MPSI

Thierry Finot
Elsa Choubert
Sébastien Fayolle
David Legrand
Vincent Parmentier
Nicolas Tancrez

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

PHYSIQUE CHIMIE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

6e édition
+ exos-minutes

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Physique-Chimie MPSI

6e édition

ouvrage coordonné par

Thierry FINOT
professeur au lycée Lavoisier (Paris)

Elsa CHOUBERT
professeure au lycée Stanislas (Cannes)

Vincent PARMENTIER
professeur au lycée Pothier (Orléans)

Sébastien FAYOLLE
professeur au lycée Gustave Eiffel (Bordeaux)

Nicolas TANCREZ
professeur au lycée Saint Louis (Paris)

David LEGRAND
professeur au lycée Sainte Marie (Caen)

avec la contribution de

Camille BONOMELLI
chercheuse à l'université d'Oxford

Vincent FRATICELLI
professeur au lycée Pothier (Orléans)

Laura DAUDIER
professeure au lycée François Rabelais (Paris)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Un étudiant n'est pas un sac que l'on remplit mais une bougie que l'on enflamme.

Vladimir Arnold, mathématicien russe.

Les notices culturelles « Un scientifique » et « Un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-105232
Dépôt légal : juillet 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Du nouveau dans cette édition

Une note **Apprendre efficacement la physique et la chimie**, en début d'ouvrage, vous guide dans l'organisation de votre travail.

Dans chaque chapitre, quelques **exercices en moins de 5 minutes**, portant chacun sur un unique point du chapitre, vous permettent de tester vos réflexes en application directe des cours.

Ainsi l'ouvrage de physique-chimie comme ceux de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Apprendre efficacement la physique et la chimie V

1. Bases de l'optique géométrique 1
2. Lentilles minces 33
3. Lois de l'électrocinétique – Régime continu 73
4. Circuit linéaire du premier ordre 103
5. Oscillateur électrique en régime libre 139
6. Régime sinusoïdal forcé 171
7. Filtrage linéaire 207
8. Propagation d'un signal 251
9. Cinématique du point 281
10. Principes de la dynamique 313
11. Énergie mécanique 359
12. Mouvement dans un champ électrique ou magnétique 399
13. État et évolution d'un système chimique 431
14. Cinétique chimique 463
15. Molécules et ions 505
16. Moment cinétique – Force centrale 537
17. Mouvement d'un solide 579
18. Description d'un système thermodynamique 609
19. Premier principe de la thermodynamique 637
20. Deuxième principe de la thermodynamique 665
21. Machines thermiques 687
22. Champ magnétique 715
23. Induction électromagnétique 749
24. Introduction à la physique quantique 785
25. Solides cristallins 813
26. Réactions acido-basiques 845
27. Réactions de dissolution ou de précipitation 885
28. Réactions d'oxydo-réduction 929
29. Diagrammes potentiel-pH 979

Index 1021

Apprendre efficacement la physique et la chimie

Bienvenue en prépa !

On vous a prédit l'enfer, des professeurs impitoyables, des camarades inabordables, du travail interminable ? Tout cela est faux et ridicule… sauf en ce qui concerne le travail ! Eh oui, ce seront deux années riches et intenses, pleines d'émotions diverses, dont en premier lieu le **plaisir d'apprendre**. Par rapport aux années précédentes, la densité des connaissances et compétences à acquérir augmente fortement ; une **bonne organisation** est donc nécessaire pour en assimiler le plus possible. Ces quelques conseils concernent plus particulièrement la physique et la chimie, mais beaucoup peuvent s'étendre aux autres matières.

Tirez profit des séances de cours

Les séances de cours de votre professeur(e) seront vos premiers contacts avec les nouveautés à apprendre, et aussi les meilleurs moments pour les assimiler, grâce notamment à leur **interactivité** : vous avez en face de vous une personne à qui poser des questions, profitez-en (avec modération !), et à l'inverse, osez proposer des réponses aux questions posées. N'ayez pas peur que votre question ou réponse soit stupide : en sciences, les erreurs elles-mêmes sont intéressantes, et à votre niveau, de nombreuses erreurs sont classiques et donneront l'occasion à votre professeur(e) de vous expliquer certains points délicats.

> *Ce qui est inefficace en revanche, c'est de passer le cours à recopier ce qui est écrit au tableau, sans rien y comprendre parce qu'on discute d'autre chose…*

Revoyez votre cours et ordonnez vos connaissances

L'attention en classe ne suffit plus pour tout retenir : vous devez **revoir le cours** chez vous. Le résumé de cours que vous trouverez dans chaque chapitre de cet ouvrage est là pour vous aider à assimiler ces contenus, qui peuvent être formulés ou ordonnés d'une façon différente de celle de votre cours. Vu sous différents angles, un objet apparaît dans toutes ses dimensions !
De plus, devant le foisonnement d'informations, vous devrez **mettre de l'ordre dans vos idées**. En apprenant des définitions et des formules, cherchez bien à comprendre le lien entre elles : deux formules décrivent-elles deux hypothèses alternatives, ou bien celle-ci est-elle un cas particulier de celle-là, ou encore l'une d'elles est-elle l'analogue de l'autre dans une situation différente ? Retenez bien également les **conditions d'application** précises de chaque formule.

Affinez votre compréhension avec les travaux pratiques

Les séances de TP font partie intégrante de l'apprentissage de nouvelles notions physiques ou chimiques, ne les négligez pas ! En plus de développer des compétences spécifiques, pouvant faire l'objet d'épreuves de concours dédiées, elles sont l'occasion d'observer concrètement et de mesurer des phénomènes et des objets qui pouvaient sembler abstraits dans le cours. Certains points de cours ou exercices de cet ouvrage font référence aux outils et techniques de TP.

Entraînez-vous sur les exercices

On vous a donné beaucoup d'exercices à résoudre, et vous en trouverez encore plus dans cet ouvrage, comment gérer cette quantité ? Ce qui est important est de **chercher**, même si on ne trouve pas toujours ! Pour chaque type de question, cherchez tout d'abord quels points du cours permettent de l'aborder, et quelles méthodes sont utiles, puis mettez en œuvre la démarche détaillée jusqu'au bout au moins une fois, pour vérifier que vous identifiez tous les éléments importants. N'oubliez pas de **valider** vos résultats, en évaluant leur pertinence en fonction du contexte.

> *Ce qui ne fonctionne pas du tout, c'est de lire simplement des corrigés d'exercices que l'on n'a pas cherchés au préalable. C'est comme si vous vouliez apprendre un sport, ou un instrument de musique, en regardant simplement d'autres le pratiquer, sans jamais essayer vous-même !*

Les séances de travaux dirigés doivent être l'occasion de confronter vos tentatives de résolution avec celles de vos camarades, de comprendre (ou d'expliquer aux autres) pourquoi telle méthode est judicieuse et telle autre n'est pas adaptée, et de corriger vos erreurs. Là aussi, soyez un élément actif du groupe !

> *Si vous vous contentez de recopier passivement le corrigé des exercices laborieusement écrit au tableau par vos camarades, vous perdez votre temps !*

Mettez à profit les évaluations

Les différentes évaluations (colles, devoirs écrits) doivent vous aider à **mesurer vos acquis** en termes de connaissances et de compétences, et à **identifier vos points faibles**, sur lesquels vous pourrez travailler plus spécifiquement. Elles sont des outils dans votre formation, mais n'en constituent pas le but, qui est tout d'abord de vous amener à la réussite aux concours, et à plus long terme, de faire de vous des scientifiques !

Bon courage !

Ayez confiance en vous, car vous n'êtes pas là par hasard, vous avez un potentiel à exploiter. Et ayez confiance dans la qualité de votre formation en classe préparatoire, qui est massivement plébiscitée par les personnes l'ayant suivie avant vous.
Nous attendons votre contribution au futur de l'humanité !

Chapitre 1

Bases de l'optique géométrique

UN SCIENTIFIQUE



Willebrord Snell (1580-1626) est un mathématicien et physicien hollandais. Enfant prodige, il acquiert bientôt une immense culture dans le domaine scientifique. Il rencontre les plus grands savants de son époque et se lance dans des recherches dans de nombreux domaines : astronomie, mesure de la Terre, approximation du nombre π. En optique, il s'intéresse aux miroirs concaves et convexes. Il énonce la loi de réfraction attribuée en France à Descartes.

Un peu d'histoire

Qui a découvert la loi de réfraction de la lumière ? En 984, le mathématicien arabe Ibn Sahl explique, schémas à l'appui, le lien entre l'angle d'incidence et celui de réfraction d'un rayon lumineux. Ses travaux restent totalement inconnus en Occident. Thomas Harriot découvre cette loi en 1602 mais il ne fait aucune publication. Elle est à nouveau énoncée en 1621 par le mathématicien hollandais Willebrord Snell qui, lui non plus, n'en fait pas état publiquement. En 1637 René Descartes publie le *Discours de la méthode* dans lequel il énonce les principes de la rationalité scientifique. Il le fait suivre de trois appendices ; le premier est un manuel d'optique dans lequel il énonce la loi de réfraction, sans connaître les travaux de ses prédécesseurs. Quelques années plus tard, Pierre de Fermat justifie cette loi par le principe du temps minimum de parcours.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les définitions concernant la lumière, sa propagation et ses sources
- Le modèle de l'optique géométrique et ses limites
- Les lois de Snell–Descartes pour la réflexion et la réfraction
- Les définitions concernant les systèmes optiques et la formation d'images
- Les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences
- Le principe de fonctionnement d'une fibre optique

Ce qu'il faut savoir faire

- Relier la longueur d'onde dans le vide, celle dans un autre milieu et la couleur
- Utiliser les lois de Snell–Descartes pour déterminer des rayons réfléchis ou réfractés
- Étudier les cas de réfraction limite et réflexion totale
- Calculer des angles et des distances avec des formules géométriques
- Construire l'image d'un objet par un miroir plan et identifier sa nature réelle ou virtuelle
- Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique

■■ Résumé de cours

■ Propagation de la lumière

❑ Nature de la lumière

– Selon le **modèle ondulatoire** de la lumière, il s'agit d'une onde électromagnétique, c'est-à-dire d'une propagation de variations périodiques des champs électrique et magnétique, dans un milieu matériel ou dans le vide.

Une lumière **monochromatique** est décrite par une fonction sinusoïdale de fréquence f. La lumière visible correspond à l'intervalle $4 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} < f < 8 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$ environ. Les autres fréquences correspondent à d'autres types d'ondes électromagnétiques (voir chapitre **8**).

