

Rappel de cours	489
Exercices	
Congruences	494
Nombres premiers. Nombres premiers entre eux	495
PGCD	497
PPCM	500
Théorèmes de Bézout	501
Équations diophantiennes	503
QCM	509
Corrigés	511

RAPPEL DE COURS

1 Généralités

1 Limites

a. Théorème des gendarmes

- Le symbole α désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

La lettre ℓ désigne un nombre réel.

Les fonctions f , g et h sont définies sur un intervalle I au « voisinage » de α .

Théorème

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si, pour } x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \text{et si } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \ell \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \ell.$$

- Ce théorème se généralise au cas des limites infinies :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si pour } x \in I, g(x) \leq f(x) \\ \text{et si } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si pour } x \in I, f(x) \leq h(x) \\ \text{et si } \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty.$$

b. Opérations sur les fonctions et limites

Le symbole α désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$, les lettres ℓ et ℓ' désignent des réels.

Les fonctions u et v sont définies sur un intervalle I au « voisinage » de α .

x tend vers α (éventuellement à gauche ou à droite).

- Limite d'une somme de fonctions :

Si u a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$u + v$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

« ? » signifie qu'il y a indétermination.

● Limite d'un produit de fonctions :

Si u a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
uv a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$?$

● Limite d'un quotient de fonctions :

Si v a pour limite	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\frac{1}{v}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Pour la limite d'un quotient $\frac{u}{v}$, on étudie la limite de $u \times \frac{1}{v}$.

● Limite d'une fonction composée :

On considère une fonction $f = g \circ u$.

Les symboles α , β et γ désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = \beta$ et si $\lim_{x \rightarrow \beta} g(x) = \gamma$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \gamma$.

c. Notion d'asymptote

Le symbole α désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

On considère deux fonctions f et g de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

On suppose que f et g sont définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$)

si $\alpha = +\infty$ ou sur un intervalle de la forme $]-\infty; a[$ si $\alpha = -\infty$.

Définition

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont **asymptotes** en α si $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) - g(x)) = 0$.

La droite d'équation $y = mx + p$ est **asymptote** à $\mathcal{C}_f$ en α si :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) - (mx + p)) = 0.$$

Si $m \neq 0$, on parle d'asymptote oblique.

Dans le cas particulier où $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = p$, la droite d'équation $y = p$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en α , elle est parallèle à l'axe des abscisses.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$, la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$, elle est parallèle à l'axe des ordonnées.

2 Continuité

a. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et un réel x_0 de I .

Définition

Si f admet une limite finie en x_0 et si cette limite est égale à $f(x_0)$, f est dite continue en x_0 .

Pour montrer que la fonction f est continue en x_0 , on peut montrer que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0).$$

• Remarques

- Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, on dit que f est **continue à gauche en x_0** .
- Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, on dit que f est **continue à droite en x_0** .

• Pour montrer qu'une fonction est continue en x_0 , on peut montrer qu'elle est continue à gauche et à droite en x_0 .

• Soit f une fonction définie sur un intervalle I de borne ouverte x_0 telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. La fonction g définie par $g(x) = f(x)$, si $x \in I$ et $g(x_0) = \ell$ est

le prolongement par continuité de f en x_0 .

• Exemples

Les fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques, racine carrée et valeur absolue sont continues sur leurs ensembles de définition.

b. Opérations sur les fonctions et continuité

- Étant données deux fonctions u et v continues sur un intervalle I (en tout x_0 de I), les fonctions somme $(u + v)$ et produit (uv) sont continues sur I . Si, de plus, v ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont aussi continues sur I .
- Étant donnée une fonction composée $g \circ u$, si u est continue en x_0 et si g est continue en $u(x_0)$ alors $g \circ u$ est continue en x_0 .
- De ce dernier résultat on déduit que, si u est une fonction continue, les fonctions $|u|$, $\cos u$, $\sin u$, $\tan u$ et $\sqrt{u}$ sont continues là où elles sont définies.

c. Théorème des valeurs intermédiaires

Étant donnée une fonction f **continue** sur un intervalle I , pour tous réels a et b de I , la fonction f atteint au moins une fois chaque valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Cela signifie que pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ alors, pour tout réel k appartenant à l'intervalle fermé J de bornes $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans I .

Ce théorème se généralise au cas où f est continue et strictement monotone sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non. Dans ce cas, pour définir l'intervalle J , on remplace éventuellement $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f aux bornes de I . L'intervalle J se note $f(I)$.

3 Dérivées

a. Nombre dérivé

• Définitions

Une fonction f définie sur un intervalle I contenant x_0 , non réduit à $\{x_0\}$, est dérivable en x_0 si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

• Il existe une fonction ε définie sur I et un réel k tels que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad (1)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

• La fonction φ définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie (k) en x_0 .

Le nombre réel k est le **nombre dérivé** de f en x_0 et on note $k = f'(x_0)$.

Définition

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{Cette égalité s'écrit aussi } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

• Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

• Remarques :

• L'intervalle I est fermé ou non, borné ou non, éventuellement de la forme $]x_0 - a ; x_0 + a[$ ($a > 0$) ou $[x_0 ; x_0 + a[$ ou $]x_0 - a ; x_0]$.

• En posant $x = x_0 + h$, l'égalité (1) s'écrit pour tout réel h tel que $x_0 + h \in I$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + h\theta(h), \quad (2)$$

avec $\theta(h) = \varepsilon(x_0 + h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0$.

En négligeant le terme $h\theta(h)$, l'égalité (2) donne l'approximation :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

appelée **approximation affine de f au voisinage de x_0** .

• Écriture différentielle $dy = f'(x)dx$

En remplaçant x_0 par x et en notant $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ et $\Delta x = h$, l'égalité (2) s'écrit $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$ avec $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

On écrit de façon symbolique $dy = f'(x)dx$.

• Exemple (à retenir) de fonctions non dérivables en un point :

$f: x \mapsto |x|$ et $g: x \mapsto \sqrt{x}$ sont définies en 0 mais pas dérivables en 0.

b. Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et dérivable sur $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_f$, c'est-à-dire en tout $x_0 \in \mathcal{D}'$. La fonction qui à tout x de $\mathcal{D}'$ associe le nombre dérivé de f en x est la fonction dérivée ou dérivée de f . On la note f' .

Si la fonction f' est elle-même dérivable sur $\mathcal{D}''$, la fonction dérivée de f' , notée f'' , est la fonction **dérivée seconde** de f . On définit de même les fonctions dérivées troisième, quatrième...

Théorème

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .

c. Tangente à une courbe

Définition

Si f est dérivable en x_0 , la droite Δ d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

est tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 .

Le coefficient directeur de Δ est $f'(x_0)$.

• Remarque

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I contenant x_0 (non réduit à $\{x_0\}$), si la fonction φ définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $+\infty$

(ou $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 (x_0^+ ou x_0^-), la fonction f n'est pas dérivable en x_0 mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse x_0 une tangente (ou demi-tangente) parallèle à l'axe des ordonnées ($y'y$).

d. Dérivées des fonctions usuelles

Si la fonction f est définie		la fonction f' est définie	
sur	par	sur	par
$\mathbb{R}$	$f(x) = C$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$\mathbb{R}$ si $(n > 0)$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$[0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$\mathcal{D}_{\tan} =$ $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$f(x) = \tan x$	$\mathcal{D}_{\tan}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

e. Opérations sur les fonctions et dérivées

Les fonctions u , v et w sont supposées dérivables sur un intervalle I .

