

les maths
en tête

ANALYSE

3e édition

Xavier GOURDON

ellipses

les maths
en tête

ANALYSE

les maths en tête

ANALYSE

3e édition

Xavier GOURDON

Ancien élève de l'école polytechnique

ellipses

Du même auteur chez le même éditeur

Algèbre, Les maths en tête, 2e édition, 304 pages.

ISBN 9782340-038561
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2020
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos de la troisième édition

Près de ving-cinq ans après la première édition et douze ans après la seconde édition, cette troisième édition contient de nouveaux exercices et problèmes, ainsi que des extensions d'exercices. Ces ajouts sont toujours réalisés au travers de thèmes riches pour l'étudiant, soit parce que les résultats démontrés sont classiques, soit parce que l'esprit de leur résolution est intéressant par la méthode qu'il permet d'acquérir. On trouve aussi quelques corrections de coquilles, qui restaient présentes malgré le soin porté aux retouches de la deuxième édition.

xavier.gourdon_livres@yahoo.fr

Avant-propos de la deuxième édition

Plus de dix ans après la sortie de la première édition, cet ouvrage est encore largement utilisé pour la préparation des concours (grandes écoles, agrégation). Les retours de mes lecteurs (grâce à internet notamment) sont nombreux et m'ont encouragé à réaliser cette deuxième édition. Cette dernière contient des corrections de coquilles, quelques retouches et améliorations de preuves et solutions, ainsi que quelques exercices et problèmes supplémentaires dans l'esprit de l'édition précédente. Par ailleurs, le chapitre intégration a été largement revu pour être plus conforme au programme des classes préparatoires scientifiques. Enfin, une nouvelle annexe (annexe C) propose une démonstration du théorème des nombres premiers accessible à partir du programme des classes préparatoires.

J'espère que les améliorations de cette deuxième édition seront utiles à mes lecteurs pour la préparation de leur concours. Je tiens à remercier chaleureusement ceux qui m'ont aidé, directement ou indirectement, et en particulier les internautes dont les commentaires ont été nombreux.

Avant-propos de la première édition

Cet ouvrage propose aux étudiants des classes de mathématiques spéciales (programme M') des rappels et des compléments de cours complets, ainsi que des exercices et des problèmes corrigés. Il pourra également intéresser les élèves préparant l'agrégation.

L'ouvrage est orienté dans le même esprit que le tome Algèbre : le lien étroit qui existe entre le cours et les exercices est mis en avant. En effet, une bonne compréhension du cours passe nécessairement par la résolution d'exercices, et réciproquement, il est illusoire de s'attaquer à des exercices difficiles sans avoir une compréhension profonde du cours. Dans cet esprit, de multiples remarques ponctuent les parties de cours, mettant en avant ses subtilités, et faisant le lien avec les exercices qui suivent.

Les parties de cours ne sont pas un substitut au cours du professeur, mais plutôt un résumé exhaustif qui l'éclaire d'une façon différente. Les compléments sont des résultats très classiques qui ne figurent pas au programme mais dont la connaissance est utile et parfois indispensable pour mener à bien un exercice ou un problème. Les résultats présentés sont démontrés lorsqu'ils sont à la limite du programme ou lorsqu'ils constituent un point important dont la démonstration met en place des techniques instructives que l'étudiant doit connaître et savoir maîtriser.

À la fin de chaque section, on trouve une liste d'exercices de difficultés progressives, classiques ou parfois originaux, qui constituent une illustration du cours qui les précède. Je me suis efforcé à chaque fois de passer en revue tous les problèmes qui tournent autour du thème de l'exercice. Les nombreuses références au cours sont là pour inviter le lecteur à s'y reporter, le but étant de savoir et de comprendre précisément les résultats que l'on utilise.

Une liste de problèmes ponctue la fin de chaque chapitre, ces problèmes étant des exercices plus longs, plus difficiles ou plus originaux que les précédents et faisant appel à l'ensemble du cours du chapitre. À la fin de certains chapitres, on trouve des sujets d'étude introduisant des théories élégantes dans le thème du chapitre. Deux annexes présentent des curiosités mathématiques liées au programme d'analyse.

Les résultats du cours ou les exercices les plus importants sont indiqués par une flèche dans la marge de gauche.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé, Georges Papadopoulo, Bertrand Saint-Aubin et Alexia Stéfanou pour la relecture de certains chapitres, Bénédicte Herbinet à qui je dois une élégante solution, Philippe Flajolet pour sa contribution aux énoncés de quelques problèmes. Ce travail a pu se concrétiser grâce au PROJET ALGORITHMES qui m'a permis de donner à l'ouvrage sa version typographique actuelle et à la collection ELLIPSES qui l'a accueilli, et je les en remercie.

Je serais reconnaissant à ceux de mes lecteurs qui me feront parvenir leurs remarques sur cette première édition.

Xavier Gourdon

Table des matières

Avant-propos de la troisième édition 1

Avant-propos de la deuxième édition 2

Avant-propos de la première édition 3

Chapitre 1. Topologie sur les espaces métriques et les espaces vectoriels normés 7

1. Généralités 7

2. Suites dans un espace métrique 19

3. Espaces compacts 27

4. Espaces connexes 38

5. Espaces vectoriels normes (e.v.n) 47

6. Problèmes 57

Chapitre 2. Fonctions d'une variable réelle 71

1. Fonctions dérivables 71

2. Développements limités et développements asymptotiques 87

3. Fonctions convexes, fonctions réglées 95

4. Problèmes 103

Chapitre 3. Intégration 123

1. Intégrale sur un segment de R 123

2. Calcul de primitives 136

3. Intégrale sur un intervalle quelconque 147

4. Intégrales dépendant d'un paramètre, équivalents d'intégrales 161

5. Problèmes 176

Chapitre 4. Suites et séries 199

1. Suites numériques 199

2. Séries numériques 208
3. Suites et séries de fonctions 231
4. Séries entières 247
5. Séries de Fourier 267
6. Problèmes 281
7. Sujets d'étude 315

Chapitre 5. Fonctions de plusieurs variables 323
1. Différentielle, dérivees partielles 323
2. Extremums relatifs 335
3. Inversion locale, fonctions implicites 341
4. Intégrales multiples, intégrales curvilignes 351
5. Problèmes 363

Chapitre 6. Equations différentielles 373
1. Généralités 373
2. Equations différentielles linéaires 377
3. Equations différentielles non linéaires 390
4. Quelques compléments 394
5. Problèmes 407

Annexe A. Théorème de Baire et applications 417
Le théorème de Baire 417
Applications 419

Annexe B. Espaces de Hilbert 427
1. Résultats généraux sur les espaces de Hilbert 427
2. Quelques propriétés des espaces de Hilbert 430

Annexe C. Théorème des nombres premiers 437
1. Préliminaires 437
2. Preuve du Théorème des nombres premiers 443
3. Histoire du Théorème des nombres premiers 445
Index des notations 447

Index 449

CHAPITRE 1

Topologie sur les espaces métriques et les espaces vectoriels normés

La naissance de la topologie est directement liée à l'étude des ensembles de nombres réels. Un premier signe fut certainement la définition de la notion de point d'accumulation par Weierstrass vers 1860 (qui démontra que tout ensemble de nombres réels infini borné admet au moins un point d'accumulation, résultat admis auparavant).

Ce point de vue un peu étroit tomba ensuite en désuétude. Ce n'est qu'en 1906, à force d'étudier des ensembles de plus en plus abstraits, qu'apparut la notion de distance, introduite par Fréchet. La notion d'espace topologique général ne naquit qu'en 1914 grâce à Hausdorff qui définit la notion de voisinage.

Le développement des espaces vectoriels normés (en particulier de dimensions infinies) est d'abord dû à Hilbert ; Banach compléta largement cette théorie dans les années 1930.

La notion d'ensemble compact, en germe dès 1900, se développa avec Borel et Lebesgue grâce aux considérations liées à la théorie de la mesure.

La théorie générale des espaces topologiques n'étant pas au programme des classes de mathématiques spéciales, nous nous limiterons à l'étude des espaces métriques. Les curieux trouveront cependant leur compte dans les différentes remarques des parties de cours.

En annexe, sont présentés sous forme de problèmes et d'exercices :

— Le théorème de Baire et quelques applications (annexe A).

— Quelques résultats sur les espaces de Hilbert (annexe B).

Ces curiosités ne sont pas au programme de mathématiques spéciales, mais elles constituent de forts jolies théories qui nous sont accessibles.

1. Généralités

1.1. Normes et Distances

Normes.

Définition 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une *norme* sur E est une application $E \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \|x\|$ telle que

(i) On a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(iii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*).

Muni d'une norme, E est appelé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *normé* (en abrégé e.v.n).

Exemple 1. — $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

— Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a les normes classiques suivantes

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}, \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Plus généralement, pour tout $\alpha \geq 1$, $\|x\|_\alpha = (\sum_i |x_i|^\alpha)^{1/\alpha}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (voir la conséquence de l'inégalité de Minkowsky, page 98).

— L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées d'un ensemble X dans un e.v.n E est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ (cette norme s'appelle *norme de la convergence uniforme*.)

Remarque 1. Lorsque seules les propriétés (ii) et (iii) de la définition sont vérifiées, on dit que $\| \cdot \|$ est une *semi-norme*.

Distances.

DÉFINITION 2. Soit E un ensemble. On appelle *distance* sur E toute application $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

(i) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

(ii) Pour tout x, $y \in E$, $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ (*symétrie*).

(iii) Pour tout x, y, $z \in E$, $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ (*inégalité triangulaire*).

Muni d'une distance, E est appelé *espace métrique*.

Exemple 2. — Si E est un e.v.n, $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E, qui fait de l'e.v.n E un espace métrique. Sauf mention contraire, c'est cette distance que l'on choisit toujours dans un e.v.n.

— Sur tout ensemble E, la distance d définie par

$$\mathrm{d}(x, y) = 0 \text{ si } x = y, \qquad \mathrm{d}(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y$$

est appelée *distance discrète* sur E. L'espace métrique (E, d) est alors appelé *espace discret*.

Diamètre d'une partie, distance entre deux parties.

DÉFINITION 3. Soit (E, d) un espace métrique. Si $A \subset E$, $A \neq \varnothing$, on appelle *diamètre* de A l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} \mathrm{d}(x, y).$$

On dit que A est *bornée* si $A = \varnothing$ ou si $\delta(A) < +\infty$.

DÉFINITION 4. Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E, d). On appelle distance de A à B le réel

$$\mathrm{d}(A, B) = \inf_{\substack{x\in A \\ y\in B}} \mathrm{d}(x, y).$$

Lorsque x est un élément de E, on appelle distance de x à A le réel

$$\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(\{x\}, A) = \inf_{y\in A} \mathrm{d}(x, y).$$

Remarque 2. Attention ! Avec cette définition, l'application $\mathrm{d} : (\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\})^2 \quad (A, B) \to \mathrm{d}(A, B)$ n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ (on peut avoir $\mathrm{d}(A, B) = 0$ avec $A \neq B$).

Boules et sphères.

DÉFINITION 5. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$ et pour tout $\rho > 0$, on appelle
- *boule ouverte* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{B}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) < \rho\}$,
- *boule fermée* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{B_f}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) \leq \rho\}$,
- *sphère* de centre x de rayon ρ l'ensemble $\mathrm{S}(x, \rho) = \{y \in E \mid \mathrm{d}(x, y) = \rho\}$.

Lorsque E est un espace vectoriel normé (muni de la distance issue de la norme) et que $x = 0$, $\rho = 1$, on parle de boule *unité* ouverte, boule *unité* fermée et de sphère *unité*.

PROPOSITION 1. *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E, et $x \in E$. L'ensemble A est borné si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset \mathrm{B}(x, r)$.*

1.2. Topologie d'un espace métrique

Sauf mention contraire, dans toute cette sous-partie, (E, d) désigne un espace métrique.

Ouverts.

DÉFINITION 6. Une partie Ω de E est dite *ouverte* (ou Ω un *ouvert*) si $\Omega = \varnothing$ ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \quad \text{tel que} \quad \mathrm{B}(x, \rho) \subset \Omega.$$

L'ensemble des parties ouvertes de E s'appelle *topologie* de E.

Exemple 3. Une boule ouverte est un ouvert. En particulier, dans $\mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$), les intervalles ouverts $]\alpha, \beta[$ sont des ouverts.

PROPOSITION 2. *(i) Les parties $\varnothing$ et E sont des ouverts.*

(ii) Une réunion d'ouverts est un ouvert.

(iii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Remarque 3. Attention, une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\cap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\}$ n'est pas ouvert.

Fermés.

DÉFINITION 7. Une partie F de E est dite *fermée* (ou F un *fermé*) si $E \setminus F$ est ouvert.

Exemple 4. Une boule fermée est un fermé. En particulier, un singleton $\{x\} = \mathrm{B_f}(x, 0)$ est un fermé. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés $[\alpha, \beta]$ sont des fermés.

PROPOSITION 3. *(i) Les parties $\varnothing$ et E sont des fermés.*

(ii) Une intersection de fermés est un fermé.

(iii) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Remarque 4. Attention, une réunion infinie de fermés peut ne pas être fermée. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} [1/n, 1 - 1/n] =]0, 1[$ n'est pas un fermé.

Voisinages.

DÉFINITION 8. On appelle *voisinage* d'un élément x de E toute partie V de E contenant un ouvert contenant x. L'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$.

Exemple 5. Un ouvert contenant x est un voisinage de x, une boule fermée de centre x de rayon $\rho > 0$ est un voisinage de x.

Remarque 5. Une réunion (resp. une intersection finie) de voisinages de x est un voisinage de x.

Commentaire sur les espaces topologiques généraux.

Un *espace topologique* général E est défini comme étant un ensemble muni d'une partie de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont appelés des ouverts et vérifient les axiomes (i), (ii) et (iii) de la proposition 2. On définit alors les fermés comme à la définition 7 et les voisinages comme à la définition 8.

Toutes les notions de cette partie 1.2 peuvent être étendues aux espaces topologiques.

Il existe pour les espaces topologiques généraux une notion importante appelée la séparation. Un espace topologique E est dit *séparé* si pour tous éléments $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \varnothing$. On voit facilement que tout espace métrique est séparé.

Adhérence.

DÉFINITION 9. L'*adhérence* d'une partie A de E, notée $\overline{A}$, est le plus petit ensemble fermé contenant A.

Remarque 6. — L'ensemble $\overline{A}$ existe, c'est l'intersection des fermés contenant A.
— Une partie A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

PROPOSITION 4. *Soit A une partie de E. Un élément x de E est dans $\overline{A}$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \quad \mathrm{d}(a, x) < \varepsilon$.

(ii) Pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.

(iii) $\mathrm{d}(x, A) = 0$.

Exemple 6. — Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de tout intervalle ouvert borné $]\alpha, \beta[$ est $[\alpha, \beta]$.
— Dans un e.v.n, on a $\overline{\mathrm{B}(0,1)} = \mathrm{B_f}(0,1)$, propriété fausse dans un espace métrique général (voir l'exercice 1).
— Si A est fermé, on a

$$x \in A \iff x \in \overline{A} \iff \mathrm{d}(x, A) = 0.$$

DÉFINITION 10. Une partie A de E est dite *dense* dans E si $\overline{A} = E$.

Exemple 7. En utilisant la proposition précédente, on voit facilement qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la distance usuelle) si et seulement si

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b), \qquad]a, b[\cap A \neq \varnothing.$$

Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Intérieur.

DÉFINITION 11. L'*intérieur* d'une partie A de E, noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A.