– Un autre modèle, dit **corpusculaire**, décrit la lumière (et les autres ondes électromagnétiques) comme un flux de particules appelés **photons** (voir chapitre **24**).

❑ Indice et longueur d'onde

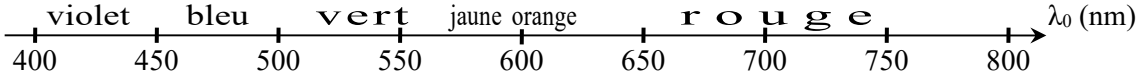
– La **célérité** (vitesse de propagation) de la lumière dans le vide est $c = 299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Sa célérité dans un milieu transparent quelconque est $\boxed{v = \frac{c}{n}}$ où n est l'**indice de réfraction** ($n \geq 1$), caractéristique du milieu et dépendant de la fréquence (donc de la longueur d'onde).

n = 1,0003 pour l'air (conditions usuelles), n = 1,33 pour l'eau, n = 1,5 à 1,8 pour les verres.

– Une lumière monochromatique a une fréquence f déterminée par l'émetteur, et une longueur d'onde λ telle que $\lambda = \frac{v}{f}$. La longueur d'onde dans le vide est $\lambda_0 = \frac{c}{f}$, donc $\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$.

– Échelle des couleurs :



❑ Approximation de l'optique géométrique

L'optique géométrique modélise la lumière comme un ensemble de **rayons lumineux** : chaque rayon est une courbe décrite par la lumière pour aller d'un point à un autre. Les rayons lumineux sont *indépendants* les uns des autres ; ceci suppose qu'il n'y a pas d'interférences (toujours vrai en pratique). Dans un milieu transparent homogène et isotrope (seul cas envisagé ici), ils sont *rectilignes* ; ceci suppose qu'on évite la diffraction, tous les systèmes étant suffisamment larges.

■ Sources de lumière

❑ Types de sources

– Les **sources de lumière blanche** (lampes à incandescence, à LED blanche…) ont un spectre *continu* (constitué de toutes les fréquences dans l'intervalle du visible, et même au-delà).

– Les **lampes spectrales** (notamment à vapeur métallique : mercure, sodium…) ont un spectre caractéristique de l'élément chimique, qui peut être considéré comme *discret* (constitué seulement de quelques fréquences distinctes).
– Les **lasers** émettent une lumière qui peut être considérée comme monochromatique.

❑ Modèle de la source ponctuelle monochromatique

Une source de lumière est en général étendue (elle présente une certaine surface). Mais elle peut être *modélisée* comme un ensemble de **sources ponctuelles**.
De plus on se limitera, si nécessaire, à des sources ponctuelles monochromatiques.

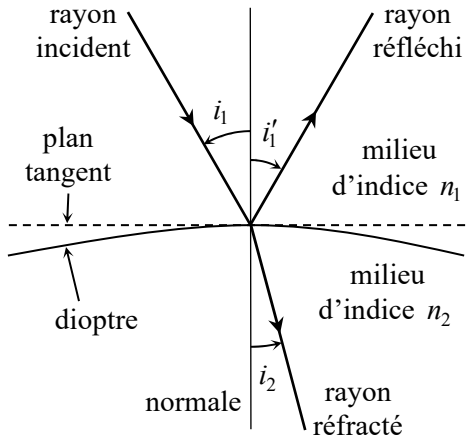
■ Réflexion et réfraction

❑ Description

Lorsqu'un rayon lumineux, dit **incident**, arrive sur un **dioptre** (interface entre deux milieux d'indices différents), il donne naissance en général à un rayon **réfléchi** (dans le milieu initial) et à un rayon **transmis** ou **réfracté** (dans le second milieu).
À partir du point d'intersection entre le rayon incident et le dioptre, on définit la normale, droite orthogonale au dioptre. Cette normale et le rayon incident définissent le **plan d'incidence**.

❑ Lois de Snell–Descartes

1. Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.
2. L'angle i_1' de réflexion est : $i_1' = -i_1$ (ou bien $i_1' = i_1$ avec des angles non orientés).
3. L'angle i_2 de réfraction est lié à l'angle i_1 d'incidence par : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.



Les expressions avec des angles orientés montrent que le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont de l'autre côté de la normale, par rapport au rayon incident.

Ces lois ont pour conséquence la **loi de retour inverse de la lumière** : le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B est le même que celui suivi pour aller de B à A.

Remarques
– Lorsque le rayon réfracté est présent, on néglige souvent le rayon réfléchi.
– Si la surface est un miroir, il n'y a pas de rayon réfracté.

❑ Réfraction limite et réflexion totale

– Si $n_2 > n_1$, il y a toujours un rayon réfracté (en plus du rayon réfléchi).

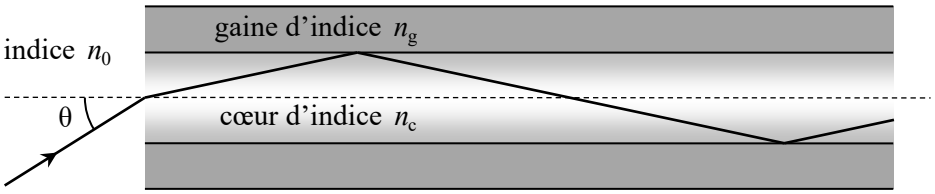
– Si $n_2 < n_1$, le rayon réfracté n'existe que lorsque l'angle i_1 est inférieur à une valeur limite, notée i_{lim} : celle-ci correspond au cas où $i_2 = \dfrac{\pi}{2}$, soit $\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)}$.

Lorsque $i_1 > i_{\text{lim}}$, il n'y a pas de réfraction, il y a donc **réflexion totale**.

⇨ **Méthode 1.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite**

❑ Application : fibre optique

Une application du phénomène de réflexion totale est la **fibre optique à saut d'indice** : un fil cylindrique transparent constitué d'un cœur d'indice n_c entouré d'une gaine d'indice $n_g < n_c$.



– Tout rayon pénétrant dans la fibre avec un angle $\theta < \theta_a$ sera guidé par réflexion interne : l'angle maximal θ_a caractérise le **cône d'acceptance** de la fibre. Son **ouverture numérique** est $o_n = n_0 \sin\theta_a$ où n_0 est l'indice du milieu extérieur.

Le calcul donne $\theta_a = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_0}\right)$ d'où $o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

– Lors du guidage d'un faisceau lumineux dans une fibre optique de longueur donnée, tous les rayons n'ont pas la même durée de trajet : on appelle **dispersion intermodale** la différence de temps $\Delta\tau$ entre les rayons les plus lents et les rayons les plus rapides. Pour une bonne transmission de l'information, $\Delta\tau$ ne doit pas être trop élevée.

On trouve $\Delta\tau = \dfrac{L\, n_c (n_c - n_g)}{c\, n_g}$ pour une fibre de longueur L.

⇨ **Méthode 1.2. Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique**

■ Formation d'images par un système optique

❑ Système optique

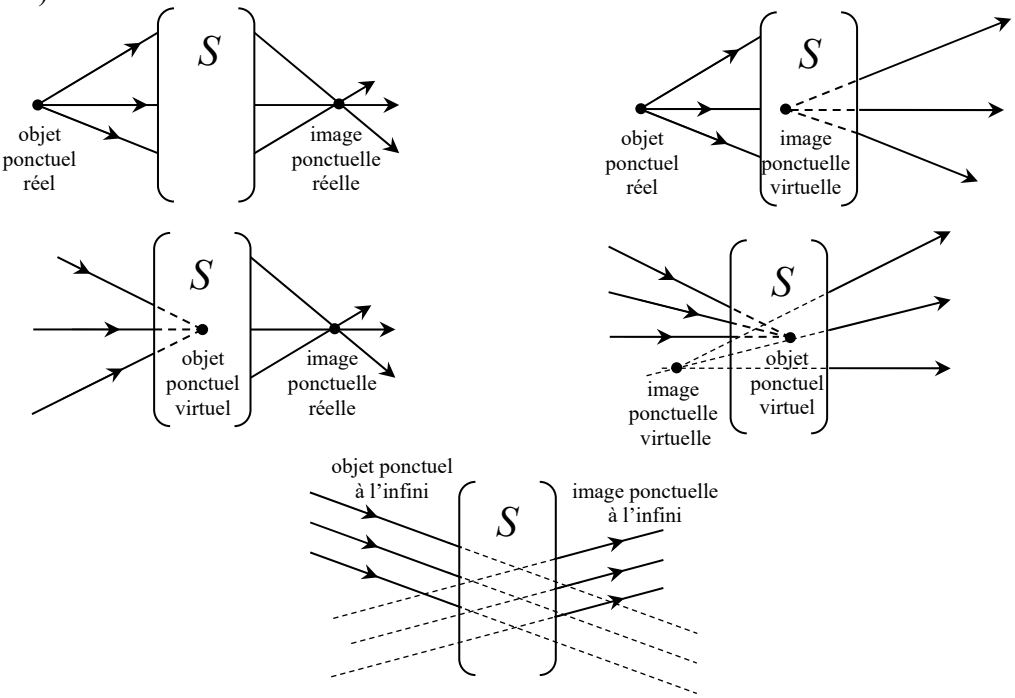
Un **système optique** est un ensemble de dioptres et/ou de miroirs, qui modifie la trajectoire des rayons lumineux. Son rôle est de donner une image d'un objet.

❑ Stigmatisme, objets et images

Une intersection d'un grand nombre de rayons incidents, ou de leurs prolongements, est appelée **point objet (**ou **objet ponctuel**). Il est **réel** si les rayons sont vraiment issus de ce point, et

virtuel si seuls les *prolongements* des rayons convergent vers ce point. Des rayons incidents parallèles entre eux définissent un objet **à l'infini** (cas limite d'un objet réel ou virtuel).

Après la traversée d'un système optique, on peut envisager deux cas :
– soit les rayons émergents correspondant aux rayons issus de chaque point objet A convergent vers un point A' ou semblent provenir d'un point A', on dit alors que le système est **stigmatique** et A' est appelé **point image** (ou **image ponctuelle**) de A ;
– soit ces rayons émergent de façon désordonnée, et le système n'est pas stigmatique.
Pour un système stigmatique, l'image est **réelle** si les rayons convergent vraiment vers A', et **virtuelle** s'ils semblent provenir de A' (leurs prolongements se coupant en A'). Enfin l'image est **à l'infini** si les rayons émergents sont parallèles entre eux (cas limite d'une image réelle ou virtuelle).