• Dérivée d'une somme

$$u + v \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (u + v)' = u' + v'.$$

● **Dérivée d'un produit**

uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$,

Pour tout réel k , ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

● **Dérivée d'un quotient**

Si, de plus, v ne s'annule pas sur I :

$\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$;

$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

● **Dérivée d'une fonction composée**

Si g est une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$, la fonction $g \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$$

si $x \in I$, $(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'[u(x)]$.

● **Cas particuliers :**

● Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, si u est dérivable sur I (et ne s'annule pas sur I si $n < 0$), u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

● Si u est dérivable et **strictement positive** sur I , $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

● Si u est dérivable sur I , $\sin u$ et $\cos u$ sont dérivables sur I et :

$$(\sin u)' = u' \cos u,$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u.$$

● Si u est dérivable sur I et si $\tan$ est définie sur $u(I)$, $\tan u$ est dérivable sur I et :

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u).$$

2 Fonctions exponentielles Fonctions logarithmes

1 Fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** (notée $\exp$) est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On note $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$.

De plus, un réel k étant donné, il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = kf$ et $f(0) = 1$. Elle est définie par $f(x) = e^{kx}$.

→ Propriétés

● **Propriétés algébriques**

Pour tous réels x, a et b :

● $e^0 = 1$;

● $e^x > 0$;

● $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;

● $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$;

● $e^1 = e$;

● $e^{a+b} = e^a e^b$;

● $e^{b-a} = \frac{e^b}{e^a}$;

● $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.

- **Propriétés analytiques**

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout réel x ,

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad ((e^x)' = e^x).$$

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Au voisinage de 0, $e^h \approx 1 + h$.

2 Fonction logarithme népérien

Définition

La fonction logarithme népérien (notée $\ln$) est la bijection réciproque de la fonction exponentielle. C'est donc la fonction qui à tout réel x strictement positif, associe le réel noté $\ln x$ dont l'exponentielle est x .

Propriétés

Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0; +\infty[$:

$$\ln e^x = x; \quad e^{\ln y} = y;$$

$$y = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y.$$

- « Base » des logarithmes népériens

Il existe un réel unique e tel que $\ln e = 1$

$$2,718 < e < 2,719.$$

→ Propriétés

- **Propriétés algébriques**

- Si $a \in]0; +\infty[$, $b \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b;$$

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b;$

- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b;$

- $\ln(a^n) = n \ln a;$

- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a;$

- $\ln e^n = n;$

- $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}.$

- **Propriétés analytiques**

- $\mathcal{D}_{\ln} =]0; +\infty[$, $\ln 1 = 0$.

- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

- La fonction u étant dérivable sur un intervalle I :

$$\text{si } u > 0 \text{ sur } I, (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ si } u \neq 0 \text{ sur } I, (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}.$$

- Au voisinage de 0, $\ln(1 + h) \approx h$.

Utilisation du sens de variation

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit :

Si x_1 et $x_2 \in]0; +\infty[$,

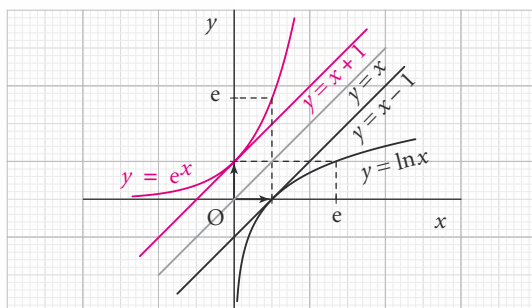
$$\ln x_1 < \ln x_2 \quad \text{équivaut à} \quad x_1 < x_2,$$

$$\ln x_1 = \ln x_2 \quad \text{équivaut à} \quad x_1 = x_2.$$

En particulier :

$$\ln x > 0 \quad \text{équivaut à} \quad x > 1,$$

$$\ln x < 0 \quad \text{équivaut à} \quad 0 < x < 1.$$

3 Courbes représentatives

La tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentant la fonction exponentielle a pour équation $y = x + 1$.

La tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentant la fonction $\ln$ a pour équation $y = x - 1$.

4 Logarithme décimal

La fonction logarithme décimal, notée $\log$, est définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

On a ainsi $\log 10 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\log 10^n = n$.

5 Étude de limites**a. Avec la fonction exponentielle**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0;$$

si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

b. Avec la fonction logarithme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0;$$

$$\text{si } n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

c. Règle opératoire

À l'infini, l'exponentielle de x « l'emporte » sur toute puissance de x , et les puissances de x « l'emportent » sur le logarithme népérien.

6 Fonction exponentielle de base a **Définition**

Pour tout $a \in]0; +\infty[$, pour tout $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b \ln a}$.

On appelle fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^*$), ou puissance réelle de a , la fonction qui à tout réel x , associe a^x ($a^x = e^{x \ln a}$).

a. Propriétés**Propriétés**

Pour tous réels $a > 0$ et $a' > 0$ et tous réels b et b' :

$$\ln a^b = b \ln a;$$

$$1^b = 1; \quad a^0 = 1; \quad a^b a^{b'} = a^{b+b'}; \quad \frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'};$$

$$(a^b)^{b'} = a^{bb'}; \quad (aa')^b = a^b (a')^b; \quad \left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{(a')^b}.$$

7 Fonction racine $n^{\text{ième}}$ **Définition**

Pour tous réels x et y de $[0; +\infty[$, pour tout entier naturel non nul n :

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n.$$

$$\text{Pour } x \geq 0, \text{ on note } \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

→ Propriétés**• Propriétés algébriques des racines $n^{\text{ième}}$**

Si $a \in [0; +\infty[$, $b \in [0; +\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \text{ équivaut à } a = b;$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \text{ équivaut à } a < b,$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}; \quad \text{si } b \neq 0, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

Théorème

● Propriétés analytiques de la fonction racine $n^{\text{ième}}$

La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

● Étude des limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{|x|} e^x = 0.$$

À l'infini, l'exponentielle de x « l'emporte » sur $\sqrt{x}$, et $\sqrt{x}$ « l'emporte » sur $\ln x$.

EXERCICES

Généralités

1

QCM (D'après Pondichery, juin 2006)

CORRIGÉ P. 46

20 minutes



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I . Quelle est ou quelles sont les affirmations qui sont vraies ?

- a. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
- b. Si f est continue en a , alors f est dérivable en a .
- c. Si f est dérivable en a , alors la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

2

QCM (Type bac)

CORRIGÉ P. 46

60 minutes



On désigne par $\mathcal{C}_{f_i}$ la courbe représentative de la fonction f_i .

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Quelle est l'affirmation qui est vraie ?

- a. f_1 n'a pas de limite en $+\infty$.
- b. $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = +\infty$.
- c. f_1 est impaire.
- d. f_1 est monotone sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

2. La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f_2(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$.

Quelle est ou quelles sont les affirmations qui sont vraies ?