Remarque 7. — L'intérieur de A existe : c'est la réunion des ouverts contenus dans A.
— Une partie A de E est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.
— Pour toute partie A de E, $\overset{\circ}{A} = E \setminus \overline{(E \setminus A)}$ et $\overline{A} = E \setminus (\overset{\circ}{E \setminus A})$.

PROPOSITION 5. *Soit A une partie de E et x un élément de A. On a $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée.*

(i) A est un voisinage de x.

(ii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset A$.

Exemple 8. Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur de $[\alpha, \beta]$ est $]\alpha, \beta[$; l'intérieur de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est $\varnothing$.

Frontière.

DÉFINITION 12. La *frontière* d'une partie A de E est l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$. On la note $\mathrm{Fr}(A)$ (ou encore ∂A).

Point d'accumulation, point isolé.

DÉFINITION 13. Soit A une partie de E.

— On dit que $a \in E$ est un *point d'accumulation* de A si pour tout voisinage V de a, $V \cap A \neq \varnothing$ et $V \cap A \neq \{a\}$, ce qui s'écrit encore

$$(\forall \varepsilon > 0), \qquad \mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ et } \neq \{a\}.$$

— On dit que $a \in A$ est un *point isolé* de A s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$, ce qui s'écrit encore

$$(\exists \varepsilon > 0), \qquad \mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}.$$

Remarque 8. Si a est un point d'accumulation de A, alors $a \in \overline{A}$ et de plus pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{B}(a, \varepsilon)$ contient une infinité de points de A.

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}$, 0 est point d'accumulation de l'ensemble $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Topologie induite dans un espace métrique. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Une manière bien naturelle de faire de A un espace métrique est de le munir de la restriction de la distance d de E à $A \times A$. Ainsi, (A, d) est un espace métrique dont la topologie est appelée *topologie induite* par (E, d). La proposition suivante permet de caractériser les ouverts, fermés et voisinages de A par rapport à ceux de E.

PROPOSITION 6. *Soit A une partie de E.*

— *Les ouverts de A sont les ensembles de la forme $\Omega \cap A$, Ω étant un ouvert de E.*
— *Les fermés de A sont les ensembles de la forme $F \cap A$, où F est un fermé de E.*
— *Si $a \in A$, les voisinages de a dans A sont les ensembles de la forme $V \cap A$, V étant un voisinage de a dans E.*

Exemple 10. L'ensemble $[0, 1[$ est un ouvert de $A = [0, 2]$ (on peut écrire par exemple $[0, 1[=]-1, 1[\cap A$).

1.3. Continuité

Applications continues.

DÉFINITION 14. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et $f : E \to E'$ une application. On dit que f est *continue* en $a \in E$ si pour tout voisinage W de $f(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W$. Lorsque f est continue en tout point de E, on dit que f est *continue sur E*.

PROPOSITION 7. *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et soit $f : E \to E'$ une application. Alors f est continue en $a \in E$ si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E), \qquad (\mathrm{d}(a, x) < \alpha \Longrightarrow \mathrm{d}'(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

PROPOSITION 8. *Soient (E, d), (E', d'), (E'', d'') trois espaces métriques, et deux applications $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$. Si f est continue en $a \in E$ et g continue en $f(a)$, alors l'application $g \circ f : E \to E''$ est continue en a.*

PROPOSITION 9. *Soit $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ une application. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est continue sur E.

(ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E.

(iii) L'image réciproque par f de tout fermé de E' est un fermé de E.

Remarque 9. Lorsque l'image de tout ouvert par f est un ouvert, on dit que f est une application *ouverte*. Une application continue n'est pas forcément ouverte (considérer par exemple une fonction constante sur $\mathbb{R}$). De même, l'image d'un fermé par une application continue n'est pas forcément fermée. Par exemple,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

est continue et $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ n'est pas fermé.

Homéomorphismes.

DÉFINITION 15. Soit une application $F : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$. On dit que f est un *homéomorphisme* si f est bijective, continue, et si f^{-1} est continue.

Remarque 10. Une application peut être continue et bijective sans que l'application réciproque ne soit continue. Par exemple, l'application identité f de $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_{\mathrm{dis}})$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ ($\mathrm{d}_{\mathrm{dis}}$ désignant la distance discrète sur $\mathbb{R}$, d la distance usuelle) est continue mais f^{-1} n'est pas continue. (Cependant, on sait que si $f : (\mathbb{R}, \mathrm{d}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d})$ est continue et bijective, alors f^{-1} est continue. Sous certaines hypothèses de compacité, il est également possible de conclure à la continuité de l'application réciproque — voir la proposition 14 page 31.)

DÉFINITION 16. Deux distances d et d′ sur E sont dites *topologiquement équivalentes* si elles définissent la même topologie (*i. e.* si les ouverts de (E, d) sont des ouverts de (E, d') et réciproquement).

PROPOSITION 10. *Deux distances d et d′ sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité de (E, d) sur (E, d') est un homéomorphisme.*

Remarque 11. Si d et d′ sont topologiquement équivalentes, les espaces métriques (E, d) et (E, d') possèdent les mêmes propriétés topologiques (en effet, les ouverts de ces deux espaces métriques coïncident, et il en est donc de même pour les fermés et les voisinages).

Normes et distances équivalentes.

DÉFINITION 17.
- — Deux normes N_1 et N_2 sur un même e.v E sont dites *équivalentes* s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $a\, N_1(x) \leq N_2(x) \leq b\, N_1(x)$.
- — Deux distances d_1 et d_2 sur E sont dites *équivalentes* s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $x, y \in E$, $a\, \mathrm{d}_1(x, y) \leq \mathrm{d}_2(x, y) \leq b\, \mathrm{d}_1(x, y)$.

Remarque 12.
- — Deux normes équivalentes induisent deux distances équivalentes.
- — Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. Ainsi, les résultats de nature topologiques sont indépendant du choix de l'une ou l'autre des distances.
- — On verra plus loin (voir le théorème 3 page 50) que sur un e.v de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Applications uniformément continues.

DÉFINITION 18. Une application $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ est dite *uniformément continue* sur E si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E), \qquad (\mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \mathrm{d}'(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Remarque 13. — Une fonction uniformément continue est continue ; la nuance entre ces deux notions est qu'une fonction *uniformément* continue vérifie $\mathrm{d}'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous les couples (x, y) tels que $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$, α étant indépendant de x, alors que pour une fonction continue, α dépend de x. L'uniformité de cet $\alpha > 0$ pour une

fonction uniformément continue f en fait une fonction souple d'emploi. Du coup, certains théorèmes sont vrais pour les fonctions uniformément continues mais pas pour les fonctions continues. Nous verrons cependant que toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue (voir le théorème 2 page 31).

— Attention ! L'uniforme continuité n'est pas une notion topologique. Autrement dit, la seule définition de la topologie de E et E' ne suffit pas à définir l'uniforme continuité. En particulier, une fonction uniformément continue vis-à-vis d'une certaine distance ne l'est pas forcément vis-à-vis d'une distance *topologiquement* équivalente. Par contre, une fonction uniformément continue de (E, d_1) dans (E', d'_1), lorsqu'elle est regardée comme une fonction de (E, d_2) dans (E', d'_2), reste uniformément continue lorsque les distances $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ et $\mathrm{d}'_1, \mathrm{d}'_2$ sont équivalentes, ou lorsqu'elles sont uniformément équivalentes (voir la définition qui suit).

Exemple 11. — Une fonction $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ *lipschitzienne*, c'est-à-dire vérifiant

$$(\exists k > 0, \forall x, y \in E), \qquad \mathrm{d}'(f(x), f(y)) \leq k\, \mathrm{d}(x, y),$$

est uniformément continue.

— La fonction $f : \ ]0, 1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 1/x$ est continue mais n'est pas uniformément continue.

La fin de la remarque précédente motive la définition suivante.

Définition 19. Deux distances d et d′ sur E sont dites *uniformément équivalentes* si l'application identité est uniformément continue de (E, d) dans (E, d') et de (E, d') dans (E, d).

Remarque 14. Deux distances équivalentes sont uniformément équivalentes. Deux distances uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes.

1.4. Produit d'espaces métriques

On se donne un nombre fini n d'espaces métriques $(E_1, \mathrm{d}_1), \ldots, (E_n, \mathrm{d}_n)$ et on pose $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. On veut faire de E un espace métrique. Un moyen naturel est de construire une distance d sur E à partir des distances d_i. Par exemple si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$, $\mathrm{d}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i)$ définit une distance sur E. Cette distance est appelée *distance produit* sur E. Sauf mention contraire, c'est cette distance que nous utiliserons sur un produit d'espaces métriques.

Remarque 15. — En posant

$$\mathrm{d}'(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}''(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i)^2},$$

on a également affaire à des distances sur E. Ces distances sont équivalentes à la distance produit d, car

$$\forall x, y \in E, \qquad \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}''(x, y) \leq \mathrm{d}'(x, y) \leq n\, \mathrm{d}(x, y).$$

Il est donc indifférent de travailler avec l'une ou l'autre de ces distances. C'est parce que la distance produit est plus souple d'utilisation que nous l'avons choisie.

— Au sens de la distance produit d, la boule ouverte de centre $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de rayon $r > 0$ vérifie

$$\mathrm{B}(a, r) = \mathrm{B}(a_1, r) \times \cdots \times \mathrm{B}(a_n, r).$$

Proposition 11. *Si $O_1, \ldots, O_n$ sont des ouverts de $E_1, \ldots, E_n$, le produit $O_1 \times \cdots \times O_n$ est un ouvert de E appelé* ouvert élémentaire.

Un ouvert de E n'est en général pas un ouvert élémentaire.

PROPOSITION 12. *La projection d'indice i, définie par*

$$\mathrm{Pr}_i \ : E = E_1 \times \cdots \times E_n \to E_i \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

est une application continue et ouverte (une application est dite ouverte si l'image de tout ouvert par cette application est un ouvert).

PROPOSITION 13. *Une application*

$$f : \ (F, \delta) \to E_1 \times \cdots \times E_n \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)).$$

est continue en $a \in F$ si et seulement si pour tout i, $f_i = \mathrm{Pr}_i \circ f$ est continue en a.

PROPOSITION 14. *Soit une application $f : \ E = E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Pour tout i, on note*

$$f_i : \ E_i \to F \quad x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

(f_i est appelée application partielle *d'indice i au point a). Si f est continue en a, alors pour tout i, l'application partielle f_i est continue en a_i.*

Remarque 16. Attention ! La réciproque de ce dernier résultat est fausse. En d'autres termes, il se peut que tous les f_i soient continues en a_i sans que f soit continue en a. Par exemple, considérons l'application $f : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \neq (0,0), \ f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Les applications partielles en $(0,0)$ sont nulles, donc continues, et pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$ (sinon, l'application $\varphi : \ x \mapsto f(x,x)$ serait continue — composée d'applications continues — ce qui est faux puisque $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = 1/2$ dès que $x \neq 0$).

Continuité de la distance.

PROPOSITION 15. *Soit (E, d) un espace métrique. Alors l'application distance $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport 2, en particulier continue.*

Conséquence : Soit $a \in E$ et $r > 0$. L'application $\varphi : \ E \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \mathrm{d}(a,x)$ est continue d'après les deux dernières propositions. On en déduit que $\mathrm{B_f}(a,r) = \varphi^{-1}([0,r])$ et $\mathrm{S}(a,r) = \varphi^{-1}(\{r\})$ (sphère de centre a de rayon r), images réciproques de fermés par une application continue, sont des fermés de E. On retrouve de même qu'une boule ouverte est un ouvert.

Continuité des opérations dans un e.v.n.

PROPOSITION 16. *Soit E un e.v.n sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les applications*

$$E \times E \to E \quad (x,y) \mapsto x + y \quad \text{et} \quad \mathbb{K} \times E \to E \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

sont continues.

Algèbre normée.

DÉFINITION 20. On dit qu'une norme $\| \cdot \|$ sur une $\mathbb{K}$-algèbre A (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une *norme d'algèbre* si $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pour tout $(x,y) \in A^2$. Munie d'une telle norme, A est appelée *algèbre normée*. L'application $A \times A \to A \quad (x,y) \mapsto xy$ est alors continue.

PROPOSITION 17. *Soit A un $\mathbb{K}$-e.v.n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f, g : \ (E, \mathrm{d}) \to A$ deux applications continues en $a \in E$. Alors les applications $f + g$, λf (pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé) sont continues en a. Si A est une algèbre normée, l'application fg est continue en a.*

1.5. Limites

DÉFINITION 21. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et une application $f : D \subset E \to F$. Soient $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$, $\ell \in F$. On dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* a *selon* A, et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \ell$, si pour tout voisinage W de ℓ, il existe un voisinage V de a tel que $f(A \cap V) \subset W$. Ceci s'écrit aussi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \text{ vérifiant } \mathrm{d}(a, x) < \alpha, \quad \text{on a} \quad \delta(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Remarque 17. Si ℓ existe, ℓ est unique et on a $\ell \in \overline{f(A)}$; ℓ est alors appelée la *limite de* f *en* a *selon* A.

Exemple 12. — *Limite usuelle.* Si a est point d'accumulation de D, si $A = D \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}}$ est encore noté $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}$.

— *Limite à gauche.* Soit f une fonction de la variable réelle $x \in I$, et $a \in \overline{I}$. Lorsque $A =]-\infty, a[\cap I$, la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$, si elle existe, est encore notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ (ou $\lim_{x\to a^-} f(x)$, ou encore $f(a-)$) et appelée limite à gauche de f en a. On définit de même $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ (encore notée $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $f(a+)$) la limite à droite de f en a.

— *Limite en* $+\infty$. On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (cet ensemble est appelé $\mathbb{R}$ *achevé*). Sur $\overline{\mathbb{R}}$, on définit

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(+\infty) = 1, \varphi(-\infty) = -1.$$

On vérifie facilement que $\mathrm{d}(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$. Cette distance fait de $\overline{\mathbb{R}}$ un espace métrique et nous autorise à parler de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. Lorsqu'une fonction de la variable réelle f est définie sur $]c, +\infty[$, il est évidemment très lourd de caractériser la limite de f en $+\infty$ grâce à la distance d sur $\overline{\mathbb{R}}$. On montre facilement que $f(x)$ tend vers ℓ en $+\infty$ si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists C > c, \forall x > C), \qquad \mathrm{d}(f(x), \ell) < \varepsilon,$$

et on note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. On caractériserait de même la limite en $-\infty$. Noter que l'on peut de la même manière caractériser la limite d'une suite $\mathbb{N} \to (E, \mathrm{d})$ en $+\infty$.

— *Limite infinie.* Lorsqu'une fonction f est à valeurs réelles, il est possible de caractériser simplement les limites infinies de f. Par exemple, f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a selon A si et seulement si

$$(\forall C > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A), \qquad (\mathrm{d}(a, x) < \alpha \Longrightarrow f(x) > C).$$

On note alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = +\infty$.

— Le lecteur pourra de même caractériser simplement une limite infinie prise à l'infini.

Composition des limites.

PROPOSITION 18. *Soient* $f : D_1 \subset (E, \mathrm{d}) \to (F, \mathrm{d}')$ *et* $g : D_2 \subset (F, \mathrm{d}') \to (G, \mathrm{d}'')$ *telles que* $f(D_1) \subset D_2$. *Soient* $A \subset D_1$, $a \in \overline{A}$; $B \subset D_2$ *et* $b \in \overline{B}$. *On suppose que*

$$f(A) \subset B, \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y\to b\\ y\in B}} g(y) = c.$$

Alors l'application composée $h = g \circ f$ *vérifie* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} h(x) = c$.

