Sabin Lessard

Analyse mathématique

Premiers pas

Cours et exercices corrigés



2e édition

ellipses

Références sciences

Analyse mathématique

Premiers pas

Cours et exercices corrigés

2e édition

Sabin Lessard

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-121089
Dépôt légal : octobre 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

2e édition

Merci d'abord à tous les lecteurs et toutes les lectrices de la première édition. C'est la plus belle reconnaissance qu'un auteur puisse recevoir. La deuxième édition de ce cours d'analyse mathématique, qui introduit une version numérique, a été l'occasion de clarifier des concepts, de revoir des démonstrations, de corriger des erreurs et d'améliorer la mise en page, mais surtout d'ajouter des exercices corrigés dont le nombre passe à 136. Cela permet d'approfondir les propriétés des nombres réels et des fonctions numériques, dont l'étonnant théorème de Darboux et l'irrationalité de π. Bonne lecture !

1re édition

Cette introduction à l'analyse s'adresse aux étudiantes et étudiants des filières mathématiques au niveau de la licence (ou du baccalauréat selon les pays). Les préalables sont des connaissances de base en calcul différentiel et intégral, en algèbre linéaire et en mathématiques discrètes.

L'analyse mathématique a pour objet l'étude du continu. C'est la branche des mathématiques qui traite rigoureusement de la notion de limite, qu'il s'agisse de la limite d'une suite ou de la limite d'une fonction. Ce qui la distingue du calcul infinitésimal est la justification des calculs. L'analyse mathématique demande un effort sérieux de la part des étudiants qui ne sont pas toujours familiers avec la notion de preuve. Or, toutes les affirmations dans un cours d'analyse mathématique sont démontrées. On ne se contente pas d'indiquer comment faire des calculs ; on explique pourquoi on peut les faire de telle ou telle façon. Une nouveauté pour plusieurs.

Ce cours d'analyse approfondit le calcul différentiel. Il commence par une présentation des nombres réels (chapitre 1), suivie par une étude des suites et des séries numériques en lien avec la notion de convergence (chapitres 2 et 3). Il se poursuit et se termine par l'étude des fonctions numériques autour des notions de continuité et de dérivation (chapitres 4 et 5). Les points culminants

sont le principe d'induction mathématique dont découle la méthode de preuve par récurrence, la propriété de Bolzano-Weierstrass qui garantit l'existence d'une sous-suite convergente de toute suite bornée, la convergence de tout réarrangement d'une série absolument convergente, les propriétés des valeurs intermédiaires et des bornes atteintes des fonctions continues, et finalement le théorème des accroissements finis pour les fonctions dérivables. C'est sur ce théorème que repose la règle de l'Hôpital pour la limite d'un quotient de fonctions de forme indéterminée et la formule de Taylor pour approcher une fonction plusieurs fois dérivable.

Le contenu du cours est de nature essentiellement théorique. L'objectif est de revenir aux sources de la pensée mathématique et de fournir des bases solides pour les développements ultérieurs. Les applications sont vues dans d'autres cours, notamment sur les probabilités et les équations différentielles.

Le cours a été fortement influencé à l'origine par le livre *Introduction à l'analyse réelle* (Modulo) de Jacques Labelle et Armel Mercier, ainsi que par les notes de cours de mon collègue à l'Université de Montréal, André Giroux, publiées sous le titre *Initiation à l'analyse mathématique* (Ellipses). Mentionnons également le grand classique qu'est *Principles of Mathematical Analysis* (McGraw-Hill, Dunod pour la traduction française) de Walter Rudin et le volumineux *Calculus* (Publish or Perish) de Michael Spivak, sans oublier de nombreux articles dans l'encyclopédie en accès libre Wikipédia qui sont souvent des exemples de concision et de clarté. La bibliographie contient une liste complète des ouvrages qui ont été utilisés d'une manière ou d'une autre lors de la rédaction du cours, ne serait-ce que comme une source d'inspiration.

Je tiens à souligner la contribution inestimable d'auxiliaires d'enseignement de l'Université de Montréal à l'amélioration de l'enseignement de la matière du cours et à la rédaction des exercices et corrigés portant sur cette matière. Toute ma reconnaissance donc à Jose Rodriguez-Caballero, Toktam Dinevari, Vincent Girard, Collin Jauffret, Dhaker Kroumi et Jean Lagacé.