- a. $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = +\infty$.
- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = +\infty$.
- c. La droite d'équation $y = -3$ est asymptote à $\mathcal{C}_{f_2}$ en $+\infty$.

3. La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = x + \sqrt{x^2 + 16}$.

Quelle est ou quelles sont les affirmations qui sont vraies ?

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = 0$.
- b. La droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}_{f_3}$ en $+\infty$.
- c. Pour tout réel x , $f_3'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}}$.

- d. La tangente à $\mathcal{C}_{f_3}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 4$.

4. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

- a. L'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.
- b. L'équation $\sqrt{4x^4 + 1} - 2 = 0$ a quatre solutions dans $\mathbb{R}$.
- c. Pour tout réel m , l'équation $2x + \sin x = m$ a une solution dans $\mathbb{R}$.

3 Fonction racine carrée

(D'après Nouvelle Calédonie, décembre 2000)

CORRIGÉ P. 49

30 minutes

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.1. a. Déterminer la limite de u en $-\infty$.b. Montrer que, pour tout x réel, on a $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.En déduire la limite de u en $+\infty$.2. a. Montrer que $[u(x) + 2x]$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.b. Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$. En déduire le signe de $[u(x) + 2x]$.

c. Interpréter graphiquement ces résultats.

3. a. Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

b. Étudier les variations de la fonction u .4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et son asymptote oblique.

4 Créer une fonction continue et non dérivable

(Exercice type bac « ouvert »)

CORRIGÉ P. 50

20 minutes

Définir par son expression $f(x)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout réel sauf en 3 et telle que $f(4) = -1$.

5 Limites, dérivées et sens de variation

(D'après Liban, juin 2005)

CORRIGÉ P. 51

30 minutes

Pour chacune des 5 affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a ; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. »2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$, g ne s'annulant pas :
« Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$. »3. « Si f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$, telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. »4. On considère un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. »5. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée.« Si f' est croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$. »

6

Fonction racine carrée

(Exercice type bac « ouvert »)

CORRIGÉ P. 52



50 minutes



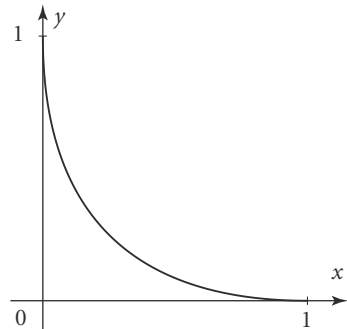
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Cette fonction est dérivable sur $]0 ; 1]$ et sa dérivée f' vérifie $f'(1) = 0$. La courbe représentative Γ de la fonction f dans un repère orthonormal est donnée ci-contre.

1. a. Montrer que le point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à Γ si et seulement si $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

b. Montrer que Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. a. Si Γ était un arc de cercle, quel pourrait être son centre ? Quel pourrait être son rayon ?

b. La courbe Γ est-elle un arc de cercle ?



7

Fonctions trigonométriques

(Nouvelle Calédonie, novembre 2005)

CORRIGÉ P. 53



60 minutes

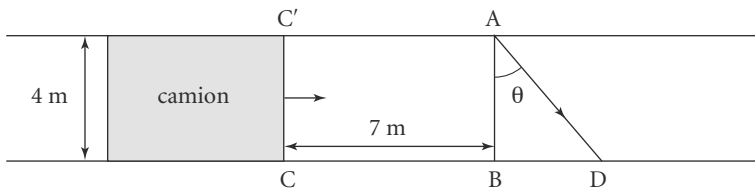


Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à ...30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D .

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD .

2. On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$.

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3. Conclure.

Rappel

La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.

8

Vrai/Faux avec justification (Exercice type bac)

CORRIGÉ P. 54

20 minutes

Préciser pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse et à chaque fois, justifier votre réponse.

- Pour tous réels a et b , $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.
- Pour tous réels a et b , $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.
- Il existe un réel a et un réel b tels que $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.
- Il existe un réel a et un réel b tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$.

9

Vrai/Faux avec justification

(D'après Antilles-Guyane, juin 2006)

CORRIGÉ P. 55

20 minutes

Dans chaque cas une seule des réponses proposées est exacte.

- L'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

0 solution	1 solution	2 solutions	plus de 2 solutions
------------	------------	-------------	---------------------

- L'expression $-e^{-x}$

n'est jamais négative	est toujours négative	n'est négative que si x est positif	n'est négative que si x est négatif
-----------------------	-----------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} =$$

$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
----------------	---	---	-----------

$$d. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} =$$

$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
----------------	---	---	-----------

10

Fonction exponentielle et fonction cosinus

(D'après Polynésie, septembre 2001)

CORRIGÉ P. 55

30 minutes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
- Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.
 - En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $2 + \cos x + \sin x > 0$.
 - Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
 - En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
 - Montrer que, sur l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique.

11

Fonction exponentielle et courbes symétriques

(D'après Pondichery, avril 2002)

CORRIGÉ P. 56

75 minutes

On étudie les fonctions f_0 et f_1 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ les courbes représentatives respectives de f_0 et f_1 .

Partie A

1. a. Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
b. Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
c. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_0$.
2. Montrer que le point $K\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_0$.
3. Étudier les variations de f_0 .
4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_0$ au point K.
b. Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$, où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.
c. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
d. Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x .
e. En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$.
5. Tracer $\mathcal{C}_0$ et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B – Étude de f_1

1. Montrer que pour tout réel x , les points $M(x; f_0(x))$ et $M'(x; f_1(x))$ sont symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}$.
2. Dresser le tableau de variation de f_1 et tracer $\mathcal{C}_1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

12

Fonction exponentielle. Équation $f(x) = m$

(D'après La Réunion, juin 2004)

CORRIGÉ P. 58

45 minutes

Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' vérifient les propriétés suivantes :

- (1) pour tout nombre réel x , $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,
- (2) $f'(0) = 1$,
- (3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) \neq 0$.
b. Calculer $f(0)$.
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
(4) pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
- Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
 - Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
 - En déduire les fonctions u et v .
 - Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
 - Déterminer cette solution lorsque $m = 3$.

13 Fonction exponentielle. Position relative de courbes

[D'après Amérique du Nord, novembre 2003]

CORRIGÉ P. 60

⌚ 50 minutes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

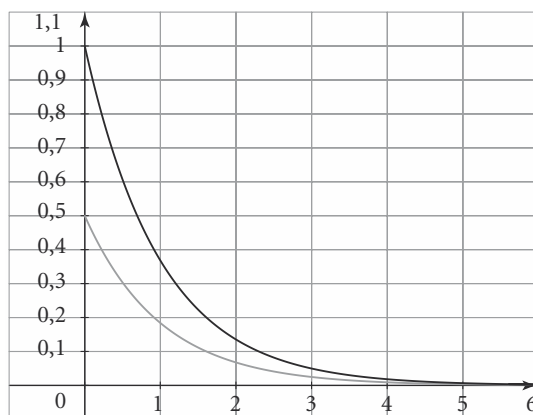
$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
- Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- On considère les fonctions g et h définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{e^x} \text{ et } h(x) = \frac{1}{2e^x}.$$

On note Γ_1 et Γ_2 les courbes représentatives de g et h tracées ci-dessous dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



- Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
 - Que peut-on en déduire pour les courbes Γ , Γ_1 et Γ_2 ?
- Tracer Γ sur la figure ci-dessus en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

14

Fonction exponentielle. Distance minimum

(D'après La Réunion, juin 2002)

CORRIGÉ P. 61

🕒 1 h 15

**Partie A**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire comme propriété géométrique pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

On considère le point A du plan de coordonnées $(1; 0)$ et on s'intéresse au minimum de la distance AM où M est un point de la courbe $\mathcal{C}$.