PROPOSITION 19. *Soient* $f, g : D \subset (E, \mathrm{d}) \to F$, *où* F *est un* $\mathbb{K}$ *e.v.n* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$). *Soient* $A \subset D$ *et* $a \in \overline{A}$. *On suppose* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g(x) = \ell'$. *Alors, lorsque* x *tend vers* a *selon* A,

(i) $(f+g)(x)$ *tend vers* $\ell+\ell'$,

(ii) pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $(\lambda f)(x)$ *tend vers* $\lambda\ell$,

(iii) $\|f(x)\|$ *tend vers* $\|\ell\|$,

(iv) si F *est une algèbre normée,* $(fg)(x)$ *tend vers* $\ell\ell'$,

(v) si $F=\mathbb{R}$ *et si* $f(x)\leq g(x)$ *sur un voisinage de* a *dans* A, $\ell\leq\ell'$,

(vi) si $F=\mathbb{R}$, *si pour une fonction* $h:\ D\to\mathbb{R}$ *on a* $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ *dans un voisinage de* a *dans* A *et si* $\ell=\ell'$, *alors* $h(x)$ *tend vers* ℓ.

Limite et continuité en un point.

PROPOSITION 20. *Soient* $f:\ D\subset(E,\mathrm{d})\to(F,\mathrm{d}')$ *et* $a\in D$ *un point d'accumulation de* D. *L'application* f *est continue en* a *si et seulement si* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=f(a)$.

Remarque 18. Lorsque f n'est pas définie en a et lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=\ell$, la fonction g définie sur $D\cup\{a\}$ par $g(x)=f(x)$ sur D et $g(a)=\ell$ est continue en a et est appelée *prolongement par continuité* de f en a.

DÉFINITION 22. Soit $f:\ D\subset\mathbb{R}\to(E,\mathrm{d})$ et $a\in\overset{\circ}{D}$. On dit que
— f est *continue à droite* en a si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)$,
— f est *continue à gauche* en a si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$.
On dit que f présente une discontinuité de *première espèce* en a si $\ell_g=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ et $\ell_d=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ existent, et si $\ell_g\neq\ell_d$.

1.6. Exercices

EXERCICE 1. Soit (E,d) un espace métrique.
a) Soit $a\in E$ et $r>0$. Montrer que $\overline{\mathrm{B}(a,r)}\subset\mathrm{B_f}(a,r)$. Peut-on affirmer, dans le cas général, que $\overline{\mathrm{B}(a,r)}=\mathrm{B_f}(a,r)$?
b) Si E est un $\mathbb{R}$-e.v.n, montrer que $\overline{\mathrm{B}(0,1)}=\mathrm{B_f}(0,1)$.

Solution. **a)** On a $\mathrm{B}(a,r)\subset\mathrm{B_f}(a,r)$. Comme $\mathrm{B_f}(a,r)$ est fermé et que $\overline{\mathrm{B}(a,r)}$ est le plus petit fermé contenant $\mathrm{B}(a,r)$, on en déduit $\overline{\mathrm{B}(a,r)}\subset\mathrm{B_f}(a,r)$.

L'égalité n'a pas lieu dans le cas général, comme nous allons le vérifier sur un contre-exemple. Si E est muni de sa distance discrète d (définie par $\mathrm{d}(x,y)=0$ si $x=y$, $=1$ si $x\neq y$), on a $\mathrm{B}(a,1)=\{a\}$, fermé, et $\mathrm{B_f}(a,1)=E$. Ainsi, dès que E possède plus d'un élément, $\overline{\mathrm{B}(a,1)}=\{a\}\neq E=\mathrm{B_f}(a,1)$.

b) D'après la question précédente, il suffit de montrer l'inclusion $\mathrm{B_f}(0,1)\subset\overline{\mathrm{B}(0,1)}$. Soit $x\in\mathrm{B_f}(0,1)$. Si $\|x\|<1$, alors $x\in\mathrm{B}(0,1)\subset\overline{\mathrm{B}(0,1)}$ et c'est terminé. Sinon $\|x\|=1$, et alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $y\in\mathrm{B}(0,1)$ tel que $\|x-y\|<\varepsilon$ (prendre par exemple $y=(1-\varepsilon/2)x$). En d'autres termes, $x\in\overline{\mathrm{B}(0,1)}$ d'après la proposition 4, d'où le résultat.

EXERCICE 2. Soit $A\subset\mathbb{R}$ tel que tout point de A est isolé dans A. Montrer que A est au plus dénombrable.

Solution. Nous allons associer à chaque élément de A un rationnel de manière injective. Tout élément $a\in A$ est isolé dans A, donc

$$\exists r_a>0,\qquad]a-r_a,a+r_a[\cap A=\{a\}. \tag{$*$}$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $q_a\in\mathbb{Q}$ tel que $q_a\in\,]a-r_a/2,a+r_a/2[$.

Montrons maintenant que l'application $\varphi : A \to \mathbb{Q} \quad a \mapsto q_a$ est injective. Si $q_a = q_b = q$, avec $a, b \in A$, alors $|q - a| < r_a/2$ (car $q = q_a$ est choisi dans $]a - r_a/2, a + r_a/2[$), de même, $|q - b| < r_b/2$, donc

$$|a - b| = |(q - b) - (q - a)| \leq |q - b| + |q - a| < \frac{r_a + r_b}{2}. \qquad (**)$$

L'un des réels r_a, r_b est plus grand que l'autre, par exemple $r_a \geq r_b$. L'inégalité (**) entraîne $|a - b| < r_a$, ce qui d'après (*) implique $b = a$ car $b \in A$.

Finalement, nous avons construit une application injective $\varphi : A \to \mathbb{Q}$, et comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on en déduit que A est au plus dénombrable.

Remarque. Le raisonnement effectué dans la démonstration reste valable pour $A \subset \mathbb{R}^n$, en utilisant le fait que $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad |f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Solution. L'application f étant uniformément continue, on a l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, |x - y| \leq \eta, \qquad |f(x) - f(y)| \leq 1. \qquad (*)$$

Maintenant, fixons $x \in \mathbb{R}^+$ et notons $n = [x/\eta]$ (partie entière de x/η). On a $n\eta \leq x < (n+1)\eta$, donc

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left| f(x) - f(n\eta) + \sum_{k=0}^{n-1} \Big[f((k+1)\eta) - f(k\eta) \Big] \right| \\ &\leq |f(x) - f(n\eta)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f((k+1)\eta) - f(k\eta)| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1 + n \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$|f(x)| \leq |f(0)| + 1 + n \leq |f(0)| + 1 + \frac{x}{\eta} = \beta + \alpha x$$

avec $\beta = |f(0)| + 1$ et $\alpha = 1/\eta$. Les réels α et β sont indépendants du choix de x, donc ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique.

1/ Soit $A \subset E$. Montrer que l'application $E \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est continue sur E (on rappelle que $\mathrm{d}(x, A) = \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x, y)$).

2/ Soient A et B deux fermés disjoints de E.
a) Montrer qu'il existe $f : E \to \mathbb{R}$ continue, $0 \leq f \leq 1$, telle que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.
b) En déduire l'existence de deux ouverts U et V de E, disjoints, tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Solution. **1/** On va montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne. Fixons $(x_1, x_2) \in E^2$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall y \in A, \qquad \mathrm{d}(x_1, A) \leq \mathrm{d}(x_1, y) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, y).$$

L'inégalité $\mathrm{d}(x_1, A) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, y)$ étant vrai pour tout $y \in A$, on en déduit $\mathrm{d}(x_1, A) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, A)$. Autrement dit, $\mathrm{d}(x_1, A) - \mathrm{d}(x_2, A) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2)$. On montrerait de même $\mathrm{d}(x_2, A) - \mathrm{d}(x_1, A) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2)$, ce qui prouve $|\mathrm{d}(x_1, A) - \mathrm{d}(x_2, A)| \leq \mathrm{d}(x_1, x_2)$.

L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ étant lipschitzienne, elle est uniformément continue sur E (voir l'exemple 11), donc continue sur E.

2/a) Rappelons que lorsque F est fermé, on a $\mathrm{d}(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.
Ceci étant, définissons $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}(x, A)}{\mathrm{d}(x, A) + \mathrm{d}(x, B)}$.

— L'application f est bien définie, car si $\mathrm{d}(x, A) + \mathrm{d}(x, B) = 0$, alors $\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(x, B) = 0$, donc $x \in A$ et $x \in B$ (A et B sont fermés), ce qui est impossible à réaliser puisque $A \cap B = \varnothing$.
— On a $f(x) = 0$ si et seulement si $\mathrm{d}(x, A) = 0$, *i. e.* $x \in A$.
— On a $f(x) = 1$ si et seulement si $\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(x, A) + \mathrm{d}(x, B)$, *i. e.* $\mathrm{d}(x, B) = 0$ ou encore $x \in B$.
— L'application f est continue d'après a) et comme composée d'applications continues.
— Enfin, il est clair que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in E$.

b) Si f est la fonction exhibée à la question précédente, on a

$$A \subset U = f^{-1}(\,]-\infty, 1/2[\,) \quad \text{et} \quad B \subset V = f^{-1}(\,]1/2, +\infty[\,),$$

et U et V sont ouverts par continuité de f (voir la proposition 9), disjoints par construction.

Remarque. Il est possible de répondre à la question 2/b) sans utiliser le résultat de la question 2/a).

Exercice 5. Soit (E, d) un espace métrique.
a) Soit A un ouvert de E et $B \subset E$. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. A-t-on l'égalité dans le cas général ?
b) Soit $A \in E$. On dit que A est localement fermé si

$$\forall x \in A, \exists V \text{ voisinage de } x \text{ tel que } V \cap A \text{ est un fermé de } V.$$

Montrer que A est localement fermé si et seulement si A est l'intersection d'un ouvert de E et d'un fermé de E.

Solution. **a)** Soit $x \in A \cap \overline{B}$. On a $x \in A$. Comme est ouvert, A est un voisinage de x. On en déduit que pour tout voisinage V de x, $V \cap A$ est un voisinage de x. De plus $x \in \overline{B}$, donc $(V \cap A) \cap B = V \cap (A \cap B) \neq 0$, et ceci pour tout voisinage V de x. On en déduit $x \in \overline{A \cap B}$, donc $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

On n'a pas toujours l'égalité. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, si A est l'ouvert $]0, 2[$ et si $B = [1, 3]$, on a $A \cap \overline{B} = [1, 2[$ et $\overline{A \cap B} = [1, 2]$.

b) La condition suffisante parait plus simple. Commençons donc par cela.
Condition suffisante. Supposons $A = \Omega \cap F$, où Ω est un ouvert de E et F un fermé de E. Soit $x \in A$. On a $x \in \Omega$, ouvert, donc Ω est un voisinage de x. Il vérifie $\Omega \cap A = \Omega \cap (\Omega \cap F) = \Omega \cap F$, c'est donc un fermé de Ω. Finalement, A est localement fermé.
Condition nécessaire. Soit A localement fermé. Pour tout $x \in A$, nous allons montrer qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $V_x \cap A$ est un fermé de V_x. Par hypothèse sur A, il existe un voisinage U_x de x tel que $U_x \cap A$ est un fermé de U_x. On peut donc écrire $U_x \cap A = U_x \cap F$ où F est un fermé de E. Soit $V_x = \overset{\circ}{U}_x$. C'est un ouvert contenant x et on a $V_x \cap A = V_x \cap U_x \cap A = V_x \cap F$, donc $V_x \cap A$ est un fermé de V_x.

Posons maintenant $\Omega = \cup_{x \in A} V_x$, ouvert de E (réunion d'ouverts). Nous allons prouver que $A = \Omega \cap \overline{A}$, ce qui montrera le résultat.

– On a $A \subset \Omega$ et $A \subset \overline{A}$, donc $A \subset \Omega \cap \overline{A}$.

– Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in \Omega \cap \overline{A}$. Comme $x \in \Omega$, il existe $y \in A$ tel que $x \in V_y$. On a aussi $x \in \overline{A}$, donc

$$x \in V_y \cap \overline{A} \subset \overline{V_y \cap A} \quad \text{d'après a).} \qquad (*)$$

Supposons $x \notin A$. Alors $x \in W = V_y \setminus (V_y \cap A)$, ouvert de V_y (car $V_y \cap A$ est un fermé de V_y). Comme V_y est ouvert, W est même un ouvert de E. Or $(V_y \cap A) \cap W = \varnothing$, c'est-à-dire $V_y \cap A \subset E \setminus W$, et comme $E \setminus W$ est un fermé de E, $\overline{V_y \cap A} \subset E \setminus W$. Autrement dit, $\overline{V_y \cap A} \cap W = \varnothing$, donc $x \notin \overline{V_y \cap A}$, ce qui est contradictoire avec (*). Finalement, $x \in A$ et le résultat.

Remarque. Nous n'avons pas utilisé la métrique de E ; ce résultat reste donc vrai, avec la même démonstration, pour un espace topologique E.

2. Suites dans un espace métrique

2.1. Généralités

Définition 1. Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit que (x_n) *converge vers* $\ell \in E$ si pour tout voisinage V de ℓ dans E, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$, ou de manière équivalente si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}), \qquad (n \geq N \Longrightarrow \mathrm{d}(x_n, \ell) < \varepsilon).$$

Si ℓ existe, ℓ est unique est s'appelle *limite* de (x_n). On note alors $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Remarque 1.
- — Toute suite convergente est bornée.
- — On rappelle qu'une suite *extraite* (ou *sous-suite*) d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $y_n = x_{\varphi(n)}$, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Si (x_n) converge vers ℓ, toute sous-suite de (x_n) converge vers ℓ.
- — La notion de convergence d'une suite est topologique, autrement dit, elle ne dépend que de la topologie de E.

Définition 2. Soit (x_n) une suite d'un espace métrique (E, d). On dit que $a \in E$ est *valeur d'adhérence* de (x_n) si

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p), \qquad \mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon.$$

Proposition 1. *Soit (x_n) une suite de (E, d), soit $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) a est valeur d'adhérence de (x_n).

(ii) Il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers a.

(iii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{A_p}$ où $A_p = \{x_n,\ n \geq p\}$.

(iv) a est point d'accumulation de $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ou a est point de répétition de (x_n) (i. e. l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid\ x_n = a\}$ est infini).

L'ensemble des valeurs d'adhérences de (x_n) est donc égal à $\cap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$, donc fermé.

Remarque 2. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, ℓ est l'unique valeur d'adhérence de (x_n).

2.2. Caractérisation de l'adhérence, des fermés, de la continuité

Proposition 2. *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Un élément $x \in E$ est dans $\overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite de points de A qui converge vers x.*

Proposition 3. *Une partie F d'un espace métrique (E, d) est fermée si et seulement si toute suite de points de F convergente converge vers un élément de F.*

PROPOSITION 4. *Une application* $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ *est continue en* $a \in E$ *si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de* E *tendant vers* a*, la suite* $(f(x_n))$ *converge vers* $f(a)$*.*

PROPOSITION 5. *Soient une application* $f : D \subset (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$*,* A *une partie de* D *et* $a \in \overline{A}$*. On a* $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$ *si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de points de* A *qui converge vers* a*, la suite* $(f(x_n))$ *converge vers* ℓ*.*

Conséquence : Les propriétés de la proposition 19 de la partie 1.5 (page 15) restent vraies pour des suites convergentes d'un $\mathbb{K}$-e.v.n E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

2.3. Suites de Cauchy et espaces complets

DÉFINITION 3. Soient (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de points de E. On dit que (x_n) est une suite *de Cauchy* (ou que la suite (x_n) vérifie le *critère de Cauchy*) si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}), \qquad \forall p > N, \forall q > N, \quad \mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Remarque 3.
- — Une suite convergente est de Cauchy.
- — Une suite de Cauchy est bornée.
- — Attention ! La notion de suite de Cauchy n'est pas topologique (*i. e.* elle ne peut pas être définie à partir des ouverts de E). Cependant, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 6. *Soient* d *et* d′ *deux distances uniformément équivalentes de* E*. Une suite* (x_n) *est de Cauchy dans* (E, d) *si et seulement si c'est une suite de Cauchy dans* (E, d')*. Le résultat reste vrai en particulier lorsque* d *et* d′ *sont équivalentes.*

DÉFINITION 4. On dit qu'un espace métrique (E, d) est *complet* si toute suite de Cauchy de E converge.