Un grand merci enfin aux générations d'étudiants et d'étudiantes ainsi qu'à mes collègues anciens ou actuels du Département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal pour des commentaires judicieux et des discussions stimulantes sur la matière du cours.

Un merci spécial pour mon directeur de thèse de doctorat, Richard Duncan, dont j'ai toujours admiré l'enthousiasme pour l'enseignement, et une pensée pour mon superviseur de stage postdoctoral et mentor en génétique mathématique, Samuel Karlin, décédé en 2007. Deux grands analystes auxquels je rends ici hommage.

Table des matières

1 Droite numérique **1**
1.1 Nombres réels 1
1.2 Valeur absolue 7
1.3 Entiers naturels et induction mathématique 9
1.4 Nombres rationnels et nombres irrationnels 13
1.5 Applications 17
1.6 Ensembles ouverts et ensembles fermés 21
1.7 Intervalles 23
1.8 Exercices 25

2 Suites numériques **29**
2.1 Limite d'une suite 29
2.2 Relations entre limites de suites 36
2.3 Limite inférieure et limite supérieure 41
2.4 Ensembles compacts 44
2.5 Suite de Cauchy 46
2.6 Exercices 47

3 Séries numériques **51**
3.1 Séries convergentes 51
3.2 Critères de convergence pour les séries positives 53
3.3 Séries absolument convergentes 60
3.4 Séries normalement convergentes 65
3.5 Séries alternées 67
3.6 Développement décimal d'un nombre réel 69
3.7 Exercices 71

4 Limite et continuité d'une fonction numérique 75
4.1 Limite d'une fonction numérique . . . 75
4.2 Fonctions continues . . . 79
4.3 Propriété des valeurs intermédiaires . . . 85
4.4 Propriété des bornes atteintes . . . 87
4.5 Propriétés topologiques des fonctions continues . . . 89
4.6 Fonctions uniformément continues . . . 91
4.7 Fonction réciproque . . . 93
4.8 Exercices . . . 96

5 Dérivation d'une fonction numérique 99
5.1 Fonctions dérivables . . . 99
5.2 Propriétés de la dérivée . . . 102
5.3 Théorème des accroissements finis . . . 107
5.4 Règle de l'Hôpital . . . 111
5.5 Formule de Taylor . . . 113
5.6 Série de Taylor de la fonction exponentielle . . . 115
5.7 Logarithme népérien et puissance réelle . . . 117
5.8 Extrema locaux . . . 119
5.9 Fonctions convexes . . . 122
5.10 Exercices . . . 127

6 Annexe : Éléments de géométrie 133
6.1 Fonctions trigonométriques . . . 133
6.2 Théorème de Pythagore et loi des cosinus . . . 137
6.3 Produit scalaire . . . 138
6.4 Aire d'un disque . . . 140
6.5 Existence et unicité de la circonférence . . . 142
6.6 Irrationalité de π . . . 143

7 Corrigés des exercices 145
Corrigés du chapitre 1 . . . 145
Corrigés du chapitre 2 . . . 156
Corrigés du chapitre 3 . . . 166
Corrigés du chapitre 4 . . . 176
Corrigés du chapitre 5 . . . 184

Bibliographie 201

Index 203

Symboles et notations

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels
$\varnothing$ ensemble vide
$\forall$ pour tout (ou tous)
$\exists$ il existe
$\in$ appartient à (l'ensemble)
$\notin$ négation de $\in$
$\subseteq$ inclus dans (l'ensemble)
$\cup$ union (d'ensembles)
$\cap$ intersection (d'ensembles)
E^c complémentaire de l'ensemble E
$\overline{E}$ fermeture ou adhérence de l'ensemble E
$\mathrm{Int}(E)$ ou $\mathring{E}$ intérieur de l'ensemble E
$\mathrm{Fr}(E)$ ou ∂E frontière de l'ensemble E
$=$ égal à (un nombre, une fonction ou un ensemble)
$<$ inférieur (strictement) à
$\leqslant$ inférieur ou égal à
$>$ supérieur (strictement) à
$\geqslant$ supérieur ou égal à
$+$ plus (pour l'addition de deux nombres ou fonctions)
$-$ moins (pour la soustraction de deux nombres ou fonctions)
$\pm$ plus ou moins
$+\infty$ plus l'infini
$-\infty$ moins l'infini
$\setminus$ moins (pour la différence de deux ensembles)
$\cdot$ fois (pour la multiplication de deux nombres ou fonctions)
$/$ ou — sur (pour la division de deux nombres ou fonctions)
inf infimum (d'un ensemble)
sup supremum (d'un ensemble)