1. M étant un point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$, calculer en fonction de x la distance AM.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}.$$

- a. Calculer $g'(x)$.
- b. On désigne par g'' la fonction dérivée seconde de g . Calculer $g''(x)$.
Montrer que pour tout x réel :

$$g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2.$$

- c. En déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.
- d. Montrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $[0; 1]$ vérifiant $g'(\alpha) = 0$.

Vérifier l'inégalité suivante :

$$0,46 \leq \alpha \leq 0,47.$$

Déterminer le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x .

- e. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$). Quel est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g ?

3. Établir que la distance AM est minimum au point M_α d'abscisse α de la courbe $\mathcal{C}$.
4. En utilisant la définition de α , montrer les égalités :

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{2}f(2\alpha)$$

puis :

$$g(\alpha) = \frac{1}{4}[f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2.$$

Utiliser les variations de f et le résultat $0,46 \leq \alpha \leq 0,47$ pour encadrer $g(\alpha)$; en déduire un encadrement de la distance AM_α .

15 Fonction exponentielle, fonction cosinus

[D'après Polynésie, juin 2003]

CORRIGÉ P. 63

⌚ 60 minutes



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos x$. On appelle $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel x ,

$$-e^x \leq f(x) \leq e^x.$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?

2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

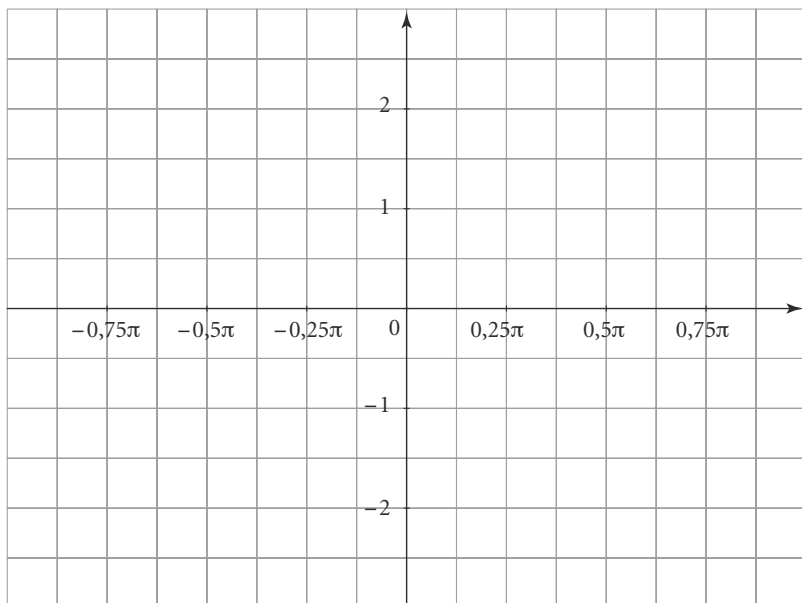
3. On étudie f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$.

a. Démontrer que pour tout réel x on a :

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

b. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f . Montrer que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[+\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{2}\right]$. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$. Indiquer les valeurs prises par f en $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

c. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ sur le graphique ci-dessous.



4. On note f'' la fonction dérivée seconde de f . Montrer que $f''(x) = -2e^x \sin x$.

En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera. Trouver l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en O et tracer T sur le graphique de la question 3.

16

Exponentielle et cosinus.**Suite géométrique** (Polynésie, septembre 2005)

CORRIGÉ P. 64

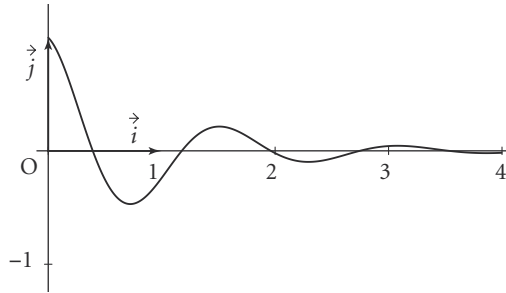
50 minutes



Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée ci-dessous dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,
 $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathcal{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,
 $f'(x) = -e^{-x}[\cos(4x) + 4\sin(4x)]$.

b. En déduire que les courbes Γ et $\mathcal{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
 Compléter le graphique en traçant T et $\mathcal{C}$.

17

Fonction exponentielle.**Équation $f(x) = m$** (D'après Liban, juin 2004)

CORRIGÉ P. 65

50 minutes



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

et $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et sa limite en $-\infty$.

2. Calculer, pour tout réel x , $f(x) + f(-x)$.

Que peut-on en déduire pour le point $A(0; 1 + \ln 4)$?

- 3.** Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
- 4. a.** Justifier que, pour tout réel m , l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
- b.** Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution a de l'équation $f(x) = 3$. Justifier la réponse.
- c.** Pour quelle valeur de m le nombre $-a$ est-il la solution de l'équation $f(x) = m$?
- 5. a.** Montrer que pour tout réel x , $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.
- b.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + \ln 4$ et la droite (Δ') d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ sont des asymptotes de la courbe $(\mathcal{C})$. Étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à son asymptote (Δ) .
- c.** Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ) .

Logarithmes

18 Fonction logarithme népérien. Propriétés algébriques (Antilles-Guyane, juin 2006)

CORRIGÉ P. 67

20 minutes

1. Restitution organisée des connaissances

Pré-requis : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $(x \mapsto \frac{1}{x})$, $\ln(1) = 0$.

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x ,

$$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et que } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

pour tous réels strictement positifs a et b .

3. On donne $0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70$ et $1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10$.

En déduire des encadrements de $\ln 6$, $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$, et $\ln\left(\frac{3}{8}\right)$.

19 Fonction logarithme népérien. Dérivée et variations (D'après Asie, juin 2004)

CORRIGÉ P. 68

30 minutes

Soit f la fonction définie sur $I =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + 2x)$.

1. Justifier que f est strictement croissante sur I .

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.

3. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - x$.

a. Étudier les variations de g sur I et dresser son tableau de variation.

b. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur I , 0 et une autre notée β , appartenant à l'intervalle $]1 ; 2[$.

c. En déduire le signe de $g(x)$ sur I .

4. Justifier que pour tout réel x de $]0 ; \beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0 ; \beta[$.

20

Fonction logarithme népérien. Dérivées première et seconde [Centre étrangers groupe 1, juin 2003]

CORRIGÉ P. 69

90 minutes



On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln(x+2).$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 4 cm).

Partie A – Étude de la fonction f

1. Étude des variations de la dérivée f'

- f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.
- Étudier les variations de f' sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.
- Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.

2. Étude du signe de $f'(x)$

- Montrer que sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6 ; -0,5]$.
- En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .