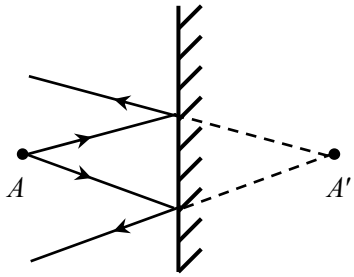


Un objet réel se trouve donc du côté de la lumière incidente, avant la face d'entrée du système, contrairement à un objet virtuel. Une image réelle se trouve du côté de la lumière émergente, après la face de sortie du système, contrairement à une image virtuelle.
Un objet quelconque (étendu) est un ensemble de points objets, une image quelconque est un ensemble de points images.

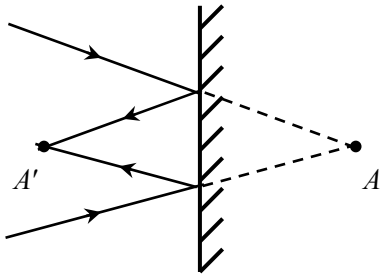
⇨ **Méthode 1.3. Calculer des distances à partir des angles**

❑ Exemple du miroir plan

Le miroir plan est un exemple simple de système optique.
L'image d'un point objet A par un miroir plan est un point image A' symétrique de A par rapport au miroir. Si A est réel, A' est virtuelle ; si A est virtuel, A' est réelle.



objet réel, image virtuelle



objet virtuel, image réelle

⇨ **Méthode 1.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan**

❑ Systèmes centrés

Définition

Un système optique est **centré** s'il possède un axe de symétrie de révolution, appelé **axe optique**. Un rayon incident confondu avec cet axe ne sera donc pas dévié par le système.
De plus, d'après la première loi de Snell–Descartes, un rayon incident contenu dans un plan méridien (contenant l'axe) sera ensuite réfracté et/ou réfléchi dans ce plan.

Aplanétisme

Un système centré sera utilisable comme instrument s'il possède la propriété d'**aplanétisme** : l'image d'un objet plan orthogonal à l'axe optique est également plane et orthogonale à l'axe.

Conditions de Gauss

Aucun système optique, excepté le miroir plan, n'est rigoureusement stigmatique ; cependant, les grains d'un détecteur (cellules de la rétine, d'une plaque numérique…) ne sont pas ponctuels mais ont eux-mêmes une certaine largeur, donc un stigmatisme approché est suffisant.
Pour les systèmes optiques centrés, on peut obtenir un stigmatisme approché en ne laissant pénétrer dans le système que les rayons **paraxiaux**, c'est-à-dire rencontrant le système près de l'axe optique et peu inclinés par rapport à celui-ci. Ce sont les **conditions de Gauss**, qui se réalisent pratiquement à l'aide d'un diaphragme et en observant des objets petits et/ou éloignés.
Dans ces conditions, les systèmes optiques centrés sont aplanétiques.

Foyers et plans focaux

Les systèmes optiques centrés, dans les conditions de Gauss, possèdent deux points particuliers :
– le **foyer principal objet** F dont l'image par le système est à l'infini sur l'axe ;
– le **foyer principal image** F', image d'un point objet situé sur l'axe et à l'infini.
Si ces deux points sont à l'infini, le système est dit **afocal** (c'est le cas du miroir plan).

Le plan passant par F (resp. F') et orthogonal à l'axe est le **plan focal objet** (resp. **image**).

– D'après la propriété d'aplanétisme, en dehors de F', tout point du plan focal image, appelé **foyer image secondaire**, est l'image d'un point objet situé à l'infini mais hors de l'axe.
– De même, en dehors de F, tout point du plan focal objet, appelé **foyer objet secondaire**, a son image à l'infini mais hors de l'axe.

■ Comment utiliser les lois de Snell–Descartes ?

❑ Méthode 1.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite

– La loi de la réfraction donne $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1$, d'où $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)$.

– Le rayon réfracté n'existe que si on trouve $\sin i_2 < 1$, ce qui équivaut à $\frac{n_1}{n_2}\sin i_1 < 1$ ou encore $\sin i_1 < \frac{n_2}{n_1}$. Cette condition est toujours vérifiée si $n_2 > n_1$; mais si $n_2 < n_1$ alors l'angle incident i_1 ne doit pas dépasser la valeur limite $i_{\text{lim}} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$ pour que le rayon réfracté existe.

⇨ Exo minute 1.B, Exercices 1.3 à 1.5, 1.7 à 1.12, 1.14

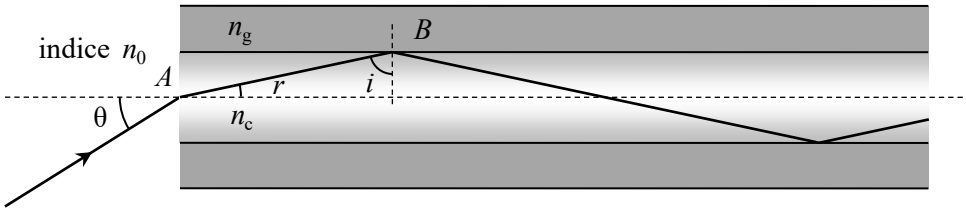
Exemple : un rayon lumineux passe de l'eau ($n_1 = 1{,}33$) vers l'air ($n_2 = 1{,}00$). Le rayon incident forme un angle $i_1 = 30{,}0°$ avec la normale au dioptre au point d'intersection avec le dioptre. Le rayon réfracté formera avec cette même normale un angle $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right) = 41{,}7°$.

L'angle limite vaut $i_{\text{lim}} = \arcsin\frac{n_2}{n_1} = 48{,}8°$. Les rayons ayant un angle incident supérieur à cette valeur ne donnent pas naissance à un rayon réfracté : dans ce cas, il y a seulement un rayon réfléchi et le dioptre se comporte comme un miroir.

❑ Méthode 1.2. Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique

– Après avoir défini les trois angles qui interviennent dans les calculs, on écrit la condition de réflexion totale sur le dioptre entre le cœur et la gaine, et la loi de la réfraction au point d'entrée dans la fibre (dioptre entre l'extérieur et le cœur).
– On relie géométriquement deux de ces angles, et la combinaison de toutes ces relations fait apparaître l'inégalité cherchée sur l'angle d'entrée.
– On utilise ensuite la définition de l'indice pour calculer les temps de parcours des deux rayons extrêmes, dont la différence est la dispersion intermodale.

⇨ Exercice 1.14



– Au point B, comme $n_c > n_g$, la condition de réflexion totale s'écrit : $\sin i > \sin i_{lim} = \dfrac{n_g}{n_c}$ (1).

Au point A, la loi de Snell–Descartes s'écrit : $n_0 \sin\theta = n_c \sin r$ (2).

Or $r = \dfrac{\pi}{2} - i$ (angles complémentaires), donc $\sin r = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - i\right) = \cos i$. Sachant que $\sin^2 i + \cos^2 i = 1$, la relation (1) devient : $\sqrt{1-\cos^2 i} > \dfrac{n_g}{n_c}$ d'où $\cos^2 i < 1 - \dfrac{n_g^2}{n_c^2} = \dfrac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}$.

Finalement : (2) $\Leftrightarrow n_0 \sin\theta = n_c \cos i < n_c \sqrt{\dfrac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} = n_0 \sin\theta_a$

soit $\boxed{\theta_a = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_0}\right)}$. L'ouverture numérique est donc : $\boxed{o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$.

– La durée de parcours d'une distance d, à la célérité v, est $\tau = \dfrac{d}{v}$. Or $v = \dfrac{c}{n_c}$, et pour le rayon dessiné, $d = \dfrac{L}{\cos r}$ où L est la longueur de la fibre, donc $\tau = \dfrac{L n_c}{c \cos r}$. Le rayon le plus rapide est celui qui parcourt le trajet le plus court, obtenu pour $\theta = 0$ donc $r = 0$ et $\cos r = 1$: $\tau_{min} = \dfrac{L n_c}{c}$.

Le rayon le plus lent correspond à $\theta = \theta_a$ et à l'angle $i = i_{lim}$ correspondant à la réflexion limite en B, sachant que $\sin i_{lim} = \dfrac{n_g}{n_c} = \cos r_{lim}$. Donc $\tau_{min} = \dfrac{L n_c^2}{c n_g}$.

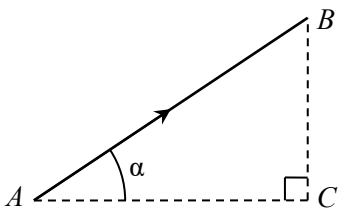
On en déduit : $\boxed{\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min} = \dfrac{L n_c (n_c - n_g)}{c n_g}}$.

■ Comment obtenir les relations géométriques cherchées ?

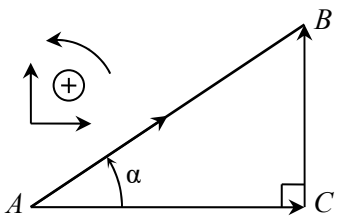
❑ Méthode 1.3. Calculer des distances à partir des angles

Les lois de Snell–Descartes ne donnent que des relations entre des angles. Pour déterminer des distances ou des mesures algébriques, on combine ces lois avec des relations de trigonométrie, notamment dans des triangles rectangles.

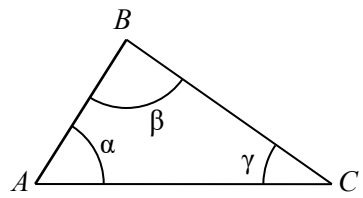
⇨ **Exercices 1.10 à 1.12, 1.14**



Dans ce triangle rectangle on peut écrire : $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, $\tan\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.



La formule de la tangente peut aussi s'écrire avec un angle orienté et des mesures algébriques : $\tan\alpha = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$.



Enfin on peut écrire la formule des sinus pour un triangle quelconque :

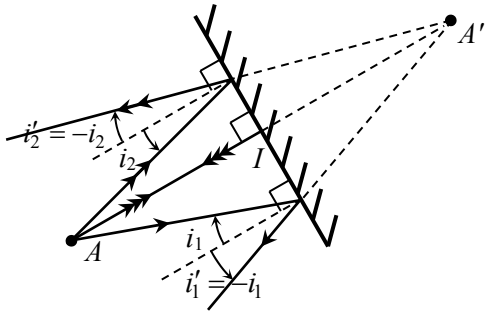
$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma}.$$

■ Comment déterminer l'image d'un objet ponctuel par un système optique ?