min minimum (d'un ensemble)
max maximum (d'un ensemble)
lim limite (d'une suite ou d'une fonction)
lim sup ou $\overline{\lim}$ limite supérieure (d'une suite)
lim inf ou $\underline{\lim}$ limite inférieure (d'une suite)
$\to$ tend vers (un nombre ou l'infini) ou à valeur dans (un ensemble)
$\uparrow$ croît vers (un nombre ou plus l'infini)
$\downarrow$ décroît vers (un nombre ou moins l'infini)
$\sum$ somme (de nombres ou fonctions)
$\prod$ produit (de nombres ou fonctions)
0 élément neutre de l'addition
1 élément neutre de la multiplication
e nombre d'Euler ou constante de Néper
π constante pi
Φ nombre d'or
$n!$ factorielle de l'entier naturel n
$-a$ élément opposé du nombre a
$|a|$ valeur absolue du nombre a
$\lfloor a \rfloor$ partie entière du nombre a
$\mathrm{frac}(a)$ partie fractionnaire du nombre a
a^{-1} élément inverse du nombre a
a^2 carré du nombre a
a^n puissance n-ième du nombre a
a^x puissance du nombre a d'exposant réel x
$\sqrt{a}$ racine carrée du nombre a
$\sqrt[n]{a}$ racine n-ième du nombre a
sin fonction sinus
cos fonction cosinus
exp fonction exponentielle
ln fonction logarithme naturel ou népérien
$f(a)$ valeur de la fonction f en a
$f(a^-)$ limite à gauche de la fonction f en a
$f(a^+)$ limite à droite de la fonction f en a
$f^{-1}(b)$ fonction réciproque de la fonction f en b
$f'(a)$ dérivée (première) de la fonction f en a
$f'_g(a)$ dérivée à gauche de la fonction f en a
$f'_d(a)$ dérivée à droite de la fonction f en a
$f''(a)$ dérivée seconde de la fonction f en a
$f^{(n)}(a)$ dérivée n-ième de la fonction f en a
$f \circ g(a)$ ou $f(g(a))$ composition de g par f évaluée en a

Chapitre 1

Droite numérique

1.1 Nombres réels

L'analyse mathématique a comme point de départ l'étude de l'ensemble des *nombres réels* qui est représenté par $\mathbb{R}$. Cet ensemble est muni d'une *opération d'addition* qui associe un nombre réel x *plus* y à tous réels x et y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{R}\,;$$

et d'une *opération de multiplication* qui leur associe un nombre réel x *fois* y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y \text{ (aussi noté } xy) \in \mathbb{R}.$$

Le résultat d'une addition est une *somme* et le résultat d'une multiplication, un *produit*.

Les cinq propriétés suivantes de l'addition et de la multiplication, où le signe $=$ signifie une *égalité*, c'est-à-dire le même élément à gauche et à droite, font de $\mathbb{R}$ ce qu'on appelle un *corps commutatif* :

P1 (commutativité) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x,$$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

P2 (associativité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z), \text{ noté } x + y + z,$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \text{ noté } x \cdot y \cdot z \text{ ou } xyz.$$

P3 (distributivité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

P4 (éléments neutres) Il existe des éléments $0 \in \mathbb{R}$ et $1 \in \mathbb{R}$ $(1 \neq 0)$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 0 = 0 + x = x,$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Les *éléments neutres* 0 et 1 pour l'addition et la multiplication, respectivement, sont uniques.