3. Étude des variations de f

- Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.
- Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
- Dresser le tableau de variation de f .

Partie B – Position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses tangentes

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $] -2 ; +\infty[$ et T_{x_0} la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse x_0 .

On note, pour x appartenant à l'intervalle $] -2 ; +\infty[$:

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)].$$

1. Étude des variations de d

- Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -2 ; +\infty[$,

$$d'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$
- En utilisant la croissance de la fonction f' , donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x . En déduire les variations de d sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$.

2. Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de T_{x_0} .

Partie C

Tracés dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$:

- Déterminer une équation de la droite T_0 , tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 ; tracer T_0 .
- Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par l'origine du repère puis tracer ces droites.
- Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2 . On prendra pour α la valeur $-0,54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur $0,8$.

21 QCM. Fonctions exponentielle et logarithme (Exercice type bac)

CORRIGÉ P. 71

30 minutes

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - e^{-x}$.
Quelle est ou quelles sont les propositions qui sont vraies ?

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée définie par $f'(x) = 2x - e^{-x}$.

2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.
Quelle est ou quelles sont les propositions qui sont vraies ?

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée définie par $g'(x) = -2xe^{-x}$.

c. g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction h est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = (x^2 + 1)\ln(x^2)$.
Quelle est ou quelles sont les propositions qui sont vraies ?

a. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

b. h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ de dérivée définie par $h'(x) = 2x\ln(x^2) + \frac{x^2 + 1}{x^2}$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = +\infty$.

4. La fonction k est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $k(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x + 1}$.

Quelle est ou quelles sont les propositions qui sont vraies ?

a. $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1$.

c. k est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $k'(x) > 0$.

22 Fonction logarithme et fonction rationnelle

(D'après Amérique du Nord, juin 2001)

CORRIGÉ P. 72

60 minutes

Dans la **partie A** de cet exercice, on étudie la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$. Dans la **partie B**, on détermine la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique.

Partie A

1. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$.

a. Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

b. Étudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f .

Partie B

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

a. Étudier le sens de variation de h puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0,4; 0,7]$.

b. Montrer que l'on a $e^{-\alpha} = \alpha$.

2. a. Vérifier que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

b. Utiliser les résultats de la question 1. **a.** pour déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et D .

c. Construire $\mathcal{C}$ et D dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

23 Fonctions logarithme et inverse

(D'après Asie, juin 2003)

CORRIGÉ P. 74

⌚ 60 minutes ● ● ●

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^2}.$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathcal{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que $(\mathcal{C})$ a deux asymptotes que l'on déterminera.

2. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f .

3. Soit I le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de I .

4. Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.

a. Étudier les variations de la fonction g .

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0; 2[$ et $]2; +\infty[$. Soit α la solution appartenant à $]2; +\infty[$.

5. a. Montrer que $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent en deux points.

b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

6. Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

24 Fonction logarithme népérien

(D'après Antilles-Guyane, septembre 2002)

CORRIGÉ P. 74

⌚ 75 minutes ● ● ●

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = (\ln x) \times \ln(1-x), \text{ pour } x \in]0; 1[\end{cases}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, ainsi que le résultat suivant :

$$\text{pour } \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0.$$

1. a. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\frac{\ln(1-x)}{x}$.

b. En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\frac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Montrer que pour tout $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, $f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$.

Que peut-on en conclure pour $\mathcal{C}$?

3. Soit φ la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x.$$

a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0; 1[$.

b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur $]0; 1[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur $]0; 1[$.

c. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0; 1[$.

4. a. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0; 1[$.

b. Donner le tableau de variation de f .

c. Montrer que, pour tout $x \in]0; 1[$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2.$$

d. Tracer $\mathcal{C}$.

Problèmes de synthèse

25

Fonction exponentielle. Famille de fonctions

(D'après La Réunion, juin 2003)

CORRIGÉ P. 80

 30 minutes

Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

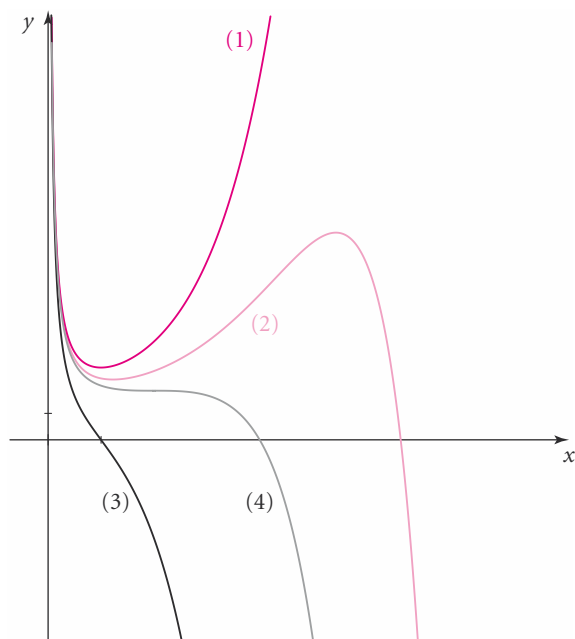
$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x} e^x.$$

1. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

2. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation $f'_k(x) = 0$.

3. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On a tracé sur le graphique page suivante les courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_{-0,25}$, $\mathcal{C}_{-0,15}$ et $\mathcal{C}_0$. En utilisant les questions précédentes, reconnaître chaque courbe.



26 Fonction exponentielle

(D'après Amérique du Nord, juin 2005)

CORRIGÉ P. 81

40 minutes

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x}).$$

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.
- b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
- c. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .
2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.
- b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
- c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variation de f .
3. Déterminer le point A de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ .

27 Fonction exponentielle. Théorème des valeurs intermédiaires

(D'après Liban, juin 2003)

CORRIGÉ P. 82

1 h 20

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que : $0,94 < \alpha < 0,941$.
4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B – Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x}).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f .
4. a. Démontrer l'égalité $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.
- b. Étudier le sens de variation de la fonction $h: x \mapsto \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$ sur l'intervalle $]-\infty; \frac{5}{2}[$.

En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.

5. Démontrer que la droite D , d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D .
6. Tracer la droite D et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

28 Fonction exponentielle

(Nouvelle Calédonie, novembre 2004)

CORRIGÉ P. 85

🕒 50 minutes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g .
2. Justifier que pour tout réel x , $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .
- b. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
- b. À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T) .
4. Tracer la droite (T) , les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C})$.

29

Fonction exponentielle**et fonction rationnelle** (D'après Inde, avril 2004)

CORRIGÉ P. 86



50 minutes

**Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire**Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1.$$

1. a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b. Étudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$, qui sera notée α .
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B – Étude de la position relative de deux courbesLes fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0 ; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.
2. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$$

où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.

- b. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- c. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

30

Fonction exponentielle.**Dérivées première et seconde**

(D'après Amérique du Sud, décembre 2001)

CORRIGÉ P. 88



60 minutes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$$

et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Partie A – Étude de la fonction f

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
- b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. a. Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
- b. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B – Étude d'une tangente

1. On rappelle que f'' désigne la dérivée seconde de f .

a. Montrer que, pour tout x réel, $f''(x) = 4(2x - 1)e^{-2x}$.

b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.