❑ Méthode 1.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan

Tracer au moins trois rayons incidents se coupant en un même point *A*, réel ou virtuel. Construire les rayons réfléchis selon les lois de Snell–Descartes. On constate que ces rayons, ou leurs prolongements, se coupent en un même point *A′*, qui est donc l'image de *A*. Et les différents triangles symétriques montrent que *A′* est le symétrique de *A* par rapport au plan du miroir.

⇨ **Exercice 1.13**



Pour un point objet *A* réel (faisceau incident divergent), comme ci-dessus, l'image *A′* est l'intersection des *prolongements* des rayons réfléchis (faisceau réfléchi divergent également), donc *A′* est un point image *virtuel*. Effectivement, quand on se regarde dans une glace, notre image est virtuelle : si on mettait un écran là où semble se trouver notre image, c'est-à-dire derrière le mur où est fixé le miroir, on ne verrait rien sur l'écran !

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	La lumière se propage plus vite dans l'eau $(n_{\text{eau}} = 1,3)$ que dans l'air $(n_{\text{air}} = 1,0)$.	☐	☐
2.	L'indice d'un milieu homogène transparent et isotrope dépend de la fréquence de la lumière qui le traverse.	☐	☐
3.	La lumière solaire peut être considérée comme monochromatique.	☐	☐
4.	La lumière d'un laser peut être considérée comme monochromatique.	☐	☐
5.	Lors du passage d'un milieu d'indice faible à un milieu d'indice plus élevé, le rayon se rapproche de la normale.	☐	☐
6.	On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu peu réfringent à un milieu plus réfringent.	☐	☐
7.	Lors du phénomène de réflexion, la direction du rayon réfléchi dépend de la longueur d'onde de la lumière.	☐	☐
8.	Lors du phénomène de réfraction, la direction du rayon réfracté dépend de la longueur d'onde de la lumière.	☐	☐
9.	Un système optique centré ne dévie pas les rayons incidents parallèles à son axe optique.	☐	☐
10.	Le foyer principal image F' d'un système optique centré est l'image par ce système du foyer principal objet F.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Exercices en moins de 5 minutes ⏱

❑ Exo minute 1.A. Fréquence et longueur d'onde

La lumière visible possède des longueurs d'onde dans le vide comprises entre 0,40 et 0,80 µm.

1. À quel intervalle de fréquences cela correspond-il ?

2. Que deviennent ces longueurs d'onde :

a) dans l'eau, d'indice $n = 1{,}3$? **b)** dans un verre, d'indice $n' = 1{,}5$?

Donnée : $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

❑ Exo minute 1.B. Réfraction sur un dioptre

On considère deux milieux transparents homogènes et isotropes d'indices respectifs $n_1 = 1{,}310$ et $n_2 = 1{,}512$, séparés par un dioptre plan. Un rayon lumineux issu du milieu 1 passe dans le milieu 2 ; son angle d'incidence sur le dioptre est $i_1 = 32° \, 12'$ (32 degrés et 12 minutes).

Calculer, en degrés décimaux puis en degrés et minutes, l'angle de déviation de la trajectoire de ce rayon lors du changement de milieu.

■ Indice et longueur d'onde

❑ Exercice 1.1. Longueur d'onde et couleur

Un laser émet une radiation lumineuse quasi monochromatique de fréquence $f = 4{,}73 \cdot 10^{14}$ Hz.

On donne $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesse de la lumière dans le vide).

1. Pourquoi qualifie-t-on cette radiation de « quasi monochromatique » ?

2. Quelle est la longueur d'onde dans le vide de cette radiation ? Quelle est sa couleur ?

3. On considère maintenant que cette radiation se propage dans un milieu d'indice 1,66.
Quelle est la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu ?
Quelle est alors la longueur d'onde de la radiation du laser ? Quelle est sa couleur ?

❑ Exercice 1.2. Loi de Cauchy

La formule de Cauchy, donnant l'indice d'un verre pour une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide, est : $n = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$ où A et B sont des constantes.

1. Donner les dimensions de A et B, et leurs unités dans le Système international.

2. Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :
$n_r = 1{,}618$ pour une radiation rouge de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0r} = 768$ nm ;
$n_v = 1{,}652$ pour une radiation violette de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0v} = 434$ nm.

a) Calculer les valeurs de A et B.
b) En déduire la valeur de l'indice pour une radiation jaune telle que $\lambda_{0\,j} = 589$ nm.

■ Réflexion et réfraction

❑ Exercice 1.3. Réfraction et dispersion

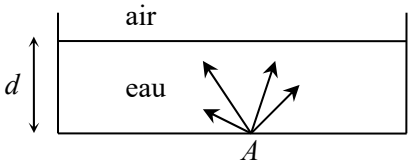
Un rayon lumineux, se propageant dans l'air, arrive avec une incidence $i = 40°$ sur un dioptre air/verre plan. Si ce rayon est constitué de lumière blanche, calculer l'écart angulaire entre les rayons réfractés extrêmes.

Données : l'indice du verre est donné par la formule de Cauchy : $n = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$, avec $A = 1{,}504$ et $B = 4{,}188 \cdot 10^{-15}$ unité SI ; l'indice de l'air est $n_a = 1{,}000$.

❑ Exercice 1.4. Condition d'émergence

1. Quelle est la condition pour qu'un rayon passant de l'eau (indice $n_{eau} = 1{,}33$) à l'air (indice $n_{air} = 1{,}00$) soit réfracté ?

2. On place une source de lumière (supposée ponctuelle) au fond d'une piscine remplie d'eau, de profondeur $d = 2{,}50$ m. Donner les dimensions de la zone de la surface qui sera traversée par des rayons lumineux.



❑ Exercice 1.5. Capteur de niveau d'eau

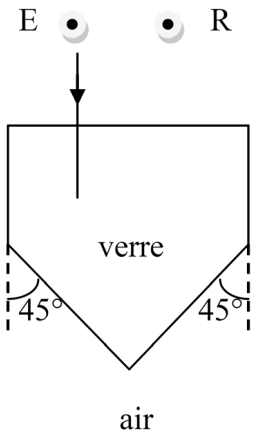
On désire connaitre le niveau du liquide dans un château d'eau. Pour cela on l'équipe d'un capteur optique schématisé sur la figure ci-contre. L'émetteur (E) est un faisceau laser et le récepteur (R) une photodiode. Cette dernière fournit un signal électrique lorsqu'elle reçoit de la puissance lumineuse.
L'indice du verre est $n = 1{,}5$; celui de l'air est 1.

1. Montrer que le faisceau laser se réfléchit totalement sur les faces et ressort en (R).

2. À la place de l'air, il y a maintenant de l'eau d'indice $n' = 1{,}33$. Le récepteur (R) reçoit il toujours de la lumière ?

3. Expliquer comment utiliser ce dispositif pour connaitre le niveau de remplissage du château d'eau.

D'après G2E



❑ Exercice 1.6. Construction de Descartes*

On considère un rayon lumineux passant d'un milieu d'indice $n_1 = 1{,}5$ (verre) à un milieu d'indice $n_2 = 1{,}0$ (air).

1.a) Faire un schéma du plan d'incidence, avec le milieu 1 en haut, et tracer le rayon incident. On note I le point d'intersection de ce rayon avec le dioptre.

b) Construire dans le milieu 2 deux demi-cercles de même centre I, l'un (C_1) de rayon proportionnel à n_1 et l'autre (C_2) de rayon proportionnel à n_2 (échelle au choix).

Soit J le point d'intersection du prolongement du rayon incident avec C_1 : à partir de J, on trace une droite Δ parallèle à la normale. On note alors K le point d'intersection de Δ avec C_2 : la droite (IK) obtenue donne la direction du rayon réfracté.

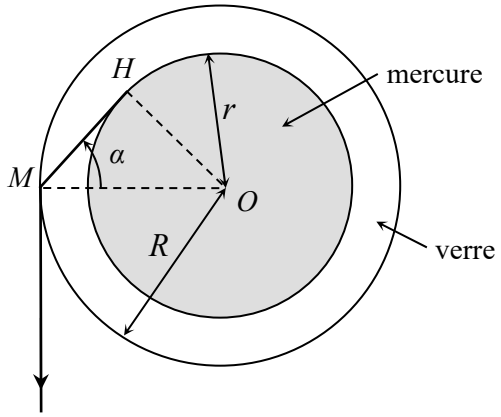
c) Construire le rayon réfracté selon cette méthode.

2. Démontrer, par des considérations géométriques, qu'on retrouve la loi de Snell–Descartes de la réfraction en utilisant cette construction.

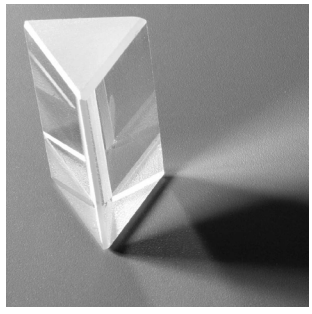
3. Montrer, à partir de cette construction, qu'il existe une valeur limite de i au-delà de laquelle il n'y a plus de rayon réfracté. Faire la construction de Descartes correspondante. Calculer cet angle et vérifier qu'on retrouve le résultat donné par les formules.

❑ Exercice 1.7. Thermomètre*

On considère un thermomètre à colonne de mercure, dont l'enveloppe est un cylindre en verre de rayon extérieur R et de rayon intérieur r. Montrer qu'à partir d'une certaine valeur de $\frac{r}{R}$, un observateur voit le mercure comme s'il remplissait entièrement un cylindre de rayon R, c'est-à-dire que l'épaisseur du verre n'est plus visible. On pourra utiliser les points O, M, H et l'angle α. L'indice du verre est $n = 1{,}5$.

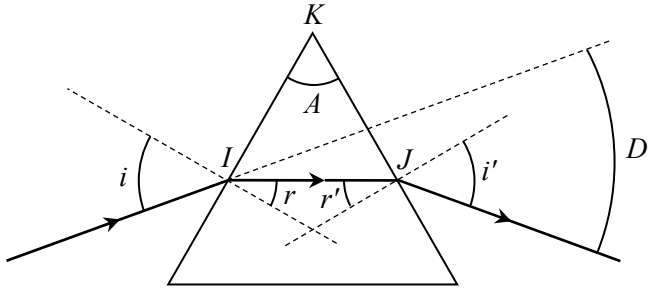


❑ Exercice 1.8. Mesure de l'indice d'un prisme**



On réalise la dispersion de la lumière au moyen d'un prisme en verre, d'angle A entre ses deux faces utiles, et d'indice de réfraction n pour une longueur d'onde donnée. Le milieu extérieur est l'air, d'indice pris égal à 1.