P5 (éléments symétriques) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un *élément opposé* $-x \in \mathbb{R}$ et un *élément inverse* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (en autant que $x \neq 0$ dans ce dernier cas, et alors $x^{-1} \neq 0$) tels que

$$x + (-x) = 0,$$

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Les éléments opposé et inverse sont uniques. La propriété de commutativité entraîne immédiatement les égalités

$$-(-x) = x = (x^{-1})^{-1}.$$

De plus, on a $-0 = 0$ et $1^{-1} = 1$, ce qui signifie que les éléments neutres sont leurs propres éléments symétriques. Enfin, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, l'*opération de soustraction* est définie par

$$x - y = x + (-y)\,;$$

et l'*opération de division* par

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1} \text{ (aussi noté } x/y),$$

en autant ici que $y \neq 0$. En particulier, on a $1/y = y^{-1}$. Le résultat d'une soustraction est une *différence* et le résultat d'une division un *quotient*. Un quotient se compose d'un *numérateur* (x ci-dessus) et d'un *dénominateur* (y ci-dessus).

L'ensemble $\mathbb{R}$ est également muni d'une *relation d'ordre strict* de telle sorte que $x < y$ pour deux nombres réels x et y distincts, c'est-à-dire *inégaux* ($x \neq y$), signifie que x est *inférieur* à y ou, ce qui est équivalent, que y est *supérieur* à x, ce qui est noté $y > x$.

On écrit $x \leqslant y$ pour signifier que x est *inférieur ou égal* à y, c'est-à-dire $x < y$ ou $x = y$, et de même $x \geqslant y$ pour signifier que x est *supérieur ou égal* à y, c'est-à-dire $x > y$ ou $x = y$. On définit ainsi une *relation d'ordre* sur $\mathbb{R}$.

On dit que le nombre x est *positif* (*strictement*) lorsque $x \geqslant 0$ ($x > 0$), et *négatif* (*strictement*) lorsque $x \leqslant 0$ ($x < 0$).

Les propriétés suivantes font de $\mathbb{R}$ un *ensemble totalement ordonné* dont la relation d'ordre est compatible non seulement avec l'addition d'un nombre réel quelconque mais aussi avec la multiplication par un nombre réel strictement positif :

P6 (trichotomie) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{soit } x < y, \text{ soit } x = y, \text{ soit } x > y,$$

ces trois possibilités étant mutuellement exclusives.

P7 (transitivité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$ avec égalité si et seulement si $x = y = z$.

P8 (compatibilité) Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

(a) si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$ avec égalité si et seulement si $x = y$, en particulier $x - y \leqslant y - y = 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$;

(b) si $x \leqslant y$ et $z > 0$, alors $x \cdot z \leqslant y \cdot z$ avec égalité si et seulement si $x = y$.

Finalement, le corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{R}$ possède la propriété remarquable suivante :

P9 (bornes supérieure et inférieure) Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est un sous-ensemble non vide qui possède un *majorant* $M \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \leqslant M,$$

alors E possède une *borne supérieure* (ou *supremum*) $\sup E \in \mathbb{R}$ qui est le plus petit majorant de E, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \leqslant \sup E,$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \text{ majorant de } E, \sup E \leqslant M.$$

Sinon, $\sup E = +\infty$ (appelé *plus l'infini*). Le supremum est unique. De façon analogue, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et possède un *minorant* $m \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \geqslant m,$$

alors E possède une *borne inférieure* (ou *infimum*) $\inf E \in \mathbb{R}$ qui est le plus grand minorant de E, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \geqslant \inf E,$$

$$\forall m \in \mathbb{R} \text{ minorant de } E, \inf E \geqslant m.$$

Sinon, $\inf E = -\infty$ (appelé *moins l'infini*). L'infimum est unique. Enfin, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et possède un majorant et un minorant, donc une borne supérieure et une borne inférieure, alors E est dit un *ensemble borné*.

Remarque 1.1.1. On a les règles suivantes sur les opérations d'addition et de multiplication avec $+\infty$, $-\infty$, et les nombres réels 0, $a > 0$ et $-a < 0$:

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad a + (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad -a + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$0 + (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad -a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty.$$

De plus, on a $(\pm\infty)^{-1} = 0$. En revanche, les multiplications $0 \cdot (\pm\infty)$ et les divisions $\pm\infty/\pm\infty$, comme par ailleurs $0/0$ et $(+\infty) - (+\infty)$, sont des *opérations indéterminées*.

L'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ qui possède toutes les propriétés énoncées ci-dessus est une question qui relève de la théorie des ensembles. Les propriétés supplémentaires qui suivent sont en fait des conséquences de ces propriétés. Quelques-unes de ces propriétés sont illustrées dans la figure 1 qui représente la droite numérique orientée de gauche à droite.