Un espace vectoriel normé complet s'appelle un *espace de Banach.*

Exemple 1.
- — Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont complets.
- — L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. Par exemple, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, une suite de points de $\mathbb{Q}$ tendant vers α est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. On verra cependant (voir l'exercice 6) que tout espace métrique peut se plonger dans un espace complet.

Propriétés des espaces complets.

PROPOSITION 7.
- — *Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.*
- — *Toute partie fermée d'un espace complet est complète.*

PROPOSITION 8. *Soient* $(E_1, \mathrm{d}_1), \ldots, (E_n, \mathrm{d}_n)$ *des espaces métriques. L'espace métrique* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *est complet (au sens de la distance produit) si et seulement si pour tout* i*, l'espace métrique* (E_i, d_i) *est complet.*

PROPOSITION 9. *Soit* (E, d) *un espace complet et* (F_n) *une suite décroissante de fermés non vides de* E*, telle que* $\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$ *(où* $\delta(F_n)$ *désigne le diamètre de* F_n*). Alors il existe* $x \in E$ *tel que* $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$*.*

Démonstration. Notons $\Gamma = \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

L'ensemble Γ est non vide. En effet, choisissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ un point x_n dans F_n. Le fait que $\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$ entraîne que la suite (x_n) est de Cauchy (si $\varepsilon > 0$, si N est choisi tel que $\delta(F_N) < \varepsilon$, alors pour tout $p, q > N$, $\mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon$ car $x_p, x_q \in F_N$), donc converge dans E puisque E est complet. Comme les F_p sont fermés et que $x_n \in F_p$ lorsque $n \geq p$, la limite ℓ de (x_n) appartient à F_p pour tout p, donc à Γ. Ainsi, $\Gamma \neq \varnothing$.

Le fait que $(\delta(F_n))$ tende vers 0 montre que Γ a au plus un élément, d'où le résultat. □

⟶ THÉORÈME 0 (DU POINT FIXE). *Soit (E, d) un espace métrique complet, et une application $f : E \to E$ telle que*

$$\exists k \in]0,1[\,, \forall (x,y) \in E^2, \qquad \mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq k\,\mathrm{d}(x,y)$$

(on dit alors que f est k-contractante). Alors f admet un unique point fixe, i. e. *il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.*

Démonstration. Existence. Fixons $x_0 \in E$. On définit la suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$. Une récurrence immédiate donne $\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) \leq k^n\,\mathrm{d}(x_1, x_0)$ pour tout entier naturel n. Ainsi, lorsque $p < q$

$$\mathrm{d}(x_p, x_q) \leq \mathrm{d}(x_p, x_{p+1}) + \cdots + \mathrm{d}(x_{q-1}, x_q) \leq (k^p + \cdots + k^{q-1})\,\mathrm{d}(x_1, x_0) \leq \frac{k^p}{1-k}\,\mathrm{d}(x_1, x_0),$$

ce qui prouve que la suite (x_n) est de Cauchy. Comme E est complet, (x_n) converge. Notons x sa limite. Par continuité de f (f est continue car k-lipschitzienne), on a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Le point x est donc un point fixe de f.

Unicité. Supposons $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Alors

$$0 \leq \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq k\,\mathrm{d}(x,y),$$

et comme $k < 1$, ceci n'est possible que si $\mathrm{d}(x,y) = 0$, *i. e.* $x = y$. □

Remarque 4. Attention Le théorème est faux si l'on suppose seulement $\mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x,y)$ pour tout $x \neq y$. Cependant, dans un compact, une telle condition suffit à montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe (voir l'exercice 4 page 34).

Critère de Cauchy pour les fonctions. à l'aide de la proposition 5, on montre facilement le résultat qui suit.

PROPOSITION 10. *Soit (E, d) un espace métrique et (F, δ) un espace métrique complet. Soit une application $f : D \subset E \to F$, soient $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. La fonction f admet une limite lorsque x tend vers a selon A si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in A^2), \qquad (\mathrm{d}(a,x) < \alpha \quad et \quad \mathrm{d}(a,y) < \alpha) \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2.4. Exercices

⟶ EXERCICE 1. Soit X un ensemble. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On norme $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ en posant

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \qquad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Muni de cette norme, montrer que $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Solution. Rappelons qu'un espace de Banach est un e.v.n complet. La preuve de la complétude d'un espace métrique est hyper-classique. On procède comme suit :

(i) On considère une suite de Cauchy, et on construit sa limite éventuelle,

(ii) on vérifie qu'elle appartient à l'ensemble de départ,

(iii) on montre que la suite de Cauchy converge bien vers cette limite éventuelle.

(i) Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Fixons $x \in X$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, l'inégalité $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|$ implique que la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, $(f_p(x))$ converge. Notons $f(x)$ sa limite.

(ii) L'application $f : X \to \mathbb{R}$ ainsi construite vérifie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$. Montrons que f est bornée. La suite (f_n) étant de Cauchy, elle est bornée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\| \leq M$ pour tout n. Si $x \in X$, on a donc $|f_n(x)| \leq M$ pour tout n, donc en passant à la limite $|f(x)| \leq M$. Ceci étant vrai pour tout x, f est bien bornée, *i. e.* $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

(iii) Montrons maintenant que (f_n) tend vers f dans $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N > 0$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $\|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$. Ainsi, si on fixe un élément x quelconque de X, on a

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \qquad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\| < \varepsilon.$$

En fixant p dans l'assertion précédente et en faisant tendre q vers l'infini, on en déduit l'inégalité $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, on a $\|f_p - f\| \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $p \geq N$, donc (f_p) converge vers f.

Finalement, toute suite de Cauchy (f_n) de $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ converge, donc $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est complet.

EXERCICE 2. On munit l'espace $]0,+\infty[$ de la distance $\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

a) Montrer que δ est bien une distance sur $]0,+\infty[$.
b) Montrer que cette distance définit sur $]0,+\infty[$ la même topologie que la topologie usuelle.
c) Montrer que l'espace métrique $(\,]0,+\infty[\,,\delta)$ n'est pas complet.
d) On restreint la distance δ à l'espace $]0,1]$. Montrer que $(\,]0,1],\delta)$ est complet.

Solution. **a)** C'est bien une distance car :

(i) $\delta(x,y) = 0$ si et seulement si $1/x = 1/y$, *i. e.* $x = y$.

(ii) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $\delta(x,y) = \delta(y,x)$.

(iii) $\forall (x,y,z) \in]0,+\infty[^3$,

$$\delta(x,z) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| = \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

b) Notons d la distance usuelle sur les nombres réels ($\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$). Rappelons le fait suivant : dire que les deux espaces métriques $(\,]0,+\infty[,\delta)$ et $(\,]0,+\infty[,\mathrm{d})$ définissent la même topologie, c'est dire qu'ils ont les mêmes ouverts. La proposition 10 de la page 12 affirme que ceci équivaut au fait que l'application identité $\mathrm{Id}_{]0,+\infty[} :\ (\,]0,+\infty[,\mathrm{d}) \to (\,]0,+\infty[,\delta)$ est un homéomorphisme. Pour prouver ce dernier point, nous allons utiliser le fait que cette application est la composée de

$$\varphi :\ (\,]0,+\infty[,\mathrm{d}) \to (\,]0,+\infty[,\mathrm{d}) \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \psi :\ (\,]0,+\infty[,\mathrm{d}) \to (\,]0,+\infty[,\delta) \quad x \mapsto \frac{1}{x},$$

et que φ et ψ sont des homéomorphismes.

L'application φ est continue (c'est classique puisque d est la distance usuelle), elle est bijective, et $\varphi^{-1} = \varphi$ est aussi continue. On a donc bien affaire à un homéomorphisme.

L'application ψ vérifie

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \qquad \delta(\psi(x),\psi(y)) = \left|\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\psi(y)}\right| = |x-y| = \mathrm{d}(x,y),$$

c'est donc une isométrie, donc un homéomorphisme. D'où le résultat.

Remarque. On aurait pu également prouver le résultat "à la main", en montrant qu'un ouvert de $(\,]0,+\infty[,\mathrm{d})$ est un ouvert de $(\,]0,+\infty[,\delta)$ et réciproquement.

c) Dans $(\,]0,+\infty[,\delta)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = n$ est de Cauchy car $\delta(u_p,u_q) = |1/p - 1/q|$ tend vers 0 lorsque p et q tendent vers $+\infty$. Il est clair que cette suite ne converge pas dans $(\,]0,+\infty[,\mathrm{d})$ (elle n'est pas bornée), donc elle ne converge pas dans $(\,]0,+\infty[,\delta)$ puisque ces deux espaces métriques définissent la même topologie (la notion de convergence est topologique). Ainsi, $(\,]0,+\infty[,\delta)$ n'est pas complet.

d) On applique la méthode utilisée dans la solution de l'exercice précédent pour prouver la complétude souhaitée. Considérons une suite (u_n) de Cauchy dans $(\,]0,1],\delta)$. Pour tout p, q, on

a

$$\delta(u_p, u_q) = \left|\frac{1}{u_p} - \frac{1}{u_q}\right| = \left|\frac{u_p - u_q}{u_p u_q}\right| \geq |u_p - u_q|,$$

ce qui montre que (u_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$. Ce dernier étant complet, (u_n) converge dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$. Soit u sa limite dans cet espace métrique.

La limite u est forcément dans l'adhérence de $]0, 1]$ dans $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$, qui est $[0, 1]$. Si $u = 0$, alors $\delta(1, u_n) = |1 - 1/u_n|$ tend vers $+\infty$, donc la suite (u_n) n'est pas bornée dans $(]0, 1], \delta)$, ce qui est impossible car c'est une suite de Cauchy de cet espace. Ainsi, $u \neq 0$, donc $u \in]0, 1]$. Comme $(]0, 1], \mathrm{d})$ et $(]0, 1], \delta)$ possèdent la même topologie (c'est la topologie induite par $(]0, +\infty[, \mathrm{d})$ ou $(]0, +\infty[, \delta)$ — qui possèdent la même topologie — sur $]0, 1]$), on en déduit que (u_n) converge vers u dans $(]0, 1], \delta)$.

On a prouvé que toute suite de Cauchy de $(]0, 1], \delta)$ converge, donc $(]0, 1], \delta)$ est complet.

Exercice 3 (Deux résultats de point fixe). **1/** Soit (E, d) un espace métrique complet et une application $f : E \to E$. On suppose l'existence d'un entier naturel non nul r tel que l'application f^r (composée r fois de f) est k-contractante ($0 < k < 1$). Montrer que f admet un unique point fixe.

2/ (Point fixe à paramètre). Soient (X, δ) et (E, d) deux espaces métriques, (E, d) étant complet. On considère une application

$$F : X \times E \to E \quad (\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x),$$

continue, et k-contractante en la seconde variable, *i. e.*

$$\exists k \in]0, 1[, \forall \lambda \in X, \forall (x, y) \in E^2, \qquad \mathrm{d}(F(\lambda, x), F(\lambda, y)) \leq k\, \mathrm{d}(x, y).$$

Montrer que pour tout $\lambda \in X$, l'application $F(\lambda, \cdot) : x \mapsto F(\lambda, x)$ admet un unique point fixe, que l'on note x_λ. Montrer ensuite que l'application $X \to E \quad \lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

Solution. **1/** Comme E est complet et que $f^r : E \to E$ est k-contractante, f^r a un unique point fixe $x \in E$ (voir le théorème du point fixe). De l'égalité $f^r(x) = x$ on tire $f(f^r(x)) = f(x) = f^r(f(x))$, ce qui montre que $f(x)$ est un point fixe de f^r. Comme x est l'unique point fixe de f^r, on a forcément $f(x) = x$.

Maintenant, x est le seul point fixe de f car l'égalité $f(y) = y$ entraîne $f^r(y) = y$ donc $y = x$ car x est le seul point fixe de f^r.

2/ Pour tout $\lambda \in X$, l'application $F(\lambda, \cdot) : E \to E$ est k-contractante, donc admet un unique point fixe x_λ car E est complet.

Montrons que l'application $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue. Si $\lambda, \lambda' \in X$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(x_\lambda, x_{\lambda'}) = \mathrm{d}(F(\lambda, x_\lambda), F(\lambda', x_{\lambda'})) &\leq \mathrm{d}(F(\lambda, x_\lambda), F(\lambda, x_{\lambda'})) + \mathrm{d}(F(\lambda, x_{\lambda'}), F(\lambda', x_{\lambda'})) \\ &\leq k\, \mathrm{d}(x_\lambda, x_{\lambda'}) + \mathrm{d}(F(\lambda, x_{\lambda'}), F(\lambda', x_{\lambda'}))\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{d}(x_\lambda, x_{\lambda'}) \leq \frac{1}{1-k}\, \mathrm{d}(F(\lambda, x_{\lambda'}), F(\lambda', x_{\lambda'})).$$

La continuité de F au point $(\lambda', x_{\lambda'})$ permet maintenant d'affirmer $\lim_{\lambda \to \lambda'} x_\lambda = x_{\lambda'}$, d'où le résultat.

Exercice 4 (Deux résultats de prolongement). Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, A une partie de E dense dans E.

a) Si une application $f : (A, \mathrm{d}) \to (F, \delta)$ est continue et si

$$\forall x \in E \smallsetminus A, \qquad \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y) \quad \text{existe},$$

montrer qu'il existe une unique fonction $g : E \to F$, continue, telle que la restriction $g_{|A}$ de g à A soit égale à f.
b) On suppose cette fois ci que (F, δ) est complet. Soit $f : (A, \mathrm{d}) \to (F, \delta)$ une application uniformément continue. Montrer l'existence d'une unique fonction $g : E \to F$ uniformément continue, telle que $g_{|A} = f$.

Solution. **a)** Définissons $g : E \to F$ de la manière suivante :

$$\forall x \in A, \quad g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \smallsetminus A, \quad g(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y).$$

Montrons que g est continue sur E. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de E tendant vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{\substack{y \to x_n \\ y \in A}} f(y) = g(x_n)$. On en déduit facilement

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in A), \qquad \mathrm{d}(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \delta(g(x_n), f(y_n)) < \frac{1}{n}.$$

La relation $\mathrm{d}(x, y_n) \leq \mathrm{d}(x, x_n) + \mathrm{d}(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} + \mathrm{d}(x, x_n)$ montre que

$$\lim_{n \to \infty} y_n = x, \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \to \infty} f(y_n) = g(x). \tag{$*$}$$

Maintenant, les inégalités

$$\delta(g(x_n), g(x)) \leq \delta(g(x_n), f(y_n)) + \delta(f(y_n), g(x)) \leq \frac{1}{n} + \delta(f(y_n), g(x))$$

montrent avec (*) que $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(x)$. Ceci étant vrai pour tout suite (x_n) de E tendant vers x, on en conclut que g est continue en x, et ceci pour tout $x \in E$.

Unicité. Soient g et $h : E \to F$ deux applications continues telles que $g_{|A} = h_{|A}$.