Soit un rayon parvenant au point I sur la face d'entrée avec un angle d'incidence i : il émerge par la face de sortie en un point J avec un angle i'. On note D l'angle mesurant la déviation entre le rayon incident et le rayon émergent.



1. Appliquer la loi de Snell–Descartes en I et J. Établir également les deux relations géométriques : $A = r + r'$ et $D = i + i' - A$. (Ces quatre relations sont les *formules du prisme*.)

2. Montrer que l'existence du rayon émergent en J dépend d'une condition sur r', puis en déduire une condition sur i.

3. Montrer que l'existence d'un rayon émergent impose aussi une condition sur A.

4. Pour un prisme en verre *flint* d'indice $n = 1,74$, vérifier que l'angle usuel $A = 60°$ convient. Déterminer alors numériquement l'encadrement de i.

5. On constate expérimentalement que, lorsqu'on fait varier i de 0° à 90° en tournant le prisme, la déviation D passe par un minimum unique D_m.

a) Justifier sans calcul que ce minimum correspond nécessairement à $i = i'$.

b) Exprimer alors D_m en fonction de i et A, puis en déduire l'indice n en fonction de D_m et A.

❑ Exercice 1.9. Arc-en-ciel* *

Lorsque le Soleil illumine un rideau de pluie, chaque goutte d'eau constitue une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. On recherche les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle (c'est à cette condition que l'intensité lumineuse sera maximale, donc observable pour l'œil). Pour cela on fait intervenir l'angle de déviation D de la lumière à travers la goutte d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation D est une fonction de l'angle d'incidence i. On admettra que la condition de parallélisme des rayons émergents se traduit mathématiquement par $\frac{dD}{di} = 0$.

1. Rappeler les lois de Snell–Descartes pour la réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air (milieu d'indice unité) vers un milieu d'indice n. Exprimer la dérivée $\frac{dr}{di}$ exclusivement en fonction de l'indice n et du sinus de l'angle d'incidence.

2. Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre O et de rayon R, est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0° et 90°. Son indice, pour une radiation donnée, sera noté n tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.
Répondre aux questions **a**, **b**, **c** ci-après pour chacun des trois cas suivants :
- lumière directement transmise (figure 1) ;
- lumière transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte (figure 2) ;
- lumière transmise après deux réflexions à l'intérieur de la goutte (figure 3).

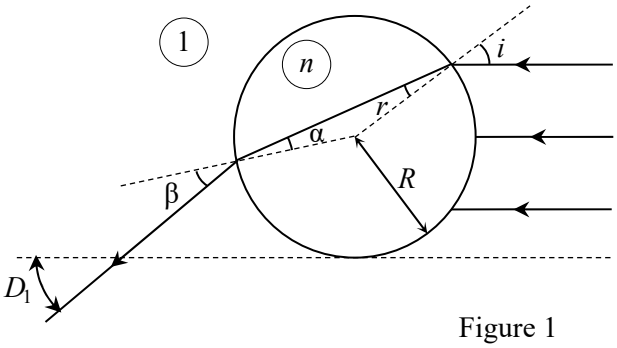


Figure 1

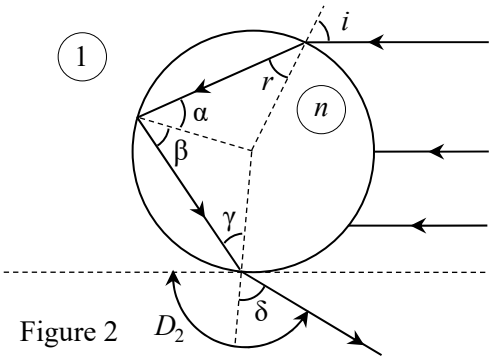


Figure 2

a) Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r, tous les angles marqués de lettres grecques.

b) En déduire l'angle de déviation D propre à chaque cas, en fonction de i et de r.

c) Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre le sinus de l'angle d'incidence et l'indice n de l'eau.

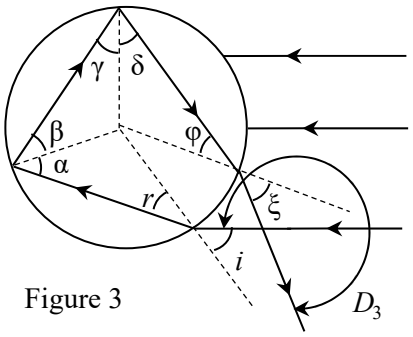


Figure 3

Madame Michu se trouve face à un rideau de pluie, et observe le ciel en tournant le dos au Soleil, qui est assez bas sur l'horizon.

3. Montrer qu'elle ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et de demi-angles au sommet θ_2 et θ_3. Exprimer ces deux angles en fonction de D_2 et D_3.

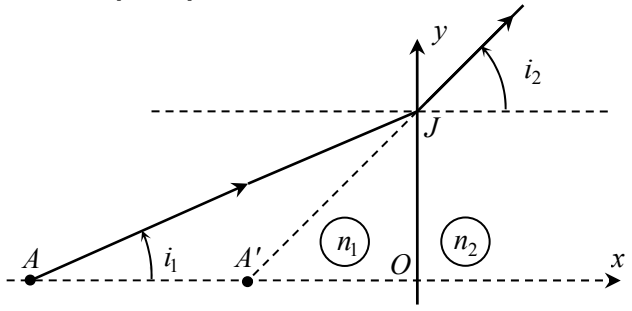
4. Les angles θ_2 et θ_3 dépendant de l'indice n de l'eau, on observe une séparation des couleurs due au fait que cet indice varie en fonction de la longueur d'onde. Calculer ces angles pour le rouge (indice 1,3317) et le violet (indice 1,3448).

5. Dessiner les deux arcs-en-ciel qui apparaissent dans le champ de vision de Madame Michu, en notant la position respective des rouges et des violets sur chacun des deux.

■ Formation d'images par un système optique

❑ Exercice 1.10. Stigmatisme du dioptre plan*

Un dioptre plan sépare un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2. On considère rayon issu d'un point A, situé dans le milieu d'indice n_1, et d'angle d'incidence orienté i_1. On note A' l'intersection du rayon réfracté avec l'axe perpendiculaire au dioptre et passant par A.



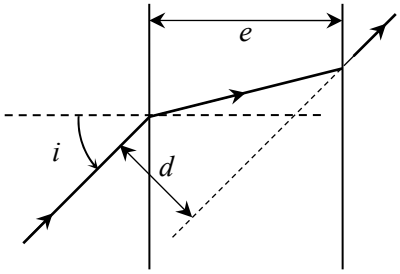
1. Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de $\overline{OA}$, $\sin i_1$, n_1 et n_2.

2. Le système est-il rigoureusement stigmatique ?

3. En utilisant une approximation, déterminer l'image du point objet A, puis d'un objet AB parallèle au dioptre.

❑ Exercice 1.11. Lame à faces parallèles*

On considère une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur e, d'indice n, plongée dans l'air d'indice 1. Un rayon incident arrive avec un angle d'incidence i.

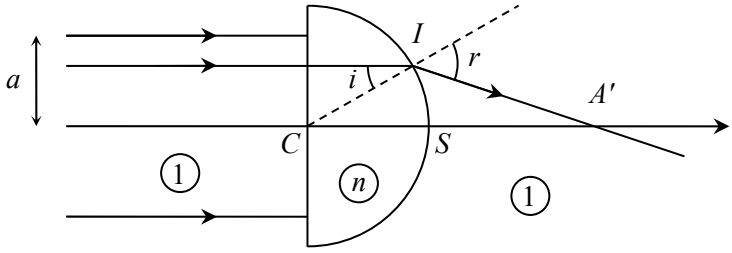


1. Déterminer l'écart d entre le rayon incident et le rayon émergent en fonction de n et $\sin i$.
2. Faire l'application numérique pour $e = 4$ mm, $n = 1{,}5$ et $i = 50°$.
3. Cette lame est-elle stigmatique ? Quel est son effet sur la vision d'un objet ?

❑ Exercice 1.12. Lentille demi-boule*

On considère une lentille en forme de demi-boule de rayon R et d'indice n, plongée dans l'air d'indice 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon a, arrive sous incidence normale sur la face plane de la lentille.

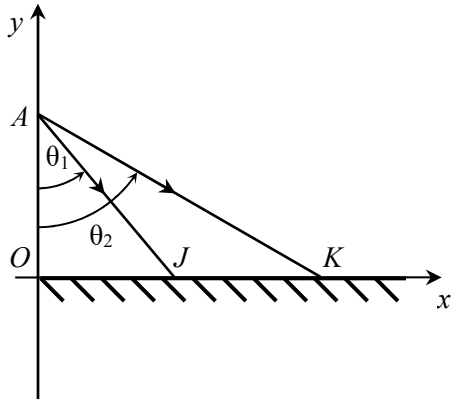
1. Un rayon donné de ce faisceau émerge en coupant l'axe optique en un point A'. Établir la relation donnant CA' en fonction de $R = CS$ et des angles i et r.



2. En déduire la limite CF' de CA' lorsqu'on se place dans l'approximation de Gauss (à définir). Quelle propriété de la lentille obtient-on ? Que représente le point F' ?
3. Quelle est la valeur limite a_0 du rayon du faisceau incident si l'on veut que tous les rayons ressortent de la lentille ? Faire l'application numérique pour $n = 1{,}5$ et $R = 5{,}0$ cm.

❑ Exercice 1.13. Jeux avec un ou deux miroirs**

On considère un miroir plan contenu dans le plan xOz et un objet ponctuel A placé sur l'axe Oy ($OA = a$). On cherche à déterminer l'image A' de A par le miroir.

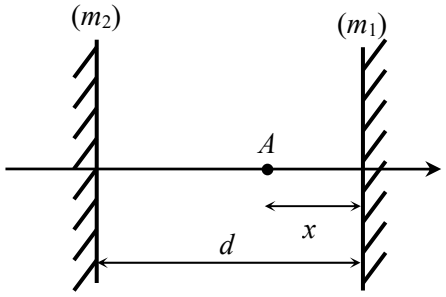


1. Construire les rayons réfléchis correspondant aux rayons incidents AJ et AK.
2. Établir les équations des droites des rayons réfléchis en fonction des tangentes des angles θ_1 et θ_2.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection C de ces deux droites.
4. Quelle est l'image de A par le miroir ? En déduire une propriété caractéristique du miroir plan.