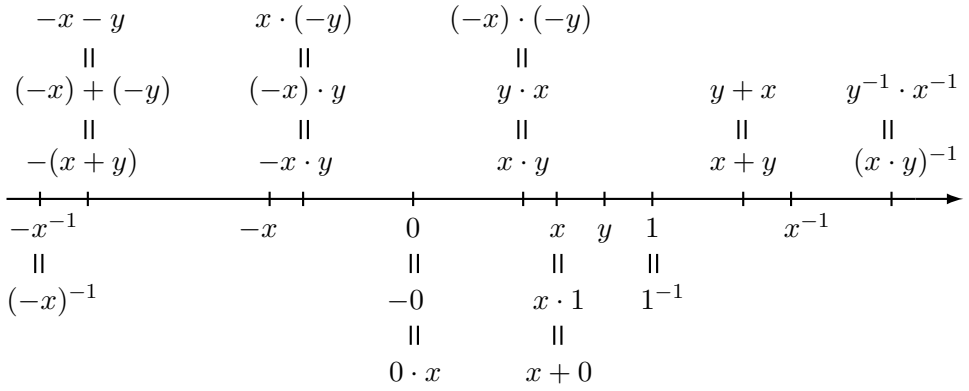

FIGURE 1 – Droite numérique orientée de gauche à droite.

C1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0\cdot x = x\cdot 0 = 0$. En effet, $0\cdot x = (0+0)\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x$, et donc

$$0 = 0\cdot x + (-0\cdot x) = (0\cdot x + 0\cdot x) + (-0\cdot x) = 0\cdot x + (0\cdot x - 0\cdot x) = 0\cdot x + 0 = 0\cdot x,$$

qui est égal à $x \cdot 0$ par la propriété de commutativité.

C2 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$, en particulier $-y = -(1 \cdot y) = (-1) \cdot y$. En effet,

$$x\cdot y + (-x)\cdot y = (x-x)\cdot y = 0\cdot y = 0 = x\cdot 0 = x\cdot(y-y) = x\cdot y + x\cdot(-y).$$

C3 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$. En effet,

$$(-x)\cdot(-y) = -x\cdot(-y) = -(-x\cdot y) = x\cdot y.$$

C4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x \neq 0)$, on a $(-x)^{-1} = -x^{-1}$, et donc en particulier $(-1)^{-1} = -1^{-1} = -1$. En effet,

$$(-x)\cdot(-x^{-1}) = (-x)\cdot(-1\cdot x^{-1}) = (-x)\cdot((-1)\cdot x^{-1}) = ((-x)\cdot(-1))\cdot x^{-1},$$

qui est égal à $(x \cdot 1) \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$.

C5 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $-(x + y) = -x - y$. En effet,

$$(x+y) + (-x-y) = (y+x) + (-x-y) = y + (x + (-x-y)),$$

qui est égal à

$$y + ((x-x) - y) = y + (0 - y) = y - y = 0.$$

C6 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$), on a $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$. En effet, on a alors

$$(x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) = (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = ((x \cdot y) \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1},$$

qui est égal à

$$(x \cdot (y \cdot y^{-1})) \cdot x^{-1} = (x \cdot 1) \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1.$$

C7 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$), on a $x > 0$ si et seulement si $-x < 0$. En effet, si $x > 0$, alors

$$0 = x + (-x) > 0 + (-x) = -x,$$

et si $-x < 0$, alors

$$0 = x + (-x) < x + 0 = x.$$

C8 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ ($x \neq y$), on a $x > y$ si et seulement si $-x < -y$. En effet, on a $x - y > 0$ si et seulement si

$$-(x - y) = -x - (-y) = -x + y < 0.$$

La propriété de compatibilité permet de conclure.

C9 Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x < y$ et $z < 0$, alors $x \cdot z > y \cdot z$. En effet, on a alors $-z > 0$, et donc

$$-(x \cdot z) = x \cdot (-z) < y \cdot (-z) = -(y \cdot z),$$

ce qui est équivalent à la conclusion par C8.

C10 On a $1 > 0$. Sinon, $1 = -(-1) < 0$, donc $-1 > 0$ par C7, et alors

$$1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) > 0 \cdot (-1) = 0,$$

ce qui est une contradiction par la propriété de trichotomie.