— Par hypothèse, $g(x) = h(x)$ pour tout $x \in A$.

— Soit $x \in E \smallsetminus A$. Comme A est dense dans E, il existe une suite (x_n) de points de A tendant vers x. Comme g et h sont continues, on a

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n), \quad \text{de même} \quad h(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n),$$

ce qui suffit pour conclure $g(x) = h(x)$.

b) L'idée est de se ramener au cas précédent puis de prouver que la fonction g obtenue est bien uniformément continue.

Soit $x_0 \in E \smallsetminus A$. Montrons que $\lim_{\substack{y \to x_0 \\ y \in A}} f(y)$ existe. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur A,

$$(\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2), \qquad \mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

En particulier, si $x, y \in A$ vérifient $\mathrm{d}(x, x_0) < \alpha/2$ et $\mathrm{d}(y, x_0) < \alpha/2$, on a $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$ donc $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Comme (F, δ) est complet, d'après le critère de Cauchy pour les fonctions (voir la proposition 10), on en déduit que $\lim_{\substack{y \to x_0 \\ y \in A}} f(y)$ existe.

D'après le résultat de la question précédente, la fonction g définie sur E par

$$\forall x \in A, \quad g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \smallsetminus A, \quad g(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$$

est continue sur E. Nous allons prouver qu'elle est uniformément continue sur E. Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, f est uniformément continue sur A, donc

$$(\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2), \qquad \mathrm{d}(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Donnons nous $(x, y) \in E^2$ avec $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$. Comme A est dense dans E, il existe deux suites (x_n) et (y_n) de points de A tendant respectivement vers x et y. La distance étant continue, on a $\lim_{n \to \infty} \mathrm{d}(x_n, y_n) = \mathrm{d}(x, y) < \alpha$, ce qui montre l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{d}(x_n, y_n) < \alpha$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $\delta(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ et en faisant tendre n vers l'infini,

on obtient $\delta(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout couple $(x, y) \in E^2$ tel que $\mathrm{d}(x, y) < \alpha$, la fonction g est donc uniformément continue sur E.

L'unicité découle de l'unicité de la question précédente car une fonction uniformément continue est continue.

EXERCICE 5. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques. On suppose que (E, d) est complet. Soient $f : E \to F$ continue et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre $\delta(E_n)$ tend vers 0. Montrer que

$$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n).$$

Solution. Comme E est complet, il existe $x_0 \in E$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \{x_0\}$ (voir la proposition 9). On en déduit $f(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \{f(x_0)\}$. Il nous faut donc prouver $\cap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) = \{f(x_0)\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in E_n$ donc $\{f(x_0)\} \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n)$.

Montrons l'inclusion réciproque. L'application f est continue en x_0, donc pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$. Or pour tout n, $E_n \subset \mathrm{B_f}(x_0, \delta(E_n))$ (car $x_0 \in E_n$), et comme $\delta(E_n)$ tend vers 0,

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad E_n \subset \mathrm{B_f}(x_0, \delta(E_n)) \subset U, \quad \text{donc} \quad f(E_n) \subset f(U) \subset V.$$

Ainsi, $\cap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) \subset V$, et ceci pour tout voisinage V de $f(x_0)$. Ceci suffit pour conclure à l'inclusion $\cap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) \subset \{f(x_0)\}$, d'où le résultat.

Remarque. Rappelons qu'en général l'égalité $f(\cap_{i\in I} X_i) = \cap_{i\in I} f(X_i)$ est fausse. Par contre, l'inclusion $f(\cap_{i\in I} X_i) \subset \cap_{i\in I} f(X_i)$ a toujours lieu.

EXERCICE 6 (COMPLÉTÉ D'UN ESPACE MÉTRIQUE). Soit (E, d) un espace métrique. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. Le but de l'exercice est de plonger (E, d) dans un espace complet dont la distance prolonge celle de E.

1/ a) Soient $U = (u_n)$ et $V = (v_n) \in \mathcal{C}$. Montrer que la suite $(\mathrm{d}(u_n, v_n))$ converge. On note $\delta(U, V)$ sa limite.

b) Montrer que δ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.

2/ On considère la relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ définie par $(U \sim V) \iff (\delta(U, V) = 0)$. On note $\hat{E}$ l'espace quotient $\mathcal{C}/\!\sim$ et $\hat{U}$ la classe d'équivalence dans $\hat{E}$ de $U \in \mathcal{C}$.

a) Quelle est la classe d'une suite convergente dans E ?

b) Montrer que si $U \sim U'$ et $V \sim V'$, alors $\delta(U, V) = \delta(U', V')$. Lorsque $\hat{U}, \hat{V} \in \hat{E}$, le réel $\delta(U, V)$ est donc indépendant du choix des représentants U et V de $\hat{U}$ et $\hat{V}$. On le note $\delta(\hat{U}, \hat{V})$.

c) Ainsi définie, montrer que δ est une distance sur $\hat{E}$.

d) Montrer qu'il existe une injection naturelle $i : E \to \hat{E}$, isométrique, et que $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$.

3/ Montrer que $\hat{E}$ est complet.

4/ Soient (E_1, d_1), (E_2, d_2) deux espaces métriques complets tels qu'il existe une isométrie i_1 (resp. i_2) de E dans E_1 (resp. dans E_2), avec $i_1(E)$ (resp. $i_2(E)$) dense dans E_1 (resp. dans E_2). Montrer l'existence d'une unique isométrie φ de E_1 dans E_2, bijective, et vérifiant $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$.

Solution. **1/ a)** Comme $\mathbb{R}$ est complet, il suffit de montrer que la suite $(\mathrm{d}(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{d}(u_p, v_p) \leq \mathrm{d}(u_p, u_q) + \mathrm{d}(u_q, v_q) + \mathrm{d}(v_q, v_p)$$

donc

$$\mathrm{d}(u_p, v_p) - \mathrm{d}(u_q, v_q) \leq \mathrm{d}(u_p, u_q) + \mathrm{d}(v_p, v_q).$$

On obtient de même $\mathrm{d}(u_q, v_q) - \mathrm{d}(u_p, v_p) \leq \mathrm{d}(u_p, u_q) + \mathrm{d}(v_p, v_q)$, d'où

$$|\mathrm{d}(u_q, v_q) - \mathrm{d}(u_p, v_p)| \leq \mathrm{d}(u_p, u_q) + \mathrm{d}(v_p, v_q).$$

Les suites U et V étant de Cauchy, on en déduit que la suite $(\mathrm{d}(u_n, v_n))$ est de Cauchy.
b) C'est immédiat par passage à la limite, les propriétés de symétrie et d'inégalité triangulaires étant vraies pour d.

2/ a) Soit $U = (u_n)$ une suite de E convergeant vers $\alpha \in E$. Toute suite convergente est de Cauchy, donc $U \in \mathcal{C}$. Soit $V = (v_n) \in \mathcal{C}$. On a

$$U \sim V \iff \delta(U, V) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(u_n, v_n) = 0.$$

Les inégalités

$$\mathrm{d}(\alpha, v_n) \leq \mathrm{d}(\alpha, u_n) + \mathrm{d}(u_n, v_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(u_n, v_n) \leq \mathrm{d}(u_n, \alpha) + \mathrm{d}(\alpha, v_n)$$

montrent que $U \sim V$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\alpha, v_n) = 0$. Finalement, la classe de U est l'ensemble des suites qui convergent vers α.
b) Si $U \sim U'$ et $V \sim V'$, comme δ satisfait l'inégalité triangulaire, on a

$$\delta(U, V) \leq \delta(U, U') + \delta(U', V') + \delta(V', V) = \delta(U', V'),$$

de même $\delta(U', V') \leq \delta(U, V)$. Donc $\delta(U, V) = \delta(U', V')$.
c) Après le résultat de la question 1/b), il reste à prouver $\delta(\hat{U}, \hat{V}) = 0$ si et seulement si $\hat{U} = \hat{V}$. Ceci est vrai par construction de la relation d'équivalence $\sim$.
d) Pour tout $\alpha \in E$, on note $(\alpha) \in \mathcal{C}$ la suite constante égale à α. Soit $i : \ E \to \hat{E} \quad \alpha \mapsto \widehat{(\alpha)}$. On a

$$\delta(i(\alpha), i(\beta)) = \delta((\alpha), (\beta)) = \mathrm{d}(\alpha, \beta),$$

c'est-à-dire i est isométrique, et c'est donc une injection.

Montrons que $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$. Soit $\hat{U} \in \hat{E}$, avec $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Nous allons prouver que $\hat{U}$ est la limite de la suite $(i(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) est de Cauchy, de sorte qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $\mathrm{d}(u_p, u_q) < \varepsilon$. En fixant $p \geq N$, on en déduit

$$\delta(\hat{U}, i(u_p)) = \delta(U, (u_p)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(u_n, u_p) \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $p \geq N$, on en déduit $\lim_{p\to\infty} i(u_p) = \hat{U}$. Ainsi, on a montré que tout élément $\hat{U}$ de $\hat{E}$ est limite de points de $i(E)$, d'où le résultat.

3/ Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\hat{E}$. Comme $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un point x_n de E tel que $\delta(\alpha_n, i(x_n)) < 1/n$. L'inégalité

$$\mathrm{d}(x_p, x_q) = \delta(i(x_p), i(x_q)) \leq \delta(i(x_p), \alpha_p) + \delta(\alpha_p, \alpha_q) + \delta(\alpha_q, i(x_q)) \leq \delta(\alpha_p, \alpha_q) + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

montre que la suite (x_n) est de Cauchy dans E. Notons α la suite $(\widehat{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\hat{E}$.

Montrons que (α_n) converge vers α. Comme $\delta(\alpha_n, \alpha) \leq \delta(\alpha_n, i(x_n)) + \delta(i(x_n), \alpha) \leq \frac{1}{n} + \delta(i(x_n), \alpha)$, il suffit de prouver que $\lim_{n\to\infty} \delta(i(x_n), \alpha) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) étant de Cauchy dans E,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \qquad \mathrm{d}(x_p, x_q) < \varepsilon,$$

donc si on fixe $n \geq N$,

$$\delta(i(x_n), \alpha) = \lim_{p\to\infty} \mathrm{d}(x_n, x_p) \leq \varepsilon,$$

et ceci pour tout $n \geq N$, d'où le résultat.

4/ Définissons φ sur $i_1(E)$ en posant $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$. L'application φ restreinte à $i_1(E)$ est isométrique car

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \mathrm{d}_2(\varphi(i_1(x)), \varphi(i_1(y))) = \mathrm{d}_2(i_2(x), i_2(y)) = \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}_1(i_1(x), i_1(y)).$$

Ainsi, φ est uniformément continue sur $i_1(E)$. Comme $i_1(E)$ est dense dans E_1 et que E_2 est complet, il existe (voir l'exercice 4) un prolongement de φ sur E_1, encore noté φ, qui est uniformément continu sur E_1. De plus φ est isométrique sur $i_1(E)$, et comme $i_1(E)$ est dense dans E_1 et que φ est continue, φ est isométrique sur E_1 tout entier. En particulier, φ est injective.

Il nous reste à montrer que φ est surjective. Soit $\beta \in E_2$. Comme $i_2(E)$ est dense dans E_2, il existe une suite $(\beta_n) = (i_2(x_n))$ de $i_2(E)$ qui converge vers β. De plus pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{d}_1(i_1(x_p), i_1(x_q)) = \mathrm{d}(x_p, x_q) = \mathrm{d}_2(i_2(x_p), i_2(x_q)) = \mathrm{d}_2(\beta_p, \beta_q)$$

la suite $(i_1(x_n))$ est donc de Cauchy dans E_1. Comme E_1 est complet, elle converge. Soit α sa limite. Comme φ est continue,

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \varphi(i_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} i_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta,$$

d'où la surjectivité.

L'application φ est unique d'après l'unicité du prolongement continue sur E_1 (voir l'exercice 4).

Remarque. Par abus, on identifie souvent E et $i(E)$ dans $\hat{E}$. Ainsi, $\hat{E}$ est un espace complet dans lequel E est plongé, et sa métrique prolonge celle de E.

– La partie 4/ montre que $\hat{E}$ est unique à une isométrie bijective près. On l'appelle le *complété* de E.

– On procède de manière similaire pour définir $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$). La différence est que, $\mathbb{R}$ "n'existant pas encore", on ne peut pas définir $\delta(U,V)$ pour $U, V \in \mathcal{C}$. On peut par contre définir la classe d'équivalence $U \sim V \iff \lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$. La notion de limite peut en effet être définie si l'on reste uniquement sur $\mathbb{Q}$ (il suffit de prendre les ε et les α dans $\mathbb{Q}$).

3. Espaces compacts

3.1. Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 1. Un espace métrique (E, d) est dit *compact* si de tout recouvrement de E par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, si $E = \cup_{i\in I} O_i$ avec O_i ouvert pour tout i, il existe $J \subset I$, J fini, tel que $E = \cup_{i\in J} O_i$.

Exemple 1.
- Tout espace métrique fini est compact.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas compact (on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n, n[$).

Remarque 1. La notion de compacité peut être définie dans un espace topologique général. Si E est un espace topologique, E est dit compact s'il est séparé (voir la page 10) et s'il satisfait les propriétés de la définition 1. Les propositions 2, 3, 4 et 5 de cette partie 3.1 restent vraies pour les compacts d'un espace topologique. Mais attention ! La propriété de Bolzano-Weierstrass (voir la partie 3.2) n'est vraie que dans les espaces métriques.

Proposition 1. *Un espace métrique compact est borné.*

Démonstration. C'est immédiat car si E est compact, si $x_0 \in E$, en extrayant du recouvrement $E = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}(x_0, n)$ un sous-recouvrement fini, on s'aperçoit que E est borné. □

Aspect dual de la propriété de Borel-Lebesgue. En passant au complémentaire de la définition 1, on obtient facilement le résultat qui suit.

PROPOSITION 2. *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de E, on peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide.*

Une conséquence immédiate est la suivante.

PROPOSITION 3. *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact E, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.*

Remarque 2. Nous avons vu plus haut (voir la proposition 9 page 20) que ce dernier résultat reste vrai dans un espace complet pourvu que $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$. Si cette dernière condition n'est pas vérifiée, le résultat est faux dans un espace complet (par exemple, $\cap_{n\in\mathbb{N}}[n, +\infty[= \varnothing$).

Parties compactes. Les propriétés des ouverts d'une topologie induite entraînent une caractérisation simple des parties compactes.

PROPOSITION 4. *Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de E est compacte si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts de E ($A \subset \cup_{i\in I} O_i$ avec O_i ouvert de E pour tout i), il en existe un sous-recouvrement fini ($\exists J \subset I$, J fini, tel que $A \subset \cup_{i\in J} O_i$).*

On en déduit facilement :

PROPOSITION 5. *Une réunion finie de parties compactes est compacte.*

PROPOSITION 6. *Une intersection de compacts est compacte.*

3.2. Propriété de Bolzano-Weierstrass

La compacité d'un espace métrique peut être caractérisée par la propriété dite de Bolzano-Weierstrass, *a priori* totalement différente, mais parfois beaucoup plus souple d'utilisation.

→ THÉORÈME 1 (DE BOLZANO-WEIERSTRASS). *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si de toute suite de points de E, on peut en extraire une sous-suite convergente dans E.*

Démonstration. La condition nécessaire se montre facilement, la condition suffisante est plus délicate.

Condition nécessaire. (*Borel-Lebesgue* $\Longrightarrow$ *Bolzano-Weierstrass*). Nous allons en donner deux preuves.