On place maintenant deux miroirs plans identiques, parallèles et distants de d. Un objet ponctuel A est placé entre les deux miroirs à la distance x de (m_1).
On note A_1 l'image de A par (m_1), puis A_2 l'image de A_1 par (m_2), etc.

5. Déterminer, en fonction de x et d, les mesures algébriques $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{AA_3}$ et $\overline{AA_4}$.

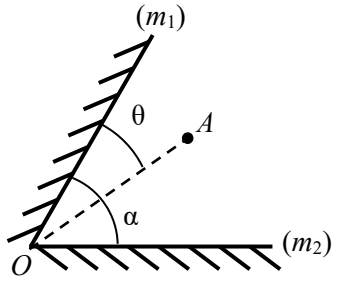
6. En déduire $\overline{AA_n}$. Combien d'images peut-on observer ?



On place à présent les deux miroirs comme indiqué sur le schéma de telle façon qu'ils forment entre eux un angle $\alpha = 60°$.
On place un objet ponctuel A entre eux. On note A_1 l'image de A par (m_1), puis A_2 l'image de A_1 par (m_2), etc.

7. Construire les images A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5.

8. Combien d'images peut-on observer ?



D'après CCINP

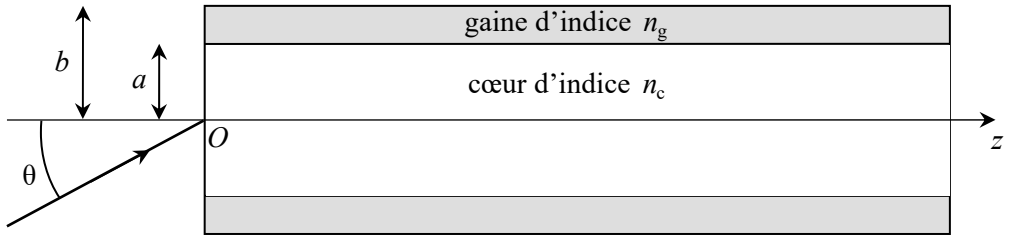
■ Fibre optique

❑ Exercice 1.14. Caractéristiques d'une fibre optique

Les câbles à fibres optiques permettent la transmission à haut débit de tous types de signaux électromagnétiques, sur de longues distances avec très peu d'atténuation ; ceux-ci se propagent comme la lumière. Chaque câble comporte un grand nombre de fibres très fines.



Une fibre optique à saut d'indice est assimilée à un cylindre de révolution d'axe (Oz), de longueur L, constitué d'un cœur en polyméthacrylate de méthyle, de rayon a (de l'ordre de 8 à 50 µm) et d'indice $n_c = 1,49$, entouré d'une couche cylindrique de polymère fluoré, la gaine, d'épaisseur $b - a$ et d'indice $n_g = 1,40$. Le milieu extérieur a un indice n_0 .
Un rayon pénètre dans la fibre en O, en faisant un angle θ avec l'axe (Oz).



1. Déterminer la valeur maximale admissible θ_a de l'angle θ pour que le rayon puisse être guidé dans la fibre, et calculer l'ouverture numérique $o_n = n_0 \sin\theta_a$.

2. On note τ la durée du trajet d'un rayon lumineux dans la fibre. Déterminer l'intervalle de temps $\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min}$ entre les rayons les plus lents et les plus rapides en fonction de n_c, n_g, L et de la célérité c de la lumière dans le vide.

Calculer $\Delta\tau$ pour $L = 1{,}0$ km, sachant que $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

3. Lors d'une communication par cette fibre optique, on envoie à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses avec une fréquence f. On souhaite récupérer ces impulsions distinctes en sortie ($L = 1{,}0$ km). Monter que la fréquence f doit être inférieure à une certaine valeur.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.2. Tous les termes d'une somme ont la même dimension, qui est aussi celle de la somme elle-même.
Exercices 1.8 et 1.9. La somme des trois angles d'un triangle vaut π.
Exercices 1.10 et 1.11. Pour savoir si le système est rigoureusement stigmatique, il faut vérifier si tous les rayons issus d'un point A semblent venir d'un même point A' après avoir traversé le système. Penser à utiliser le rayon non dévié.
Exercice 1.12. Faire apparaître le projeté H de I sur l'axe, et calculer séparément CH (facile) et HA' (plus difficile) pour en déduire $CA' = CH + HA'$.
Exercice 1.14. Pour que le rayon demeure dans la fibre, il faut qu'il y ait toujours réflexion totale au niveau du dioptre entre le cœur et la gaine.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux

1. La vitesse de la lumière est $v = \frac{c}{n}$ donc $v_{\text{eau}} < v_{\text{air}}$.

5. La lumière solaire peut être décomposée (à l'aide d'un prisme, par exemple) en une infinité de radiations de longueurs d'ondes différentes.

8. Une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour observer une réflexion totale est que l'indice du premier milieu soit supérieur à celui du deuxième.

9. Seul le rayon confondu avec l'axe optique n'est pas dévié ; les autres sont déviés vers le foyer image principal.

❑ Les erreurs classiques

– Faire attention à l'unité d'angle utilisée dans les calculs (degrés ou radians). Et quand on utilise les degrés, ne pas confondre les valeurs en degrés décimaux (avec des chiffres après la virgule), par exemple 24,30°, et celles en degrés et minutes, par exemple 24° 30′, qui est égal à 24,50° puisque 1° = 60′.
– Les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction sont mesurés à partir de la *normale* au dioptre, et non par rapport au dioptre lui-même.
– Bien vérifier l'homogénéité des formules ! Par exemple, une longueur ne peut être égale qu'à une autre longueur, mais en aucun cas à l'inverse d'une longueur, ou à un produit de deux longueurs…

■■ Corrigé des exercices

Exo minute 1.A

1. On applique la relation $f = \dfrac{c}{\lambda_0}$, ce qui donne pour $\lambda_0 = 0{,}40\ \mu\text{m}$, $\boxed{f = 7{,}5 \times 10^{14}\ \text{Hz}}$ et pour $\lambda_0 = 0{,}80\ \mu\text{m}$, $\boxed{f = 3{,}8 \times 10^{14}\ \text{Hz}}$.

2. La fréquence ne dépend pas du milieu, c'est une caractéristique intrinsèque d'une lumière donnée. Mais la longueur d'onde est modifiée lorsque la lumière change de milieu.

a) $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n}$. Application numérique (AN) : $\boxed{0{,}31\ \mu\text{m}}$ et $\boxed{0{,}62\ \mu\text{m}}$.

b) $\lambda' = \dfrac{\lambda_0}{n'}$. AN $\boxed{0{,}27\ \mu\text{m}}$ et $\boxed{0{,}54\ \mu\text{m}}$.

Exo minute 1.B

Il faut d'abord calculer l'angle i_2 entre le rayon réfracté et la normale au dioptre, en utilisant la loi de Snell–Descartes de la réfraction : $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$, ce qui donne $i_2 = \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)$.

Pour effectuer l'AN, convertissons d'abord l'angle d'incidence en degrés décimaux : $i_1 = 32° \ 12' = 32 + \dfrac{12}{60} = 32{,}20°$. On obtient alors $i_2 = 27{,}50° = 27° \ 30'$.

La déviation du rayon est finalement : $\boxed{D = |i_2 - i_1| = 4{,}70° = 4° \ 42'}$.

Exercice 1.1

1. Cette lumière n'est pas rigoureusement monochromatique (ce qui n'est qu'un cas idéal), mais elle en est « très proche », c'est-à-dire que l'intervalle de fréquences est extrêmement étroit autour de la valeur *f* donnée. Et en tous cas, la lumière laser possède une monochromaticité beaucoup plus grande que n'importe quel autre type de lumière.

2. On utilise la formule $\lambda_0 = \dfrac{c}{f}$. AN $\boxed{\lambda_0 = 0{,}63\ \mu\text{m}}$. La couleur perçue par l'œil humain est rouge (car le rouge couvre l'intervalle approximatif de 0,62 à 0,80 µm dans le vide).

3. La vitesse est $v = \dfrac{c}{n}$. AN $\boxed{v = 1{,}81 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$. La longueur d'onde devient $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{\lambda_0}{n}$.

AN $\boxed{\lambda_0 = 0{,}38\ \mu\text{m}}$. En revanche, la couleur, qui dépend de la fréquence et qui est donc intrinsèque, reste rouge.

Corrigé

Exercice 1.2

1. A est sans dimension, donc sans unité (comme n) et B a la dimension d'une longueur au carré ; il s'exprime donc en mètres carrés (m^2) dans le SI.

2.a) Il faut donc résoudre le système : $n_r = A + \dfrac{B}{\lambda_{0r}^2}$ (1) et $n_v = A + \dfrac{B}{\lambda_{0v}^2}$ (2).

On élimine A en effectuant la soustraction $(2)-(1)$, ce qui permet d'obtenir $\boxed{B = \dfrac{n_v - n_r}{1/\lambda_{0v}^2 - 1/\lambda_{0r}^2}}$.

AN $B = \dfrac{1{,}652 - 1{,}618}{(4{,}34\times10^{-7})^{-2} - (7{,}68\times10^{-7})^{-2}}$ soit $\boxed{B = 9{,}41\times10^{-15}\ \text{m}^2}$. On en déduit $\boxed{A = 1{,}602}$.

b) $n_j = 1{,}602 + \dfrac{9{,}41\times10^{-15}}{(5{,}89\times10^{-7})^2}$ soit $\boxed{n_j = 1{,}629}$.

Exercice 1.3

Le rayon lumineux réfracté dans le verre aura un angle de réfraction r tel que $\sin i = n \sin r$, soit $r = \arcsin\left(\dfrac{\sin i}{n}\right)$. Or l'indice n dépend de la longueur d'onde dans le vide de la lumière incidente. Pour la lumière blanche, les valeurs extrêmes sont $\lambda_{0v} = 400$ nm (violet) et $\lambda_{0r} = 800$ nm (rouge). On a donc pour les indices correspondants $n_v = 1{,}530$ et $n_r = 1{,}511$.