C11 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$), on a $x > 0$ si et seulement si $x^{-1} > 0$. En effet, si $x > 0$ et $x^{-1} < 0$, alors

$$1 = x \cdot x^{-1} < x \cdot 0 = 0,$$

ce qui entre en contradiction avec C10. De même, si $x < 0$ et $x^{-1} > 0$, alors

$$1 = x \cdot x^{-1} < 0 \cdot x^{-1} = 0,$$

ce qui entre encore en contradiction avec C10. La propriété de trichotomie permet de conclure.

C12 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $y > x > 0$, alors $y^{-1} < x^{-1}$, en particulier $y^{-1} < 1^{-1} = 1$ si $y > 1$. En effet, si $y^{-1} = x^{-1}$, alors

$$y = (y^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x,$$

ce qui est une contradiction. D'autre part, si $y^{-1} > x^{-1}$, alors

$$1 = y \cdot y^{-1} > y \cdot x^{-1} > x \cdot x^{-1} = 1,$$

ce qui est encore une contradiction. La propriété de trichotomie permet alors de conclure.

C13 Pour tous $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant a$ et $y \geqslant b$, alors $x+y \geqslant a+b$ avec égalité seulement si $x = a$ et $y = b$, en particulier $x + y \geqslant 0 + 0 = 0$ si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ avec égalité seulement si $x = 0$ et $y = 0$. En effet, par la propriété de compatibilité, on a alors

$$x + y \geqslant x + b \geqslant a + b$$

avec des égalités seulement si $x = a$ et $y = b$, et la conclusion découle de la propriété de transitivité.

C14 Pour tous $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, si $x > a > 0$ et $y > b > 0$, alors $x \cdot y > a \cdot b > 0$. En effet, par la propriété de compatibilité, on a alors

$$x \cdot y > a \cdot y > a \cdot b > 0 \cdot b = 0,$$

et la propriété de transitivité permet de conclure.

1.2 Valeur absolue

La *valeur absolue* de $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} x > 0 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -x > 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a donc $|x| \geqslant 0$, avec $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est ainsi un *ensemble valué*. En utilisant le nombre $|x - y|$ comme *distance* entre deux nombres réels x et y, l'ensemble $\mathbb{R}$ est un *espace métrique*.

Les principales propriétés de la valeur absolue sont énoncées dans la proposition qui suit, dont la plus remarquable est l'inégalité du triangle.

Proposition 1.2.1 (**propriétés de la valeur absolue**). *Pour tous nombres* $x, y \in \mathbb{R}$*, on a :*

(a) $|-x| = |x|$ *;*

(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *;*

(c) $-m \leqslant x \leqslant m$ *si et seulement si* $|x| \leqslant m$*, en particulier* $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ *;*

(d) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$*, qui est appelé l'*inégalité du triangle.

Démonstration. (a) Si $x = 0$, alors $-x = 0$, et donc $|-x| = |x| = 0$. Si $x > 0$, alors $-x < 0$, et donc

$$|-x| = -(-x) = x = |x|.$$

Enfin, si $x < 0$, alors $-x > 0$, et donc $|-x| = -x = |x|$.

(b) Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $x \cdot y = 0$ et $|x| = 0$ ou $|y| = 0$, d'où on obtient $|x \cdot y| = 0 = |x| \cdot |y|$. Si $x > 0, y > 0$, alors $x \cdot y > 0$, et donc

$$|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

Si $x < 0, y > 0$, alors $x \cdot y < 0 \cdot y = 0$, et donc

$$|x \cdot y| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

Le cas où $x > 0$ et $y < 0$ est symétrique au précédent. Enfin, si $x < 0, y < 0$, alors $x \cdot y = (-x) \cdot (-y) > 0$, d'où

$$|x \cdot y| = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|.$$

(c) On a $x \leqslant m$, c'est-à-dire $x = m$ ou $x < m$, si et seulement si $-x = -m$ ou $-x > -m$ par l'unicité de l'élément opposé et C8, c'est-à-dire si et seulement si $-x \geqslant -m$. On a donc $-m \leqslant x \leqslant m$ si et seulement si

$$-m \leqslant -x \leqslant -(-m) = m,$$

ce qui implique que $|x| \leqslant m$. Inversement, on a $|x| \leqslant m$ si et seulement si $-|x| \geqslant -m$, ce qui implique que $m \geqslant 0$ vérifie

$$-m \leqslant x = -(-x) \leqslant m.$$

(d) Par C5 et C13, les inégalités $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$ entraînent que

$$-(|x| + |y|) = -|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|.$$

La propriété précédente permet alors de conclure. □

1.3 Entiers naturels et induction mathématique

L'ensemble des *nombres entiers naturels* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est représenté par