Première preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $A_p = \{x_n,\ n \geq p\}$. La suite $(\overline{A_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides, donc (voir la proposition 3) $\cap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p} \neq \varnothing$. Choisissons $x \in \cap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$. On construit une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) comme suit.

- On choisit $x_{\varphi(0)} \in A_0$.
- L'élément $x_{\varphi(n)}$ étant construit, on prend $x_{\varphi(n+1)} \in A_{n+1}$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $\mathrm{d}(x_{\varphi(n+1)}, x) < 1/2^{n+1}$ (c'est possible car $x \in \overline{A_{n+1}}$).

Ainsi construite, $(x_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de (x_n) qui converge vers x.

Seconde preuve. Soit (x_n) une suite de E. Si cette suite ne prend qu'un nombre de valeurs fini, on peut en extraire une sous-suite constante donc convergente. Sinon, $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est infini. Nous allons prouver que A a au moins un point d'accumulation. Supposons le contraire, de sorte que pour tout $x \in E$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r_x) \cap A$ est fini. Du recouvrement $\cup_{x\in E} \mathrm{B}(x, r_x)$ de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En termes mathématiques, ceci s'écrit

$$\exists J \subset E,\ J \text{ fini}, \quad \text{avec} \quad E = \cup_{x\in J} \mathrm{B}(x, r_x).$$

Ainsi, $A = \cup_{x\in J}(\mathrm{B}(x, r_x) \cap A)$, réunion finie d'ensembles finis, est fini, ce qui est contradictoire.

L'ensemble A admet donc au moins un point d'accumulation $x \in E$. Ainsi, x est valeur d'adhérence de la suite (x_n), donc il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x.

Condition suffisante. (*Bolzano-Weierstrass* $\implies$ *Borel-Lebesgue*). Nous montrons deux lemmes.

PRÉCOMPACITÉ (OU ε-RECOUVREMENT). Un espace métrique E est dit *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules (ouvertes) de rayon ε.

LEMME 1. *Tout espace métrique* (E, d) *vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass est précompact.*

En effet. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que l'on ne puisse pas trouver un sous-recouvrement fini de E par des boules de rayon ε.

— Soit $x_0 \in E$. Alors $\mathrm{B}(x_0, \varepsilon) \neq E$.
— Donc il existe $x_1 \in E$ tel que $\mathrm{d}(x_0, x_1) \geq \varepsilon$.
— De même, comme $\mathrm{B}(x_0, \varepsilon) \cup \mathrm{B}(x_1, \varepsilon) \neq E$, il existe $x_2 \in E$ tel que $\mathrm{d}(x_0, x_1) \geq \varepsilon$ et $\mathrm{d}(x_0, x_2) \geq \varepsilon$.
— On recommence $\ldots$ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ étant construits tels que $\forall i < j \leq n$, $\mathrm{d}(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, on sait que $\cup_{0\leq i\leq n}\mathrm{B}(x_i, \varepsilon) \neq E$, donc il existe $x_{n+1} \in E$ tel que pour tout i, $0 \leq i \leq n$, $\mathrm{d}(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon$.

On construit ainsi une suite (x_n) de E telle que $\mathrm{d}(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ dès que $i \neq j$. La suite (x_n) n'admet donc aucune sous-suite convergente car aucune sous-suite n'est de Cauchy, d'où la contradiction voulue, d'où notre premier lemme.

LEMME 2. *Soit* (E, d) *un espace métrique vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass, et soit* $(O_i)_{i\in I}$ *un recouvrement de* E *par des ouverts de* E. *Alors :*

$$(\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \exists i \in I), \qquad \mathrm{B}(x, \alpha) \subset O_i.$$

En effet. Raisonnons par l'absurde, en supposant que

$$(\forall \alpha > 0, \exists x \in E, \forall i \in I), \qquad \mathrm{B}(x, \alpha) \not\subset O_i.$$

En particulier,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E, \forall i \in I), \qquad \mathrm{B}\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset O_i.$$

Soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (x_n) qui converge. Notons x sa limite. Il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme O_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, 2r) \subset O_i$. Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \qquad (\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, x) < r \quad \text{et} \quad \varphi(n) > \frac{1}{r}).$$

Alors

$$\forall n \geq N, \forall y \in \mathrm{B}\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right), \qquad \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, x_{\varphi(n)}) + \mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, y) < r + r = 2r,$$

donc pour tout $n \geq N$, $\mathrm{B}(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n)) \subset O_i$, ce qui est absurde. D'où le lemme 2.

Achevons notre raisonnement. Soit (E, d) vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass, soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de E par des ouverts de E. D'après le lemme 2,

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \exists i \in I, \qquad \mathrm{B}(x, \alpha) \subset O_i.$$

D'après le lemme 1, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon α, ce qui s'écrit

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \ldots, x_n \in E, \qquad E = \cup_{i=1}^{n}\mathrm{B}(x_i, \alpha).$$

Or pour tout j, $1 \leq j \leq n$, il existe $i_j \in I$ tel que $\mathrm{B}(x_j, \alpha) \subset O_{i_j}$. On en déduit $E = \cup_{j=1}^{n} O_{i_j}$, d'où le résultat. □

Il existe d'autres formulations de ce théorème qui sont les suivantes.

COROLLAIRE 1. *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée*
- *Toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence dans E.*
- *Toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation dans E.*

3.3. Propriétés générales des compacts

PROPOSITION 7. *Soit (E, d) un espace métrique.*
- *Si E est compact et si A est une partie fermée de E, A est compacte.*
- *Si A est une partie compacte de E, A est fermée et bornée.*

PROPOSITION 8. *Un espace compact est complet.*

PROPOSITION 9. *Soit (E, d) un espace métrique compact et (x_n) une suite de E admettant une et une seule valeur d'adhérence x. Alors (x_n) converge vers x.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N, \qquad \mathrm{d}(x_n, x) \geq \varepsilon.$$

On peut donc construire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) telle que pour tout n, $\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, x) \geq \varepsilon$. Comme E est compact, on peut extraire de la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ une nouvelle sous-suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ convergente. Si y est sa limite, on a $\mathrm{d}(x, y) \geq \varepsilon$, donc $x \neq y$. Ceci est absurde car y est une valeur d'adhérence de (x_n), d'où le résultat. □

Remarque 3. Ce résultat peut s'avérer parfois bien pratique.

PROPOSITION 10. *Soient $E_1, \ldots, E_n$ un nombre fini d'espaces métriques. L'ensemble $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est compact si et seulement si E_i est compact pour tout i.*

Remarque 4. Étant données deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans un même compact E, cette proposition montre l'existence d'une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que les *deux suites* $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent (ceci car (x_n, y_n) est une suite dans le compact $E \times E$).

PROPOSITION 11. *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (muni de la distance produit usuelle, avec $n \in \mathbb{N}^*$) sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 5. Comme nous le verrons à la partie 5.3, toutes les normes d'un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie sont équivalentes. Ceci nous permettra d'affirmer que le résultat de cette proposition reste vrai dans tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Par contre, il est faux en dimension infinie (voir le théorème de Riesz à l'exercice 9 de la page 56).

PROPOSITION 12. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'un espace métrique (E, d), ℓ sa limite. Alors l'ensemble $\Gamma = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.*

Démonstration. Nous sommes dans un des rares cas ou il est plus facile de montrer la compacité de Γ en prouvant qu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue (la caractérisation par la propriété de Bolzano-Weierstrass donnerait ici une preuve bancale et peu satisfaisante). Cette preuve faisant appel uniquement à la topologie de E montrera qu'en fait le résultat reste vrai dans un espace topologique *séparé* général.

Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de Γ par des ouverts de E. Comme $\ell \in \Gamma$, il existe $i_0 \in I$ tel que $\ell \in O_{i_0}$, et comme O_{i_0} est ouvert et que (x_n) tend vers ℓ,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \qquad x_n \in O_{i_0}.$$

Pour tout $n \leq N$, il existe $j_n \in I$ tel que $x_n \in O_{j_n}$. En notant $J = \{j_n,\ n \leq N\} \cup \{i_0\}$, on s'aperçoit que $\Gamma \subset \cup_{j\in J} O_j$, et comme J est fini, le résultat est prouvé. □

3.4. Compacts et applications continues

PROPOSITION 13. *Soient (E, d) un espace métrique compact, (F, δ) un espace métrique et une application continue $f : E \to F$. Alors $f(E)$ est compact.*

Remarque 6. Cette proposition entraîne que l'image par f de tout fermé de E (où E est compact) est un fermé (une application vérifiant cette propriété est dite *fermée*). Ceci est faux en général. En corollaire (et grâce à la proposition 9), on a le résultat qui suit.

PROPOSITION 14. *Soit $f : (E, \mathrm{d}) \to (F, \delta)$ une application continue et bijective. Si (E, d) est compact, alors $f^{-1} : F \to E$ est continue (en d'autres termes, f est un homéomorphisme).*

Remarque 7. Pour toute fonction continue et bijective $f : I \to J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, l'application réciproque f^{-1} est continue. Il suffit en effet d'appliquer la proposition précédente à la restriction de f à tout segment (donc compact) de I.

PROPOSITION 15. *Soit $f : (E, \mathrm{d}) \to \mathbb{R}$ une application continue, où (E, d) est compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe $c, d \in E$ tels que*

$$f(c) = \inf_{x \in E} f(x) \quad et \quad f(d) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Remarque 8. On verra (voir le théorème 3 page 41) que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue, l'image par f d'un intervalle est un intervalle (c'est le *théorème des valeurs intermédiaires*). Avec cette dernière proposition, on en déduit que l'image par f d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

THÉORÈME 2 (DE HEINE). *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, E étant compact, et $f : E \to F$ une application continue. Alors f est une application uniformément continue.*

3.5. Exercices

EXERCICE 1. **1/ a)** Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue telle que pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est compact. Montrer que f est une application fermée (rappel : une application f est dite *fermée* si l'image de tout fermé par f est un fermé).
b) Existe-t-il des applications continues qui ne sont pas fermées ?

2/ (Application). On fixe un entier naturel non nul n et on note

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}.$$

Montrer que l'ensemble Γ_n des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont toutes les racines sont réelles est un fermé du $\mathbb{R}$-e.v.n $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. **1/ a)** Soit Γ un fermé de E. Soit $(y_n) = (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $f(\Gamma)$ qui converge vers un point $y \in F$. Il s'agit de montrer que $y \in f(\Gamma)$.

L'ensemble $K = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est un compact de F (voir la proposition 12), l'ensemble $f^{-1}(K)$ est donc compact. La suite (x_n) de Γ prenant ses valeurs dans $f^{-1}(K)$, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Notons x sa limite. Comme Γ est fermé, $x = \lim_{n \to \infty} x_{\varphi(n)}$ appartient à Γ, et par continuité de f,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \to \infty} y_{\varphi(n)} = y,$$

donc $y = f(x) \in f(\Gamma)$. L'ensemble $f(\Gamma)$ est donc bien fermé.

b) Il existe des applications continues non fermées. Par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto e^x$ est continue et pourtant, $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ n'est pas fermé.

2/ Le résultat sera prouvé si on montre que l'application continue

$$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_n[X] \quad (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mapsto (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$$

est fermée, puisque $\Gamma_n = f(\mathbb{R}^n)$. En vertu du résultat de la question 1/ a), il suffit pour cela de prouver que pour tout compact K de $\mathbb{R}_n[X]$, $f^{-1}(K)$ est un compact.

Donnons nous un compact K de $\mathbb{R}_n[X]$. L'ensemble $f^{-1}(K)$ est déjà un fermé puisque K est fermé et que f est continue. Montrons qu'il est borné. Comme K est compact, K est borné, donc il existe $M>0$ tel que

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \in K, \qquad \|P\| = \sup_k |a_k| \le M.$$

Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in f^{-1}(K)$, de sorte que $P = f(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{i=1}^n (X-\lambda_i) \in K$. Écrivons $P = X^n + a_1\, X^{n-1} + \cdots + a_n$. Si λ est une racine de P, nous allons prouver que $|\lambda| \le 1 + \|P\|$. Si $|\lambda| \le 1$, c'est terminé, sinon l'égalité $P(\lambda)=0$ entraîne

$$|\lambda| = \Big|a_1 + \frac{a_2}{\lambda} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-2}} + \frac{a_n}{\lambda^{n-1}}\Big| \le \|P\| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^k}\right) = \|P\| \frac{1}{1-1/|\lambda|},$$

d'où on tire facilement $|\lambda| \le 1 + \|P\| \le 1 + M$.

Ainsi, nous avons prouvé que si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in f^{-1}(K)$, alors pour tout i, $|\lambda_i| \le 1+M$. En d'autres termes, $f^{-1}(K)$ est borné. L'ensemble $f^{-1}(K)$, fermé borné de $\mathbb{R}^n$, est donc compact, d'où le résultat.

⟶ Exercice 2 (Un précompact complet est compact). On rappelle qu'un espace métrique est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de cet espace par des boules (ouvertes) de rayon ε.

Montrer qu'un espace métrique précompact et complet est compact.

Solution. Soit (E,d) un tel espace métrique. Soit (x_n) une suite de E. Il s'agit de montrer que l'on peut extraire de (x_n) une sous-suite convergente.

Comme E est précompact, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon 1. Il existe donc une de ces boules, $\mathrm{B}(a_0,1)$, qui contient la valeur x_n pour une infinité d'indices n. On peut donc construire une sous-suite $(x_{\varphi_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de (x_n) telle que pour tout n, $x_{\varphi_0(n)} \in \mathrm{B}(a_0,1)$.

Comme $\mathrm{B}(a_0,1) \subset E$, $\mathrm{B}(a_0,1)$ est précompact. On peut donc recouvrir $\mathrm{B}(a_0,1)$ par un nombre fini de boules de rayon $1/2$. Il existe donc une de ces boules, $B(a_1,1/2)$, telle que $\mathrm{B}(a_0,1) \cap \mathrm{B}(a_1,1/2)$ contienne la valeur $x_{\varphi_0(n)}$ pour une infinité d'indices n. On peut donc construire une sous-suite $(x_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_{\varphi_0(n)})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)} \in \mathrm{B}(a_0,1) \cap \mathrm{B}(a_1,1/2).$$

En procédant par récurrence, on peut ainsi construire, pour tout entier naturel p, une sous-suite $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une boule $\mathrm{B}(a_p,1/2^p)$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)} \in \bigcap_{0\le k\le p} \mathrm{B}(a_k,1/2^k).$$

Simplifions les notations. En notant $\psi_p = \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p$ pour tout p, on a construit, pour tout p, une sous-suite $(x_{\psi_p(n)})$ de $(x_{\psi_{p-1}(n)})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{\psi_p(n)} \in \mathrm{B}(a_p,1/2^p).$$

On va maintenant construire une sous-suite de (x_n) par la méthode dite du *procédé diagonal* (à retenir).

— On choisit $x_{\psi(0)} \in \{x_{\psi_0(n)},\ n\in\mathbb{N}\}$.
— On choisit ensuite $x_{\psi(1)} \in \{x_{\psi_1(n)},\ n\in\mathbb{N}\}$ avec $\psi(1) > \psi(0)$.
— ...
— L'indice $\psi(p)$ étant construit, on choisit $x_{\psi(p+1)} \in \{x_{\psi_{p+1}(n)},\ n\in\mathbb{N}\}$ avec $\psi(p+1) > \psi(p)$.

— ...