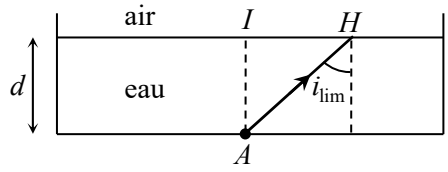
Les angles de réfraction sont $r_v = \arcsin\left(\dfrac{\sin 40°}{1{,}530}\right) = 24{,}84°$ et $r_r = \arcsin\left(\dfrac{\sin 40°}{1{,}511}\right) = 25{,}17°$, ce qui représente un écart angulaire $\boxed{\Delta r = r_r - r_v = 0{,}33° = 20'}$.

⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.4

1. Il faut que l'angle i d'incidence du rayon soit inférieur à l'angle limite, soit $i \le i_{lim} = \arcsin\left(\dfrac{1}{1{,}33}\right) = 48{,}8°$. ⇨ *Méthode 1.1*

2. Un rayon pourra traverser le dioptre eau-air si son angle d'incidence est inférieur à l'angle limite calculé précédemment.
La zone cherchée sera donc un disque de rayon $\boxed{IH = d \tan i_{lim} = 2{,}85\ \text{m}}$.



Exercice 1.5

1. Sur les dioptres verre/air, l'angle de réflexion totale est $i_{lim} = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 41°\ 50'$. Or l'angle d'incidence du faisceau laser est $i = 45°$, donc $\boxed{i > i_{lim}}$: il y a réflexion totale sur la face

oblique de gauche (avec un angle de réflexion de 45°), puis à nouveau sur la face de droite (avec les mêmes angles), et le rayon revient finalement entièrement vers (R).

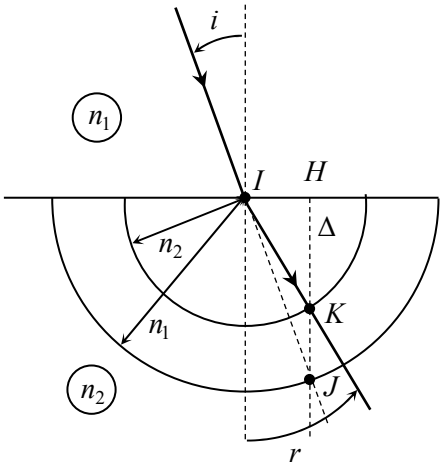
⇨ *Méthode 1.1*

2. La nouvelle valeur de l'angle de réflexion totale est $i'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right) = 62°\ 30'$. Maintenant $i < i'_{\text{lim}}$: il n'y a plus réflexion totale. Cependant il y a toujours une réflexion partielle en même temps que la réfraction, donc le récepteur reçoit encore un peu de lumière, mais avec une intensité beaucoup plus faible que dans le cas précédent.

3. On peut suspendre ce dispositif au-dessus du réservoir et le faire descendre progressivement, tout en observant le signal capté par (R). L'intensité de ce signal reste sensiblement constante tant que le capteur est au-dessus de l'eau, puis diminue brusquement lorsqu'il s'immerge dans l'eau. Ainsi, en repérant la distance dont on a fait descendre le capteur (longueur de fil déroulé…), on peut connaître le niveau de l'eau.

Exercice 1.6

1. a) b) c) Voir schéma.



2. En notant H le projeté orthogonal de J (ou K) sur le dioptre, on peut écrire les relations trigonométriques :

$\sin i = \frac{HI}{IJ} = \frac{HI}{n_1}$ et $\sin r = \frac{HI}{IK} = \frac{HI}{n_2}$.

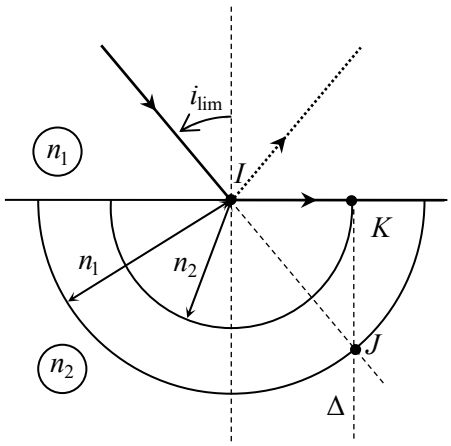
On en déduit donc que $HI = n_1 \sin i = n_2 \sin r$.

On retrouve bien la loi de la réfraction :

$$\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}.$$

⇨ *Méthode 1.3*

3. L'angle limite d'incidence i_{lim} s'obtient pour $i_2 = \frac{\pi}{2}$ (ou 90°), on peut donc le déterminer graphiquement. Pour une valeur de i_1 supérieure à i_{lim}, il n'y a plus de point K donc on ne peut plus construire de rayon réfracté.



Dans le cas où un rayon lumineux passe du verre ($n_1 = 1{,}5$) à l'air ($n_2 = 1$), l'angle limite vaut $i_\ell = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\right) = 41{,}8°$. Pour $i_1 > 41{,}8°$ il y aura réflexion totale.

Corrigé

Exercice 1.7

Pour qu'on obtienne l'effet indiqué, un rayon issu de H (sur le bord du mercure) doit émerger en M à la limite de la réflexion totale, ce qui revient à dire $\sin\alpha \geq \sin\alpha_{\text{lim}} = \dfrac{1}{n}$.

Or $\sin\alpha = \dfrac{r}{R}$ (dans le triangle rectangle OHM), donc la condition s'écrit : $\boxed{\dfrac{r}{R} \geq \dfrac{1}{n} = 0{,}67}$.

⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.8

1. Lois de Snell–Descartes : en I, $\boxed{\sin i = n \sin r}$ (équation 1) ; en J, $\boxed{\sin i' = n \sin r'}$ (2).

– Par ailleurs, dans le triangle IJK, la somme des angles vaut π : $A + \left(\dfrac{\pi}{2} - r\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$

d'où $\boxed{A = r + r'}$ (3).

– Pour la déviation D, il faut remarquer que le rayon incident est dévié deux fois dans le même sens (vers la droite sur notre schéma). En I, le rayon entre dans le prisme en tournant de $i - r\ (> 0)$; puis en J, il tourne de $i' - r'\ (> 0)$. La déviation totale est donc $D = i + i' - r - r'$, et en utilisant la relation (3) on obtient $\boxed{D = i + i' - A}$ (4).

2. La réfraction en I (de l'air au verre, d'indice plus grand) existe pour toute valeur de i. En revanche, en J (du verre à l'air) elle est conditionnée à la valeur de r' : il faut que $\boxed{r' < r'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ pour que le rayon émerge en J et ne subisse pas de réflexion totale.

La relation (3) $A = r + r'$ impose donc $r > A - \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et la relation (1) donne alors : $\boxed{i > \arcsin\left[n \sin\left(A - \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right] = i_{\text{min}}}$. L'angle d'incidence doit être assez grand.

⇨ *Méthode 1.1*

✎ *Les fonctions sinus et arcsinus sont croissantes entre* 0 *et* $\dfrac{\pi}{2}$*, donc une valeur minimale pour un angle correspond à une valeur minimale pour son sinus.*

3. D'après (1), $\sin r = \dfrac{\sin i}{n} < \dfrac{1}{n}$ donc $r < \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Si on considère la condition sur r' : $r' < \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ainsi que la relation (3), on en déduit qu'il est impératif d'avoir $\boxed{A < 2\arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right) = A_{\text{max}}}$ pour que la lumière puisse émerger du prisme. Celui-ci doit donc être assez pointu.

4. Pour $n = 1{,}74$, $\boxed{A_{\text{max}} = 70° \ 10'}$ donc la valeur $A = 60°$ convient.

La condition sur i est alors : $\boxed{47° \ 9' < i < 90°}$.

5.a) D'après la loi de retour inverse de la lumière, si on obtient une déviation minimale dans un sens pour un angle incident i, la déviation est aussi minimale dans l'autre sens, en inversant les rôles des rayons émergent et incident, donc pour un angle incident i'. Le minimum étant unique, on trouve nécessairement $i' = i$.

b) D'après les relations (1) et (2), si $i' = i$, alors $r' = r$. Les relations (4) et (3) donnent alors :

$D_m = 2i - A$ d'où $i = \dfrac{A + D_m}{2}$; et $r = \dfrac{A}{2}$. Or $n = \dfrac{\sin i}{\sin r}$, soit $\boxed{n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}}$.

Exercice 1.9

1. Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et $\sin i = n \sin r$ (1).

Écrivons la différentielle de cette expression : $\cos i \, \mathrm{d}i = n \cos r \, \mathrm{d}r$, soit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{\cos i}{n \cos r}$.

En utilisant la relation (1) et la relation $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$, on obtient : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\dfrac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}}$.

2. *Figure 1*

a) $\alpha = r$ et $\beta = i$. **b)** $D_1 = 2(i - r)$.

c) $\mathrm{d}D_1 = 2\,\mathrm{d}i - 2\,\mathrm{d}r$ et $\dfrac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}i} = 2\left(1 - \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}\right)$. La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est $\dfrac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}i} = 0$, soit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 1$. Or, d'après le résultat de la question 1, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\dfrac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$, ce qui impose que $n^2 - \sin^2 i = 1 - \sin^2 i$, donc que $n = 1$. Cette solution triviale n'a pas d'intérêt (il faudrait que l'indice de l'eau soit le même que celui de l'air !). Il n'est donc pas possible d'observer le faisceau parallèle recherché dans ces conditions.

Figure 2

a) $\alpha = \beta = \gamma = r$ et $\delta = i$. **b)** $D_2 = 2(i - r) + \pi - 2r$.

c) $\mathrm{d}D_2 = 2(\mathrm{d}i - \mathrm{d}r) - 2\,\mathrm{d}r = 2\,\mathrm{d}i - 4\,\mathrm{d}r$. La condition d'émergence du faisceau parallèle s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{2}$ et le résultat de la question 1 conduit à $n^2 - \sin^2 i = 4(1 - \sin^2 i)$, soit $\boxed{\sin^2 i = \dfrac{4 - n^2}{3}}$.

Figure 3

a) $\varphi = \delta = \gamma = \beta = \alpha = r$ et $\xi = i$.

b) $D_3 = 2(i - r) + 2(\pi - 2r)$.