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1, (1+1)+1, \ldots\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

avec $1 = 1 + 0 < 1 + 1 = 2 < 2 + 1 = 3 < 3 + 1 = 4$, et ainsi de suite. Cet ensemble est défini par :

(a) $1 \in \mathbb{N}$;

(b) $m + 1 \in \mathbb{N}$ si $m \in \mathbb{N}$;

(c) $\mathbb{N}$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui possède les deux propriétés précédentes.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est obtenu en prenant l'intersection de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui possèdent les propriétés (a) et (b), dont l'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même. La propriété (c) signifie que les propriétés (a) et (b) génèrent tous les entiers naturels. Autrement dit, on a le principe que voici :

Principe d'induction mathématique. *Si* $E \subseteq \mathbb{N}$ *est tel que* : **(i)** $1 \in E$, *et* **(ii)** $m + 1 \in E$ *si* $m \in E$, *alors* $E = \mathbb{N}$.

Ce principe s'applique en particulier à l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \text{ une affirmation donnée est vraie pour } n\}.$$

On obtient ainsi une façon de démontrer une affirmation parmi les plus utilisées en mathématiques, connue sous le nom de *preuve par récurrence*.

Les propriétés supplémentaires suivantes, dont la fameuse propriété d'Archimède, découlent des propriétés précédentes des nombres entiers naturels et des nombres réels :

(d) (infimum des entiers naturels) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geqslant 1$, ce qui implique que 1 est l'infimum de $\mathbb{N}$. En effet, l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant 1\}$$

contient 1 par définition de $\mathbb{N}$. De plus, si $n \in E$, alors $n+1 \in \mathbb{N}$, puisque $n \in \mathbb{N}$, et $n+1 > n+0 = n \geqslant 1$. Par conséquent, $n+1 \in E$. On conclut que $1 = \inf \mathbb{N}$, puisque 1 est un minorant de $\mathbb{N}$ qui appartient à $\mathbb{N}$.

(e) (somme de deux entiers naturels) Pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$, on a $m + n \in \mathbb{N}$. En effet, l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m + n \in \mathbb{N}\}$$

contient 1 par définition de $\mathbb{N}$. De plus, si $n \in E$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N},$$

d'où $n + 1 \in E$.

(f) (produit de deux entiers naturels) Pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$, on a $m \cdot n \in \mathbb{N}$. En effet, l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m \cdot n \in \mathbb{N}\}$$

contient 1 du fait que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $m \cdot 1 = m$. De plus, si $n \in E$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \in \mathbb{N}$$

en utilisant la propriété qui précède, d'où $n + 1 \in E$.

(g) (différence de deux entiers naturels) Pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$, on a $m - n \in \mathbb{N}$. En effet, on montre d'abord que l'affirmation est vraie pour $n = 1$ en remarquant que le sous-ensemble d'entiers naturels

$$E = \{k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$$

contient 1, et aussi $m + 1$ s'il contient m par la définition de $\mathbb{N}$, d'où $E = \mathbb{N}$ par le principe d'induction. Donc, si $m > 1$ avec $m \in \mathbb{N}$, alors $m = k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $m-1 = k \in \mathbb{N}$. De plus, si l'affirmation est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et si $m > n + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$, alors on a $m - n > 1$ avec $m - n \in \mathbb{N}$, d'où

$$m - (n + 1) = (m - n) - 1 \in \mathbb{N},$$

ce qui signifie que l'affirmation est vraie pour $n + 1$.