Ainsi construite, la suite $(x_{\psi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de (x_n). Si maintenant $p \in \mathbb{N}$ et $q \geq p$, on a

$$x_{\psi(q)} \in \{x_{\psi_q(n)},\ n \in \mathbb{N}\} \subset \{x_{\psi_p(n)},\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{B}(a_p, 1/2^p),$$

ce qui prouve que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}\ (p \leq q), \qquad \mathrm{d}(x_{\psi(p),\psi(q)}) \leq \frac{1}{2^{p-1}}.$$

La suite $(x_{\psi(p)})$ est donc de Cauchy, et comme E est complet, elle converge. D'où le résultat.

Remarque. La réciproque est immédiate : un compact est précompact et complet.

⟶ Exercice 3 (Distance entre deux parties). **1/** Soit (E, d) un espace métrique.
a) Soient K_1 et K_2 deux compacts de E. Montrer l'existence de $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(K_1, K_2)$ $(= \inf_{\substack{x\in K_1\\ y\in K_2}} \mathrm{d}(x, y))$.
b) Soient K un compact de E et F un fermé de E. Si $K \cap F = \varnothing$, montrer que $\mathrm{d}(K, F) \neq 0$. Ce résultat subsiste t-il si K est seulement supposé fermé ?

2/ Ici, $E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, muni de la métrique usuelle.
a) Soit F un fermé non borné de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in F}} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $f(x) = \inf_{y\in F} f(y)$.
b) Soient K un compact de E et F un fermé de E. Montrer

$$(\exists x \in K, \exists y \in F), \qquad \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(K, F).$$

Ceci reste t-il vrai si E est un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension infinie ?

Solution. **1/ a)** L'application $\mathrm{d} : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \mathrm{d}(x, y)$ est continue sur le compact $K_1 \times K_2$, donc elle atteint son minimum sur $K_1 \times K_2$, c'est-à-dire qu'il existe $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tel que $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \min_{(x,y)\in K_1\times K_2} \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(K_1, K_2)$.

Remarque. En remplaçant K_1 par $\{x\}$, on voit qu'en particulier, si K_2 est compact,

$$\exists y \in K_2, \qquad \mathrm{d}(x, K_2) = \mathrm{d}(x, y).$$

b) L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, F)$ est continue (voir l'exercice 4 page 17) sur le compact K, donc

$$\exists x_0 \in K, \qquad \mathrm{d}(x_0, F) = \inf_{x\in K} \mathrm{d}(x, F) = \mathrm{d}(K, F).$$

Si $\mathrm{d}(K, F) = 0$, alors $d(x_0, F) = 0$ donc $x_0 \in F$ car F est fermé. Ceci est absurde car $K \cap F = \varnothing$. Donc $\mathrm{d}(K, F) \neq 0$.

Lorsque K est seulement supposé fermé, le résultat est faux. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, les ensembles $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\}$ sont fermés, disjoints, et pourtant $\mathrm{d}(K, F) = 0$.

2/ a) C'est classique. Fixons $a \in F$ et considérons l'ensemble $\Gamma = \{x \in F \mid f(x) \leq f(a)\}$. Comme f est continue, $\Gamma = f^{-1}(]-\infty, f(a)])$ est un fermé de F, donc de E. Comme $\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in F}} f(x) = +\infty$, Γ est borné. Finalement, Γ est compact (fermé borné de $\mathbb{R}^n$). De plus, $\Gamma \neq \varnothing$ puisque $a \in \Gamma$. Donc il existe $x \in \Gamma$ tel que $f(x) = \inf_{y\in\Gamma} f(y)$. Or, par construction de Γ,

$$\inf_{y\in\Gamma} f(y) = \inf_{y\in F} f(y),$$

donc $f(x) = \inf_{y\in F} f(y)$ avec $x \in F$.

b) L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x,F)$ étant continue sur le compact K,

$$\exists x \in K, \qquad \mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in K} \mathrm{d}(y,F) = \mathrm{d}(K,F).$$

De même l'application $F \to \mathbb{R} \quad y \mapsto \mathrm{d}(x,y)$ est continue. Si F est bornée, F est compact (fermé borné de $\mathbb{R}^n$) et le résultat résulte de 1/ a). Sinon F n'est pas borné, et on a alors $\lim_{\substack{\|y\|\to\infty \\ y\in F}} \mathrm{d}(x,y) = +\infty$ ce qui en vertu de la question précédente permet d'affirmer

$$\exists y \in F, \qquad \mathrm{d}(x,y) = \inf_{z\in F} \mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(K,F),$$

d'où le résultat.

Ceci est faux lorsque E est de dimension infinie. Prenons par exemple pour E l'e.v des suites bornées (u_n) de $\mathbb{R}$, normé par $\|(u_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Désignons pour tout n par X_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut $1 + 1/2^n$. L'ensemble $F = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fermé (si $p \neq q$ on a $\|X_p - X_q\| \geq 1$, donc toute suite convergente donc de Cauchy dans F devient stationnaire à partir d'un certain rang, donc converge dans F). Si $K = \{(0)\}$ (ou (0) désigne la suite nulle) il est clair que $\mathrm{d}(K,F) = 1$ et pourtant on a $\mathrm{d}(K,X_n) = 1 + 1/2^n > 1$ pour tout n.

⟶ Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, x \neq y, \qquad \mathrm{d}(f(x),f(y)) < \mathrm{d}(x,y). \tag{$*$}$$

a) Montrer que f admet un unique point fixe, que nous noterons α.
b) Soit x_0 un point quelconque de E. On définit la suite (x_n) par récurrence grâce à la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers α.
c) Ces résultats restent-ils vrais si l'on suppose seulement E complet ?

Solution. C'est classique ! C'est une généralisation du théorème du point fixe dans un compact.

a) L'application $E \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \mathrm{d}(x,f(x))$ est continue (composée d'applications continues) sur le compact E, donc

$$\exists \alpha \in E, \qquad \mathrm{d}(\alpha,f(\alpha)) = \inf_{x\in E} \mathrm{d}(x,f(x)).$$

Supposons $\alpha \neq f(\alpha)$. Posons $\beta = f(\alpha)$. D'après (*),

$$\mathrm{d}(\beta,f(\beta)) = \mathrm{d}(f(\alpha),f(\beta)) < \mathrm{d}(\alpha,\beta) = \mathrm{d}(\alpha,f(\alpha)),$$

ce qui contredit la définition de α. On doit donc avoir $\alpha = f(\alpha)$.

Montrons maintenant que α est l'unique point fixe de f. Supposons $\beta = f(\beta)$ avec $\beta \neq \alpha$. On a $\mathrm{d}(f(\alpha),f(\beta)) = \mathrm{d}(\alpha,\beta)$, ce qui est absurde d'après (*) appliqué au couple (α,β).

b) Posons $u_n = \mathrm{d}(\alpha,x_n)$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \alpha$, alors $u_n = u_{n_0} = \alpha$ pour tout $n \geq n_0$ et le résultat est évident. Sinon,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \mathrm{d}(f(\alpha),f(x_n)) < \mathrm{d}(\alpha,x_n) = u_n,$$

c'est-à-dire que la suite (u_n) décroît strictement. Comme elle est minorée par 0, elle converge. Notons ℓ sa limite. Il s'agit de montrer que $\ell = 0$.

Supposons $\ell > 0$. Comme (u_n) décroît, on a $u_n \geq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, (x_n) est une suite du compact E, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Notons β la limite de cette dernière. Alors $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\alpha,x_{\varphi(n)}) = \mathrm{d}(\alpha,\beta) = \ell$. De plus, f étant continue, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\alpha,f(x_{\varphi(n)})) = \mathrm{d}(\alpha,f(\beta)).$$

Cette dernière assertion est une absurdité puisque

$$\mathrm{d}(\alpha,f(\beta)) = \mathrm{d}(f(\alpha),f(\beta)) < \mathrm{d}(\alpha,\beta) = \ell \quad \text{et} \quad \forall n, \quad \mathrm{d}(\alpha,f(x_{\varphi(n)})) = \mathrm{d}(\alpha,x_{\varphi(n)+1}) \geq \ell.$$

On doit donc avoir $\ell = 0$, d'où le résultat.

c) Le résultat est faux si E est seulement supposé complet. Par exemple, la fonction

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x)=1\quad\text{si}\quad x<0,\quad f(x)=x+\frac{1}{1+x}\quad\text{si}\quad x\geq 0,$$

(voir la figure ci contre) est continue, sans point fixe et vérifie l'hypothèse (*) (immédiat par l'inégalité des accroissements finis).

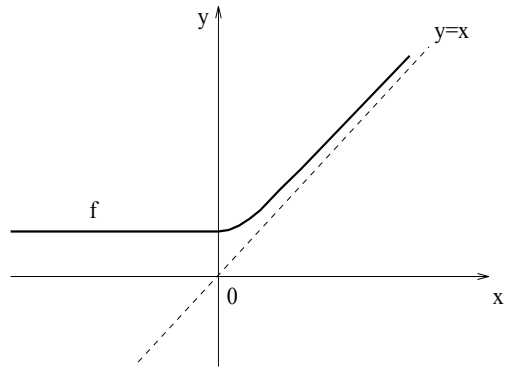

FIGURE 1. Le graphe de l'application sans point fixe f

⟶ EXERCICE 5 (ISOMÉTRIES D'UN COMPACT). Soit (E,d) un espace métrique compact et $f:\ E\to E$ une application continue, vérifiant

$$\forall (x,y)\in E^2,\qquad \mathrm{d}(f(x),f(y))\geq \mathrm{d}(x,y). \tag{$*$}$$

a) Montrer que f est une isométrie, c'est-à-dire

$$\forall (x,y)\in E^2,\qquad \mathrm{d}(f(x),f(y))=\mathrm{d}(x,y).$$

b) Montrer que f est bijective.
c) Si f est bijective, montrer que f est encore une isométrie si elle vérifie

$$\forall (x,y)\in E^2,\qquad \mathrm{d}(f(x),f(y))\leq \mathrm{d}(x,y),$$

Solution. **a)** Soient $x,y\in E$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_n=f^n(x)$ et $y_n=f^n(y)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (où f^n désigne la composée n fois de l'application f avec elle même). Nous allons construire deux sous-suites $(x_{\psi(n)})$ et $(y_{\psi(n)})$ qui convergent respectivement vers x et y.

La suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans le compact $E\times E$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)},y_{\varphi(n)})$. Quitte à extraire encore une sous-suite de cette dernière, on peut même supposer

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \varphi(n+2)-\varphi(n+1)>\varphi(n+1)-\varphi(n). \tag{$**$}$$

De l'inégalité (*), on tire

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathrm{d}(x,x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)})\leq \mathrm{d}(f^{\varphi(n)}(x),f^{\varphi(n)}(x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}))=\mathrm{d}(x_{\varphi(n)},x_{\varphi(n+1)})$$

et comme $(x_{\varphi(n)})$ converge, on en déduit $\lim_{n\to\infty}x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}=x$. Ainsi, en posant $\psi(n)=\varphi(n+1)-\varphi(n)$, $(x_{\psi(n)})$ est une sous-suite de (x_n) d'après (**), et elle converge vers x. Pour les mêmes raisons, $(y_{\psi(n)})$ est une sous-suite de (y_n) qui converge vers y.

Ceci étant, pour $n\geq 1$, on a d'après (*)

$$\mathrm{d}(x,y)\leq \mathrm{d}(f(x),f(y))\leq \mathrm{d}(x_{\psi(n)},y_{\psi(n)}),$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit $\mathrm{d}(f(x), f(y)) = \mathrm{d}(x, y)$.

b) L'injectivité résulte de l'hypothèse (*). Pour montrer la surjectivité de f, nous donnons deux méthodes.

Première méthode. Cette méthode utilise la solution que nous avons donnée à la question a).

Fixons $x \in E$. Si $x_n = f^n(x)$, nous avons vu plus haut qu'il existe une sous-suite $(x_{\psi(n)})$ de (x_n) qui converge vers x. Autrement dit, $\lim_{n\to\infty} f(x_{\psi(n)-1}) = x$, donc $x \in \overline{f(E)}$. Comme E est compact et que f est continue, $f(E)$ est compact donc fermé. Donc $x \in \overline{f(E)} = f(E)$, et ceci étant vrai pour tout $x \in E$, f est surjective.

Seconde méthode. Raisonnons par l'absurde et supposons $f(E) \neq E$. Comme $f(E)$ est fermé (car compact), $E \setminus f(E)$ est ouvert. De plus $E \setminus f(E) \neq \varnothing$ donc il existe une boule ouverte $\mathrm{B}(x, \rho)$ incluse dans $E \setminus f(E)$. Ainsi, pour tout $y \in f(E)$, $\mathrm{d}(x, y) \geq \rho$. Considérons la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, on a

$$\mathrm{d}(f^p(x), f^q(x)) \geq \mathrm{d}(f^{p-q}(x), x) \geq \rho,$$

donc $(f^n(x))$ n'a aucune sous-suite convergente, ce qui est absurde. On a donc $f(E) = E$.

c) L'application f est bijective et continue (car 1-lipschitzienne) sur un compact, donc $f^{-1} : E \to E$ est continue (voir le théorème 14 page 31) et vérifie d'après les hypothèses

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \mathrm{d}(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \geq \mathrm{d}(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = \mathrm{d}(x, y).$$

L'application f^{-1} vérifie donc les hypothèses de la question a), c'est donc une isométrie. On en déduit que f est une isométrie.

EXERCICE 6. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application *injective*. Prouver que f est continue si et seulement si pour tout compact K de E, $f(K)$ est compact. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas f injective ?

Solution. La condition nécessaire est immédiate, c'est du cours !

Passons à la condition suffisante. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers x. Il s'agit de montrer que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. L'ensemble $K = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de E (voir la proposition 12 page 30), donc $K' = f(K)$ est compact. Notons g la restriction de f à K. Comme f est injective, g est une bijection de K sur K'. L'application $g^{-1} : K' \to K$ est continue car pour tout fermé F de K, F est compact donc $(g^{-1})^{-1}(F) = g(F)$ est compact, donc fermé. L'ensemble K' étant compact, $(g^{-1})^{-1} = g$ est continue. En particulier, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$, ce qui s'écrit aussi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, d'où le résultat.

Si f n'est pas injective, le résultat est faux. Par exemple, l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \qquad x \mapsto 1 \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

vérifie $f(K)$ est compact pour tout compact K de $\mathbb{R}$, et pourtant f n'est pas continue.

EXERCICE 7. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$), (E, d) un espace métrique et $f : [a, b] \to E$ une application. On suppose que pour tout $x \in]a, b[$, les limites à gauche $f(x-)$ et à droite $f(x+)$ de f en x existent, et que $f(a+)$ et $f(b-)$ existent.

a) Si $x \in]a, b[$, on note $\omega(f, x) = \max\{\mathrm{d}(f(x-), f(x)), \mathrm{d}(f(x), f(x+))\}$. Soit $\varepsilon > 0$ et

$$A_\varepsilon = \{x \in]a, b[\mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}.$$

Montrer que l'ensemble A_ε est fini.

b) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in]a, b[$ tel que $\omega(f, x) < \varepsilon$. Montrer

$$\exists \alpha > 0, \forall y, z \in]x - \alpha, x + \alpha[\qquad \mathrm{d}(f(y), f(z)) < 2\varepsilon.$$

d) Soit $\varepsilon > 0$ et $]c,d[\subset [a,b]$ tel que $\omega(f,x) < \varepsilon$ sur $]c,d[$. Montrer

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in]c,d[\,, \mathrm{d}(x,y) < \alpha, \quad \mathrm{d}(f(x), f(y)) < 2\varepsilon.$$

Solution. **a)** Raisonnons par l'absurde et supposons A_ε infini. Comme A_ε est inclus dans le compact I, il en existe un point d'accumulation $x \in I$. Ainsi, il existe une suite (x_n) de points distincts de A_ε qui converge vers x.