2. Soit B le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ de la courbe $\mathcal{C}$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en B.

3. On veut étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T . Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}\right).$$

a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b. Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x .

En déduire le sens de variation de g' sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de g .

d. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . Que peut-on en conclure sur la position relative de $\mathcal{C}$ et T ?

4. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points A et B puis tracer la tangente T et la courbe $\mathcal{C}$.

31 Fonction exponentielle. Équation avec paramètre

[D'après Amérique du Nord, juin 2000]

CORRIGÉ P. 90

⌚ 60 minutes ● ● ●

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

2. Pour $x > 0$, calculer $\frac{f(x) - f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0 (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u} = 0$).

Que peut-on déduire pour la fonction f ?

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

3. Démontrer que pour tout x de $]0; +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variation de f .

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Montrer que dans $]0; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.

2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.

3. On pose $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près et montrer que $A = f'(\alpha)$.

4. Pour tout $a > 0$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .
Montrer que T_a a pour équation $y = Ax$. Tracer T_a , puis la courbe $\mathcal{C}$.
5. Dédurre des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathcal{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_a passe par l'origine O .
6. On admettra que T_a est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0; +\infty[$.
- a. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné.
- b. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné.

32

Fonction exponentielle.**Théorème des valeurs intermédiaires**

(D'après Antilles-Guyane, septembre 2003)

CORRIGÉ P. 93

50 minutes

**Partie A – Étude de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$**

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β . On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.
4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-1} des valeurs α et β .
5. Montrer que $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$.

Partie B – Étude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

1. Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la **partie A**, construire le tableau des variations de f .
4. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la **partie A** s'annule.

33

Conjecturer à partir d'un écran**de calculatrice** (D'après Inde, mars 2003)

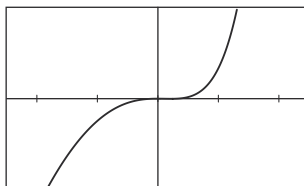
CORRIGÉ P. 94

60 minutes

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique page suivante est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Conjectures

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

- Le sens de variation de f sur $[-3 ; 2]$?
- La position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A – Contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel

- Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
- Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
- En déduire le sens de variation de la fonction g , puis dresser son tableau de variation.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3. Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

- Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
- En déduire le sens de variation de la fonction f .
- Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B – Contrôle de la deuxième conjecture

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$.

- Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0 ; 1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur $[0 ; 1]$.
- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- a.** Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe $(x'x)$.
- b.** Préciser alors la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
- c.** Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

34

Fonctions exponentielle et logarithme

(D'après Amérique du Nord, juin 2003)

CORRIGÉ P. 97

50 minutes



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3. a. Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .

b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes.

35

Fonction exponentielle**de base a** (Exercice type bac)

CORRIGÉ P. 99

40 minutes



Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x2^{-x} \text{ et } g(x) = x^{-1}2^x.$$

1. Étudier les limites de f et de g aux bornes de leur ensemble de définition (on pourra poser $u = x \ln 2$).

2. Étudier les variations des fonctions f et g .

3. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, courbes représentatives de f et g .

36

Fonction logarithme. Lecture graphique

(D'après France métropolitaine, septembre 2004)

CORRIGÉ P. 100

60 minutes



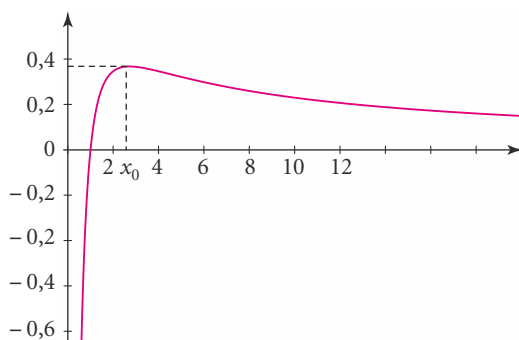
Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0; +\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction h est donnée ci-dessous ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h .

Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c. Déterminer l'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $]0 ; \frac{1}{e}[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1 ; e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e ; +\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.

Ainsi le couple $(a ; b)$ est solution de (E).

4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1 ; e[$ associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e ; +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c. Déterminer les variations de la fonction s . Dresser le tableau de variation de s .

37 Fonction exponentielle. Barycentre

(D'après France métropolitaine, juin 2002)

CORRIGÉ P. 101

🕒 90 minutes



Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}[x + (1-x)e^{2x}].$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm).

1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ .

2. Calculer $f'(x)$.

3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$.

a. Étudier le sens de variation de u .

Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0; 1]$.

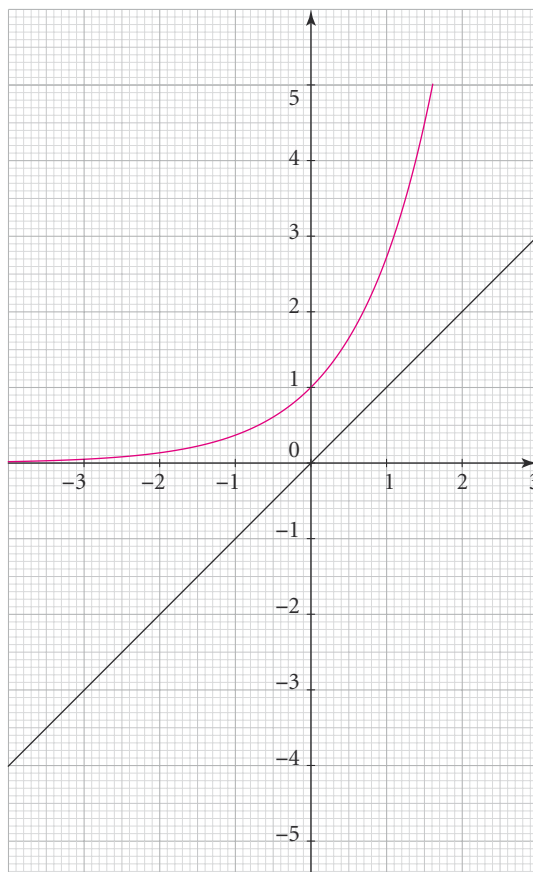
Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

b. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équation $y = e^x$ et la droite D d'équation $y = x$. Les courbes Γ et D sont tracées ci-dessous.



1. Soit t un réel ; on désigne par M_t le point de Γ d'abscisse t .

La tangente à Γ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t .

Déterminer les coordonnées du point N_t .

2. On désigne par P_t le point de D d'abscisse t et par G_t l'isobarycentre des points, O , M_t , P_t et N_t . Le point G_t est donc le barycentre des points pondérés $(O; 1)$, $(M_t; 1)$, $(P_t; 1)$ et $(N_t; 1)$.
- a. Placer les points M_{-2} , P_{-2} , et N_{-2} puis construire, en justifiant, le point G_{-2} sur la figure page précédente.
- b. Déterminer en fonction de t les coordonnées du point G_t .
3. Quel est l'ensemble des points G_t quand t décrit $\mathbb{R}$?
4. Construire la courbe $\mathcal{C}$ de la **partie A** sur la figure ci-avant.