(h) (entiers naturels consécutifs) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il n'existe pas $m \in \mathbb{N}$ tel que $n < m < n + 1$. Sinon, on aurait

$$m - n < (n + 1) - n = 1 + (n - n) = 1 + 0 = 1$$

pour certains $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m - n \in \mathbb{N}$ par la propriété (g), donc avec $m - n \geqslant 1$ par la propriété (d), ce qui conduit à une contradiction. Les

nombres entiers naturels n et $n+1$ sont dits *consécutifs*, l'entier qui suit immédiatement n étant $n+1$ et l'entier qui précède immédiatement $n+1$ étant n. Les entiers consécutifs en commençant par 1 sont représentés par $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, et ainsi de suite (voir la section 3.6 sur le développement décimal pour les entiers suivants).

(i) (propriété d'Archimède) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x > 0)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > x, \text{ c'est-à-dire } n^{-1} = \frac{1}{n} < \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est donc non majoré, ce qui veut dire que $\sup \mathbb{N} = +\infty$. Sinon, on aurait $n \leqslant x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que x est un majorant de $\mathbb{N}$. Par la propriété de la borne supérieure, cela implique que $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. De plus, on a

$$s - 1 < s + 0 = s.$$

Donc, $s - 1$ ne peut pas être un majorant de $\mathbb{N}$, car cela entrerait en contradiction avec la définition de s. Par conséquent, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$s - 1 < m \leqslant s.$$

On obtient alors

$$s = s + 0 = s + (-1 + 1) = (s - 1) + 1 < m + 1 \in \mathbb{N},$$

ce qui est une contradiction avec la définition du nombre s.

(j) (principe du bon ordre) Pour tout ensemble non vide $E \subseteq \mathbb{N}$, on a $\inf E \in E$, qui est appelé *le plus petit élément* de E. Sinon, c'est-à-dire si $\inf E \notin E$, alors on a $1 < k$ pour tout $k \in E$, car 1 est un minorant de E qui ne peut pas appartenir à E, ce qui en ferait un infimum. Pour la même raison, on a $n + 1 < k$ pour tout $k \in E$ si $n < k$ pour tout $k \in E$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, on conclut qu'aucun entier naturel n'appartient à E, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{N}$.

(k) (entiers relatifs et partie entière d'un réel) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un nombre unique $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, où

$$\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{R} : n = 0 \text{ ou } n \in \mathbb{N} \text{ ou } -n \in \mathbb{N}\}$$

représente l'ensemble des *nombres entiers relatifs*, de telle sorte que

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Le nombre $\lfloor x \rfloor$ est appelé la *partie entière* de x alors que la différence $\mathrm{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$ est sa *partie fractionnaire*. Si $x = 0$, on pose simplement $\lfloor x \rfloor = 0$. Si $x > 0$, alors on considère

$$E_x = \{n \in \mathbb{N} : x < n\},$$

qui est un sous-ensemble non vide d'entiers naturels par la propriété d'Archimède, et on pose

$$\lfloor x \rfloor = \inf E_x - 1,$$

qui vérifie les conditions ci-dessus par le principe du bon ordre. Enfin, si $x < 0$, alors on pose

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor -x \rfloor - 1 & \text{si } -x \notin \mathbb{N}, \\ -\lfloor -x \rfloor & \text{si } -x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

L'unicité, dont la démonstration est laissée en exercice, découle du fait qu'il n'existe pas d'entier relatif supérieur à n et inférieur à $n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(l) (minimum et maximum d'un ensemble fini de réels) Pour tout ensemble de nombres $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\max\{x_1, \ldots, x_n\} = \sup\{x_1, \ldots, x_n\} \in \{x_1, \ldots, x_n\},$$

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} = \inf\{x_1, \ldots, x_n\} \in \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

L'affirmation pour le *maximum*, représenté par max, est évidemment vraie pour $n = 1$, car tout nombre réel est un majorant et un minorant de lui-même, et aucun autre majorant ne peut lui être inférieur et aucun minorant supérieur. De plus, si l'affirmation est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et si $\max\{x_1, \ldots, x_n\} = x_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$\max\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\} = \begin{cases} x_k & \text{si } x_{n+1} < x_k, \\ x_{n+1} & \text{si } x_{n+1} \geqslant x_k. \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a un élément qui appartient a

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\} = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}.$$

L'affirmation est donc vraie pour $n + 1$. La conclusion pour le max découle du principe d'induction. La conclusion pour le *minimum*, représenté par min, est obtenue de façon analogue. Lorsqu'un ensemble