S'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_n < x$, on peut, quitte à extraire une sous-suite de (x_n), supposer $x_n < x$ pour tout n. On a $x \in]a,b]$ et d'après les hypothèses, f admet une limite à gauche en x. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in]x-\alpha, x[, \quad \mathrm{d}(f(y), f(x-)) < \varepsilon/3. \tag{$*$}$$

Comme (x_n) converge vers x par valeurs inférieures, il existe un entier naturel n, désormais fixé, tel que $x - \alpha < x_n < x$. D'après (*), on a l'inégalité

$$\forall y \in]x-\alpha, x_n[, \quad \mathrm{d}(f(y), f(x_n)) \leq \mathrm{d}(f(y), f(x-)) + \mathrm{d}(f(x-), f(x_n)) < 2\varepsilon/3,$$

et en faisant tendre y vers x_n, on en déduit $\mathrm{d}(f(x_n-), f(x_n)) \leq 2\varepsilon/3$. De même l'inégalité

$$\forall y \in]x_n, x[, \quad \mathrm{d}(f(x_n), f(y)) \leq \mathrm{d}(f(x_n), f(x-)) + \mathrm{d}(f(x-), f(y)) < 2\varepsilon/3,$$

conduit par passage à la limite à $\mathrm{d}(f(x_n), f(x_n+)) \leq 2\varepsilon/3$. On a donc $\omega(f, x_n) \leq 2\varepsilon/3$. Donc $x_n \notin A_\varepsilon$, ce qui est absurde.

Dans le cas où il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_n > x$, on aboutirait de la même manière à une absurdité en utilisant la continuité à droite de f en x.

L'ensemble A_ε est donc fini.

b) La fonction f est discontinue en $x \in]a,b[$ si et seulement si $\omega(f,x) > 0$. L'ensemble D des points de $]a,b[$ où f est discontinue est donc égal à $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$, réunion dénombrable d'ensembles finis, donc D est au plus dénombrable. En ajoutant éventuellement les points a et b, on en déduit que l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a,b]$ est au plus dénombrable.

c) Posons $\eta = \varepsilon - \omega(f,x) > 0$. Comme f est continue à gauche et à droite en x, il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{d}(f(y), f(x-)) < \eta$ pour $y \in]x-\alpha, x[$ et $\mathrm{d}(f(y), f(x+)) < \eta$ pour $y \in]x, x+\alpha[$. On a alors

$$\forall y \in]x-\alpha, x+\alpha[, \qquad \mathrm{d}(f(y), f(x)) < \varepsilon. \tag{$**$}$$

En effet, si $x - \alpha < y < x$ il suffit d'écrire $\mathrm{d}(f(y), f(x)) \leq \mathrm{d}(f(y), f(x-)) + \mathrm{d}(f(x-), f(x)) < \eta + \omega(f,x) = \varepsilon$, et le cas $x < y < x + \alpha$ se traite de la même manière. Lorsque $y = x$, le résultat (**) est évident.

On conclue facilement car d'après (**)

$$\forall y, z \in]x-\alpha, x+\alpha[, \quad \mathrm{d}(f(y), f(z)) \leq \mathrm{d}(f(y), f(x)) + \mathrm{d}(f(x), f(z)) < 2\varepsilon.$$

d) Supposons le résultat faux. Alors il existe une suite (x_n, y_n) de $]c,d[$ telle que $(x_n - y_n)$ tende vers 0 et telle que $\mathrm{d}(f(x_n), f(y_n)) \geq 2\varepsilon$ pour tout n. La suite (x_n) est à valeur dans le compact $[c,d]$, donc on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ donc la limite x appartient à $[c,d]$. Comme $(x_n - y_n)$ tend vers 0, la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge également vers x.

Plusieurs cas se présentent, selon que la limite x est dans l'intérieur de $[c,d]$ ou au bord.

(i) Le cas $x \in]c,d[$ est absurde car $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ tendent vers x et $\mathrm{d}(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \geq 2\varepsilon$ pour tout n, ce qui est absurde d'après le résultat de la question précédente.

(ii) Si $x = c$, alors comme f est continue à droite en c il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{d}(f(y), f(c+)) < \varepsilon$ pour tout $y \in]c, c+\alpha[$. Comme $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent vers c à droite, il existe n tel que $x_{\varphi(n)}$ et $y_{\varphi(n)}$ appartiennent à $]c, c+\alpha[$, donc $\mathrm{d}(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \leq \mathrm{d}(f(x_{\varphi(n)}), f(c+)) + \mathrm{d}(f(c+), f(y_{\varphi(n)})) < 2\varepsilon$, ce qui est absurde car $\mathrm{d}(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \geq 2\varepsilon$.

(iii) Pour le cas $x = d$, on aboutit également à une absurdité en procédant de la même manière, en utilisant la continuité à gauche de f en d.

Ainsi, on a aboutit à une absurdité dans tous les cas, donc le résultat est bien vérifié.

Remarque. Le résultat de cet exercice permet de montrer qu'une fonction f à valeurs dans un e.v.n complet E et vérifiant les hypothèses de l'exercice est une fonction réglée (voir le théorème 4 page 99).

EXERCICE 8. Soit X un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'algèbre des applications continues de X dans $\mathbb{R}$.
a) Soit $\mathfrak{I} \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ un idéal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Montrer

$$\exists s \in X, \forall f \in \mathfrak{I}, \qquad f(s) = 0.$$

b) Caractériser les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ (*i. e.* les idéaux $\mathfrak{I} \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ tels que les seuls idéaux contenant $\mathfrak{I}$ sont $\mathfrak{I}$ et $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$).
c) Déterminer la forme des morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. **a)** Raisonnons par l'absurde. Supposons que

$$\forall s \in X, \exists f_s \in \mathfrak{I}, \qquad f_s(s) \neq 0.$$

Pour tout $s \in X$, comme f_s est continue, il existe un voisinage ouvert Ω_s de s tel que $\forall x \in \Omega_s, f_s(x) \neq 0$.

Les $(\Omega_s)_{s\in X}$ recouvrent le compact X. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $(\Omega_{s_i})_{1\leq i\leq n}$. Comme $\mathfrak{I}$ est un idéal, pour tout i, $f_{s_i}^2 \in \mathfrak{I}$. Or $f_{s_i}^2$ prend des valeurs strictement positives sur Ω_{s_i}. Les $(\Omega_{s_i})_{1\leq i\leq n}$ recouvrant X, la fonction $f = \sum_{i=1}^n f_{s_i}^2$ ne s'annule pas sur X. Comme $\mathfrak{I}$ est un idéal, on a $f \in \mathfrak{I}$, et $1 = (1/f)\cdot f \in \mathfrak{I}$ donc $\mathfrak{I} = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Ceci contredit l'hypothèse $\mathfrak{I} \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Il existe donc $s \in X$ tel que pour tout $f \in \mathfrak{I}$, $f(s) = 0$.

b) Remarquons déjà que pour tout $s \in X$, l'ensemble $\mathfrak{J}_s = \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \mid f(s) = 0\}$ est un idéal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Nous allons montrer que les $\mathfrak{J}_s$ sont les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Pour tout $s \in X$, l'ensemble $\mathfrak{J}_s$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. En effet, $\mathfrak{J}_s \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ et si $\mathfrak{I}$ est un idéal contenant $\mathfrak{J}_s$ et différent de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, alors d'après a), il existe $s' \in X$ tel que $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{J}_{s'}$. On a alors $\mathfrak{J}_s \subset \mathfrak{J}_{s'}$, ce qui n'est possible que si $s = s'$, et donc $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}_s$.

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal maximal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. On a $\mathfrak{I} \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ donc d'après a), il existe $s \in X$ tel que $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{J}_s$. Comme $\mathfrak{I}$ est maximal et que $\mathfrak{J}_s \neq \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, on a $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}_s$.

c) Soit φ un morphisme d'algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Supposons φ non nulle. L'ensemble $\operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, différent de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ car $\varphi \neq 0$. D'après a), il existe $s \in X$ tel que $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathfrak{J}_s$. La forme linéaire $f \mapsto f(s)$ s'annule donc sur l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$, et l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur un hyperplan formant une droite du dual (voir le tome d'algèbre), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(s) = \lambda\varphi(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ tel que $f(s) \neq 0$. On a

$$\lambda(f^2)(s) = \lambda^2\varphi(f^2) = \lambda^2\varphi(f)^2 = f^2(s),$$

donc $\lambda = 1$. Finalement $\varphi(f) = f(s)$ pour tout f.

En résumé, les morphismes d'algèbre de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ sont l'application nulle et les morphismes de la forme $f \mapsto f(s)$, où $s \in X$.

4. Espaces connexes

4.1. Définitions

PROPOSITION 1. *Soit (E,d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.

(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.

(iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons $E = F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Les ouverts $O_1 = E \setminus F_1$ et $O_2 = E \setminus F_2$ vérifient $O_1 \cup O_2 = \varnothing$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$, donc d'après (i), $O_1 = \varnothing$ ou $O_2 = \varnothing$, donc $F_1 = E$ ou $F_2 = E$, et comme $F_1 \cup F_2$ est une partition de E, $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit A une partie ouverte et fermée de E. Alors l'ensemble $B = E \setminus A$ est ouvert et fermé, et comme $E = A \cup B$ avec $A \cap B = \varnothing$, on en déduit d'après (ii) que $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, c'est-à-dire $A = \varnothing$ ou $A = E$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints de E. L'ensemble O_1 est fermé car $O_1 = E \setminus O_2$, donc O_1, ouvert et fermé de E, vérifie $O_1 = \varnothing$ ou $O_1 = E$, d'où (i). □

Définition 1. Un espace métrique vérifiant l'une des assertions de la proposition précédente est dit *connexe*.

Remarque 1. La notion de connexité est une notion topologique. Tous les résultats de cette partie restent vrais dans un espace topologique général (à l'exception du théorème 5).

Parties connexes. Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On munit A de la distance d induite sur A. On veut savoir à quelle condition A est connexe. Les propriétés de la topologie induite sur A entraînent facilement le résultat qui suit.

Proposition 2. *La partie A de E est connexe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée.*

(i) Si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$, alors

$$(A \cap O_1 = \varnothing \quad et \quad A \subset O_2) \quad ou \quad (A \cap O_2 = \varnothing \quad et \quad A \subset O_1).$$

(ii) Si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $A \cap F_1 \cap F_2 = \varnothing$, alors

$$(A \cap F_1 = \varnothing \quad et \quad A \subset F_2) \quad ou \quad (A \cap F_2 = \varnothing \quad et \quad A \subset F_1).$$

Exemple 1. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ car si on se donne $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

4.2. Propriétés

Théorème 1. *Soit $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ une application continue. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.*

Démonstration. Soit B une partie ouverte et fermée de $f(E)$. Il existe un ouvert O et un fermé F de E' tels que $B = O \cap f(E) = F \cap f(E)$. On a alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(O) = f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(B)$ est fermé et ouvert dans E, et E étant connexe, $f^{-1}(B) = \varnothing$ ou $f^{-1}(B) = E$, c'est-à-dire $B = \varnothing$ ou $B = f(E)$. □

Caractérisation des connexes. On note $D = \{0, 1\}$ muni de la distance discrète δ ($\delta(0,0) = \delta(1,1) = 0$ et $\delta(0,1) = \delta(1,0) = 1$). L'espace métrique (D, δ) n'est pas connexe puisque $D = \{0\} \cup \{1\}$ est réunion de deux fermés disjoints. Grâce à cet espace métrique, nous allons donner une caractérisation commode des connexes.

→ Proposition 3. *Un espace métrique (E, d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to D$ est constante.*

Démonstration. Condition nécessaire. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe, donc constante car D n'est pas connexe et a deux éléments.

Condition suffisante. Si E n'est pas connexe, on peut écrire $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts non vides disjoints de E. Soit $f : E \to D$ une application définie par $f(x) = 0$ si $x \in O_1$,

$f(x) = 1$ si $x \in O_2$. Elle est continue (l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert), ce qui est contraire aux hypothèses puisqu'elle est non constante. Finalement, E est connexe. □

PROPOSITION 4. *Soit A une partie connexe d'un espace métrique (E, d). Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Démonstration. Soit $f : B \to D = \{0, 1\}$ une application continue. Comme A est connexe, $f_{|A}$ est constante, par exemple $f_{|A} = 0$. Soit $x_0 \in B$. Il existe un voisinage V de x_0 dans B tel que

$$\forall x \in V, \qquad \delta(f(x), f(x_0)) < \frac{1}{2},$$

ce qui montre que pour tout $x \in V$, $f(x) = f(x_0)$. Or $B \subset \overline{A}$, donc $V \cap A \neq \varnothing$. Si on choisit $x_1 \in V \cap A$, on a $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Ainsi, $f = 0$, d'où le résultat d'après la proposition 3. □

Dans le cas général, une réunion de connexes n'est pas connexe (par exemple, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont connexes dans $\mathbb{R}$, mais $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$ n'est pas connexe). On a cependant le résultat qui suit.

PROPOSITION 5. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E, d) telle que*

$$\exists i_0 \in I, \forall i \in I, \qquad C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing.$$

Alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Démonstration. Soit $f : \cup_{i \in I} C_i \to D = \{0, 1\}$ une application continue. Pour tout i, C_i est connexe donc $f_{|C_i}$ est constante. En particulier, $f_{|C_{i_0}}$ est connexe, par exemple $f_{|C_{i_0}} = 0$. Soit $x \in \cup_{i \in I} C_i$ et soit $i \in I$ tel que $x \in C_i$. Comme $C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing$, on peut trouver $x_0 \in C_i \cap C_{i_0}$. On a alors $f(x) = f(x_0) = 0$ car $f_{|C_i}$ est constante. Ainsi, f est constante sur $\cup_{i \in I} C_i$, d'où le résultat d'après la proposition 3. □

Remarque 2. Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de connexes telle que $\cap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$, alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe (si $x \in \cap_{i \in I} C_i$, tous ces connexes ont une intersection non vide avec le connexe $\{x\}$).

Dans le cas dénombrable, on a également le résultat qui suit.

PROPOSITION 6. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes (avec $I = \{0, 1, \ldots, p\}$ ou $I = \mathbb{N}$) telle que pour tout $i \in I$, $i \neq 0$, $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$. Alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f : \cup_{i \in I} C_i \to D = \{0, 1\}$ une application continue. Pour tout i, $f_{|C_i}$ est constante, et comme $C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$ pour $i \neq 0$, on a $f_{|C_{i-1}} = f_{|C_i}$ pour tout $i \neq 0$. En procédant par récurrence sur i, on en déduit que $f_{|C_i} = f_{|C_0}$ pour tout i. Ainsi, f est constante, d'où le résultat. □

PROPOSITION 7. *Soient $(E_1, \mathrm{d}_1), \ldots, (E_n, \mathrm{d}_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout i.*

Démonstration. Condition nécessaire. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et soit $f : E_i \to D = \{0, 1\}$ une application continue. La projection p_i de E sur E_i étant continue, l'application $f \circ p_i : E \to D$ est continue, et comme E est connexe, $f \circ p_i$ est constante. Donc f est constante et E_i est connexe.

Condition suffisante. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in E$ et une application continue $f : E \to D$. L'application $f_1 : E_1 \to D \quad x \mapsto f(x, x_2, \ldots, x_n)$ est continue, donc constante car E_1 est connexe. En particulier, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, x_2, \ldots, x_n)$. En itérant le procédé sur chacun des connexes $E_2, \ldots, E_n$, on obtient $f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$. L'application f est donc constante, donc E est connexe d'après la proposition 3. □