38 Fonction exponentielle et suites

[D'après Polynésie, juin 2002]

CORRIGÉ P. 105

90 minutes

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$$

et l'on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
- Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0; +\infty[$.
- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 0.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique u . Montrer que u appartient à $[1; 2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .
- Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ sur la même figure.

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}.$$

- Calculer $f'_n(x)$ et donner son signe sur $[0; +\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Dresser le tableau de variation de f_n .
- a. Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?
b. Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $e^{n+1} > 2n+1$.
En déduire le signe de $f_n(n+1)$.
- c. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n; n+1]$; cette solution sera notée u_n .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

39

Fonction exponentielle. Famille de fonctions

(D'après Antilles-Guyane, juin 2002)

CORRIGÉ P. 107

45 minutes



Pour tout entier naturel n , on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{(1-n)x}}{1 + e^x}.$$

Partie A – Étude de f_0 et de f_1

On appelle f_0 la fonction définie par $f_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

On appelle $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ les courbes représentatives respectivement de f_0 et de f_1 dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f_0 et étudier son sens de variation.
3. Montrer que le point $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_0$.
4. Déterminer une équation de la tangente en I à $\mathcal{C}_0$.
5. Montrer que pour tout réel x , $f_1(-x) = f_0(x)$.
6. Par quelle transformation simple $\mathcal{C}_1$ est-elle l'image de $\mathcal{C}_0$?

Partie B – Étude de f_n pour $n > 1$

1. Déterminer les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f_n et étudier son sens de variation.

40

Fonction exponentielle et logarithme

(D'après Centres étrangers groupe 1, juin 2002)

CORRIGÉ P. 108

90 minutes



Pour chaque entier naturel n , on définit, sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction notée f_n par :

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A – Étude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.
2. **Résolution graphique d'une inéquation**

a. Justifier graphiquement l'inégalité suivante :

$$\text{pour tout réel } u, e^u \geq u + 1.$$

b. En déduire que pour tout réel x :

$$e^{-x} + x - 1 \geq 0, \text{ puis que, } 1 + (x - 1)e^x \geq 0.$$

3. Limitesa. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.b. Déterminer la limite de f_0 en 0.**4. Sens de variation**a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ on a :

$$f'_0(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de f_0 sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

5. On appelle $\mathcal{C}_0$ la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ pour lequel l'unité graphique est 2 cm.

Tracer $\mathcal{C}_0$ dans ce repère et placer le point A de coordonnées (0 ; 1).**Partie B – Étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geq 1$**

On appelle $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de fonction f_n dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ précédent.

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.2. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.En déduire que $\mathcal{C}_n$ possède une asymptote qu'on précisera.3. Étudier les positions respectives des courbes $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$.4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.

5. a. Montrer qu'il existe un unique réel α_1 , appartenant à l'intervalle $[0,3 ; 0,4]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.

b. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$.c. Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1 ; 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

6. a. En utilisant la **partie A**, montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; 1]$:

$$\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$, puis que,

$$\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}.$$

c. Déterminer la limite de la suite (α_n) .**41 Fonction logarithme**

(D'après Amérique du Nord, juin 2002)

CORRIGÉ P. 111

⌚ 60 minutes ●●●

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x.$$

Soit $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire – Mise en place d'une inégalité

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

1. Étudier le sens de variation de g .
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a) \leq a$.

Partie A – Étude de la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 .
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right).$$

En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f_1 .

Partie B – Étude et propriétés des fonctions f_k

1. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k .
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right).$$

En déduire la limite de f_k en $+\infty$.

3. a. Dresser le tableau de variation de f_k .
- b. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f_k(x) \leq \frac{k}{e}.$$

4. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_m$.
6. Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

QCM

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Barème

Une réponse exacte rapporte 2 points. Une réponse inexacte enlève 1 point.

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le résultat est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

10 points

30 minutes

QCM 1

L'équation $\ln x = -1$ a pour solution :

- ☐ a. $-e$
- ☐ b. $\emptyset$
- ☐ c. $e - 1$
- ☐ d. e^{-1} .

QCM 2

L'équation $e^x = -e$ a pour solution :

- ☐ a. 0
- ☐ b. $\emptyset$
- ☐ c. 1
- ☐ d. -1 .

QCM 3

La fonction f est définie par $f(x) = \ln 5\pi$.

Alors $f'(x)$ est égal à :

- ☐ a. $5 \ln \pi$
- ☐ b. $\frac{5}{\pi}$
- ☐ c. $\frac{1}{5\pi}$
- ☐ d. 0.

QCM 4

La fonction f est définie par $f(x) = xe^{-x}$. Alors $f'(x)$ est égal à :

- ☐ a. e^{-x}
- ☐ b. $-e^{-x}$
- ☐ c. $e^{-x}(1 - x)$
- ☐ d. $e^{-x}(1 + x)$.

QCM 5

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2x-1}{x^2+3}$ est égal à :

- ☐ a. $\ln 2$
☐ b. 0
☐ c. $+\infty$
☐ d. $-\infty$.

QCM 6

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 3$ est égal à :

- ☐ a. -3
☐ b. $+\infty$
☐ c. $-\infty$
☐ d. 0 .

QCM 7

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2 + e^{-x})$ est égal à :

- ☐ a. 0
☐ b. $\ln 2$
☐ c. $-\ln 2$
☐ d. $+\infty$.

QCM 8

La fonction f est définie par $f(x) = 3,14^x$.

Alors $f'(x)$ est égal à :

- ☐ a. $(\ln 3,14) \times 3,14^x$
☐ b. $(\ln 3,14) \times x^{3,14}$
☐ c. $x \times 3,14^{x-1}$
☐ d. $3,14x^{3,14}$.

QCM 9

$\sqrt[3]{64^2}$ est égal à :

- ☐ a. 8
☐ b. 16
☐ c. 32
☐ d. 64 .

QCM 10

L'équation $5^x = 3$ a pour solution :

- ☐ a. $\frac{3}{5}$
☐ b. $\frac{\ln 3}{\ln 5}$
☐ c. $\ln \frac{3}{5}$
☐ d. $\ln 3 - \ln 5$.

CORRIGÉS P. 114

Total

CORRIGÉS

Exercice 1, page 17

La proposition **a** est **vraie** (c'est un résultat de cours admis) mais la proposition **b** est **fausse**. Comme contre-exemple, on peut citer la fonction valeur absolue qui est continue mais non dérivable en 0.

La proposition **c** est **vraie** ; c'est la définition même du nombre dérivé.

Exercice 2, page 17

1 Seule la proposition **d** est vraie.

a. La fonction f_1 a une limite (finie) en $+\infty$.

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $x > 0$, donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1$.

Si $x \neq 0$, $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ et, la fonction sinus étant dérivable en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos x$, donc $\sin'0 = \cos 0 = 1$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

c. La fonction f_1 n'est pas impaire.

Par exemple, $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ et $f_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$, donc $f_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

En fait, la fonction f_1 est paire.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f_1(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = f_1(x)$.

d. La fonction f_1 est décroissante sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

La fonction f_1 est dérivable sur son ensemble de définition car c'est le quotient de deux fonctions dérivables.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f_1'(x) = \frac{(\cos x) \times x - (\sin x) \times 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Si $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $f_1'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2}$, $\cos x > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de $x - \tan x$.

Si g est la fonction définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = x - \tan x$, g est dérivable et sa dérivée est définie par $g'(x) = 1 - (1 + \tan^2 x) = -\tan^2 x$.

$g'(0) = 0$ et $g'(x) < 0$ sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ donc g est strictement décroissante sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Comme $g(0) = 0$, on en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. En conclusion, on a $f'_1(x) < 0$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, donc f_1 est strictement décroissante sur cet intervalle.

2 Seule l'affirmation c vraie.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = -2.$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f_2(x) = \frac{(x-1)(-3x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3x-1}{x+1}.$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} (-3x-1) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$, on a $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = \frac{-4}{2} = -2.$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -3.$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, $f_2(x) = \frac{x}{x} \times \frac{-3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \frac{-3}{1} = -3.$

c. L'affirmation c se déduit du résultat précédent.

3 Seule l'affirmation c est fausse.

• Pour « lever l'indétermination » en $-\infty$ on peut penser à factoriser le terme de plus haut degré mais l'expression obtenue pour $x < 0$ ne permet pas de conclure.

Si $x \neq 0$, $f_3(x) = x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{16}{x^2}\right)} = x + |x| \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}}.$

Si $x < 0$, $f_3(x) = x - x \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} = x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}}\right).$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}}\right) = 0$, on ne peut pas conclure quant à la limite de $f_3(x)$.

On utilise l'expression conjuguée de $f_3(x)$ pour modifier son écriture. Pour tout

$x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 16})(x - \sqrt{x^2 + 16})}{x - \sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x^2 - (x^2 + 16)}{x - \sqrt{x^2 + 16}} = \frac{-16}{x - \sqrt{x^2 + 16}}.$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 16} = -\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = 0.$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) - 2x = \sqrt{x^2 + 16} - x.$

On a $f_3(x) - 2x = \frac{(\sqrt{x^2 + 16} - x)(\sqrt{x^2 + 16} + x)}{\sqrt{x^2 + 16} + x} = \frac{16}{\sqrt{x^2 + 16} + x}.$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 16} + x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) - 2x = 0$, la droite d'équation $y = 2x$ est bien asymptote à $\mathcal{C}_{f_3}$ en $+\infty$.

- Pour calculer $f'_3(x)$ on utilise la formule donnant la dérivée de $\sqrt{u}$:

Si u est dérivable et strictement positive, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout réel x , $f'_3(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$.

- La tangente à $\mathcal{C}_{f_3}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'_3(0)(x-0) + f_3(0)$ avec $f'_3(0) = 1$ et $f_3(0) = 4$. Une équation de cette tangente est donc $y = x + 4$.

4 Les affirmations **a** et **c** sont vraies, l'affirmation **b** est fausse.

a. L'affirmation **a** est vraie.

Pour la justifier on étudie la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

La fonction polynôme g est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est définie par :

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Le signe de $g'(x)$ et le sens de variation de g qui s'en déduit sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Pour les limites en $-\infty$ et $+\infty$, on utilise le fait qu'un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Sur chacun des intervalles où la fonction est strictement monotone, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier le fait qu'il existe un réel unique de cet intervalle où la fonction s'annule.

Par exemple, sur $]-\infty; -1]$, la fonction g est continue et strictement croissante, donc pour tout réel k appartenant à l'intervalle $J =]\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); g(-1)]$, il existe un unique réel α appartenant à $]-\infty; -1]$ tel que $g(\alpha) = k$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $g(-1) = 3$, $0 \in J$ et on peut conclure qu'il existe un réel unique α de $]-\infty; -1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. On peut résoudre algébriquement l'équation pour justifier que l'affirmation **b** est fausse.

Pour tout réel x , l'équation équivaut à $\sqrt{4x^4+1} = 2$,

$$4x^4 + 1 = 4,$$

$$x^4 = \frac{3}{4}.$$

Comme $x^2 \geq 0$, cette dernière équation équivaut à $x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il y a donc deux solutions $-\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

c. L'affirmation c est vraie.

Pour la justifier on étudie la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x + \sin x$.

• Limites en $-\infty$ et $+\infty$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $2x - 1 \leq h(x) \leq 2x + 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

• Sens de variation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 2 + \cos x$ et $-1 \leq \cos x$, donc $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ à $+\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut en déduire que pour tout réel m , l'équation $2x + \sin x = m$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3, page 18

1 a. La limite de u en $-\infty$ n'est pas indéterminée car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$, donc

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$.

b. En multipliant et en divisant $u(x)$ par $\sqrt{x^2 + 1} + x$ (appelée expression conjuguée de $\sqrt{x^2 + 1} - x$), et en utilisant l'identité $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, on obtient :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$.

L'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est asymptote à $(\mathcal{C})$.

2 a. En utilisant le même procédé qu'au 1. b., on écrit :

$$u(x) + 2x = \sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{u(x)}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) + 2x = 0$.

La droite (Δ) d'équation $y = -2x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

b. • Signe de $u(x)$:

Si $x < 0$, $-x > 0$ donc $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, c'est-à-dire $u(x) > 0$.

$u(0) = 1$ donc $u(0) > 0$.

Si $x > 0$, $u(x) = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x$

$$u(x) = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right).$$

Comme $1 + \frac{1}{x^2} > 1$, on a $u(x) > 0$.

On en conclut que pour tout réel x , $u(x) > 0$.

• Signe de $u(x) + 2x$:

On a vu que $u(x) + 2x = \frac{1}{u(x)}$ et que $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tout réel x , $u(x) + 2x > 0$.

c. On en déduit que la droite (Δ) , asymptote à $(\mathcal{C})$, est au-dessous de $(\mathcal{C})$ sur $\mathbb{R}$.

3 a. La fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

On a $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1$

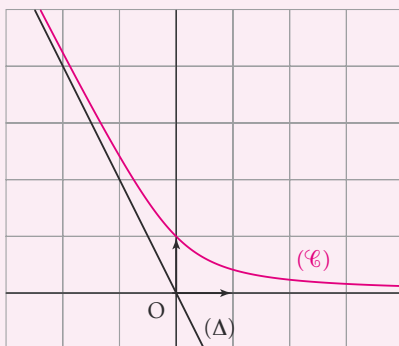
soit $u'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$,

donc $u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

b. Comme $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, $u'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction u est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de $+\infty$ à 0 .

4 $(\mathcal{C})$ et (Δ) sont représentées ci-dessous.



Exercice 4, page 18

Comme pour tout exercice ouvert, plusieurs méthodes sont possibles.

En voici deux.

Méthode 1

La fonction $x \mapsto |x|$ est connue pour être dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. De même, $x \mapsto |x - 3|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en 3.

Mais par cette fonction, l'image de 4 est 1 et non -1 comme demandé dans l'énoncé.

On peut donc proposer :

– la fonction $f_1 : x \mapsto -|x - 3|$, représentée sur la figure 1 ;

– la fonction $f_2 : x \mapsto |x - 3| - 2$, représentée sur la figure 2.

Méthode 2

On peut proposer une fonction affine par intervalle dont la représentation passe par $A(4 ; -1)$ et présente un point anguleux pour $x = 3$, comme f_3 représentée sur la figure 3.