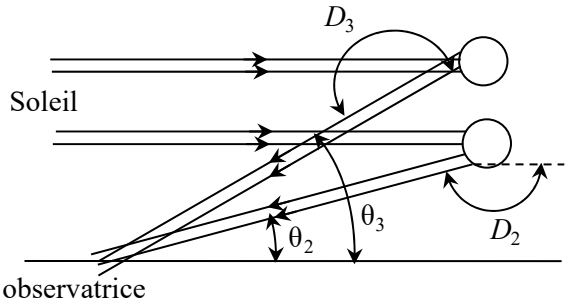
c) $\mathrm{d}D_3 = 2(\mathrm{d}i - \mathrm{d}r) - 4\,\mathrm{d}r = 2\,\mathrm{d}i - 6\,\mathrm{d}r$ donc la condition recherchée s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{3}$, ce qui donne, en utilisant le résultat de la question 1 : $\boxed{\sin^2 i = \dfrac{9 - n^2}{8}}$.

Corrigé

3. Madame Michu ne verra la lumière émergente que si la condition d'émergence d'un faisceau parallèle est vérifiée, ce qui correspond au schéma ci-contre.

On constate les relations $\theta_2 = \pi - D_2$ et $\theta_3 = D_3 - \pi$.

Les gouttes devront donc être sur un cône centré sur l'observatrice et d'axe parallèle aux rayons incidents.

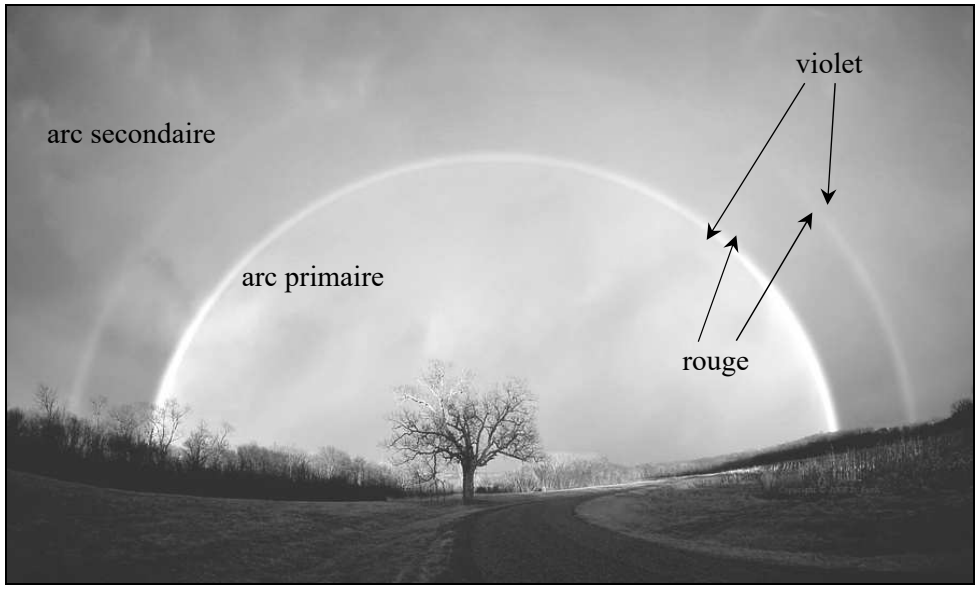


Elle observera deux arcs : l'un dû à la simple réflexion de la lumière dans une goutte (cas de la figure 2) et l'autre dû à la double réflexion (cas de la figure 3).

4. Pour la simple réflexion : $\theta_2 = \pi - D_2$, avec $D_2 = 2(i-r) + \pi - 2r$, et $i = \arcsin\sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}}$; quant à *r*, il se calcule par la relation $r = \arcsin\left(\dfrac{\sin i}{n}\right)$. Pour la double réflexion : $\theta_3 = D_3 - \pi$, avec $D_3 = 2(i-r) + 2(\pi - 2r)$, $i = \arcsin\sqrt{\dfrac{9-n^2}{8}}$ et toujours $r = \arcsin\left(\dfrac{\sin i}{n}\right)$.

Angle (en degrés)	i_2	r_2	D_2	θ_2	i_3	r_3	D_3	θ_3
Violet ($n = 1{,}3448$)	58,75	39,48	139,58	**40,41**	71,50	44,85	233,87	**53,87**
Rouge ($n = 1{,}3317$)	59,51	40,33	137,71	**42,29**	71,92	45,56	230,48	**50,48**

5. On constate que l'arc secondaire (obtenu par double réflexion) est au-dessus de l'arc primaire (simple réflexion), puisque les angles sont plus grands, et que les couleurs des deux arcs sont inversées : violet à l'intérieur pour l'arc primaire, à l'extérieur pour l'arc secondaire.



Exercice 1.10

1. $\tan i_1 = \dfrac{\overline{OJ}}{\overline{AO}}$, $\tan i_2 = \dfrac{\overline{OJ}}{\overline{A'O}}$ et la loi de la réfraction en J s'écrit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

⇨ *Méthode 1.3*

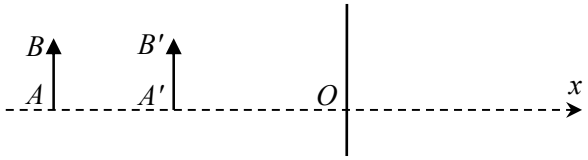
Ici on travaille avec des angles orientés, ce qui permet d'obtenir des mesures algébriques et pas seulement des distances. Mais il faut les orienter correctement !

Ces trois relations entraînent que $\overline{OA'} = \overline{OA}\dfrac{\tan i_1}{\tan i_2} = \overline{OA} \times \dfrac{\sin i_1}{\cos i_1} \times \dfrac{\cos i_2}{\sin i_2}$.

Or $\cos i_1 = \sqrt{1-\sin^2 i_1}$, $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ et $\cos i_2 = \sqrt{1-\sin^2 i_2} = \sqrt{1-\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1}$, ce qui permet, après simplification, d'obtenir $\boxed{\overline{OA'} = \overline{OA}\dfrac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}}{\sqrt{n_1^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}}}$.

2. La position de A' dépend de l'angle i_1, donc du rayon étudié. On ne peut donc pas dire que tous les rayons issus de A sembleront venir d'un *même* point A' après réflexion : il n'y a pas d'image A' de A, le dioptre n'est pas un système rigoureusement stigmatique.

3. Si i_1 est faible, c'est-à-dire si on ne considère que les rayons faiblement inclinés par rapport à (Ox), alors $\sin i_1 \ll 1$ d'où $\boxed{\overline{OA'} \approx \dfrac{n_2}{n_1}\overline{OA}}$. Cette relation ne dépend plus de i_1 donc A' est bien l'image de A dans ces conditions.



Cette relation étant valable pour tout point de l'objet AB, on en déduit que $A'B'$, image de AB par le dioptre, est également parallèle au dioptre et plus proche de ce dernier si $n_2 < n_1$ (mais plus éloignée si $n_2 > n_1$).

Exercice 1.11

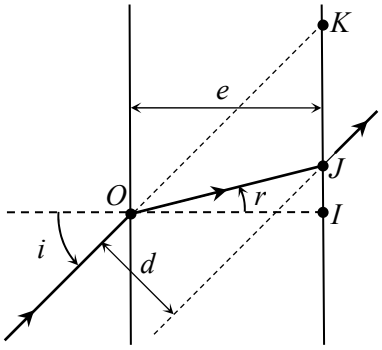
1. Un peu de trigonométrie permet de résoudre ce problème. Il est conseillé de faire un schéma très clair et de nommer les points remarquables : O, I, J et K.

$d = JK\cos i = (IK - IJ)\cos i = e(\tan i - \tan r)\cos i$

$= e\left[\dfrac{\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 i}} - \dfrac{\sin r}{\sqrt{1-\sin^2 r}}\right]\sqrt{1-\sin^2 i}$.

On utilise alors la loi de la réfraction : $\sin i = n \sin r$ d'où

$\boxed{d = e\sin i\left[1 - \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right]}$.

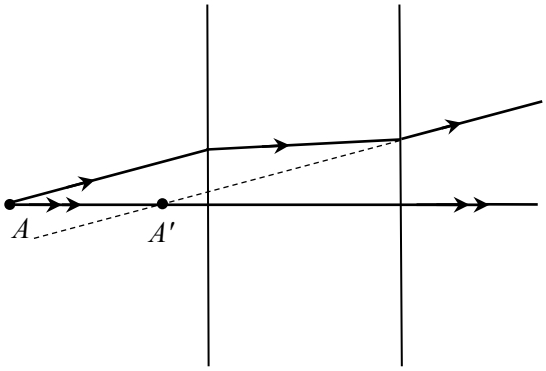


⇨ *Méthode 1.3*

Corrigé

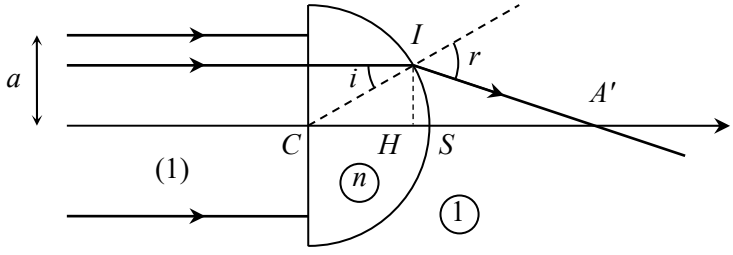
2. AN $\boxed{d = 1{,}54 \text{ mm}}$.

3. Cherchons l'image donnée par la lame d'un point A. Pour cela, on construit le trajet de deux rayons issus de A (on choisit l'un des deux orthogonal à la lame par commodité).
Tout d'abord, il faut vérifier le stigmatisme de la lame, c'est-à-dire vérifier que la position de A' ne dépend pas de l'inclinaison des rayons issus de A.
Ce n'est pas vrai de façon exacte, car la formule précédente dépend de i.
Mais pour i très faible : $\sin i \approx i \ll 1$ donc $d \approx ei\left[1-\frac{1}{n}\right]$. De plus $\sin i = \frac{d}{AA'} \approx i$ donc on trouve $AA' \approx \frac{d}{i} \approx e\left[1-\frac{1}{n}\right]$, qui est indépendant de i : la lame à face parallèle est stigmatique pour les angles faibles.
On constate alors que l'image A' est plus proche de la lame que A. La lame donne donc l'impression de rapprocher les objets.



Exercice 1.12

1. On définit le point I, intersection entre le rayon incident et le dioptre sphérique, et le point H, projeté orthogonal de I sur l'axe, ce qui définit deux triangles rectangles.
Le rayon n'étant pas dévié par la face plane de la lentille (car il arrive selon la normale), on peut se contenter de considérer la réfraction au niveau de la face sphérique : $n \sin i = \sin r$.
$\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'} = \frac{HI}{\tan i} + \frac{HI}{\tan(r-i)}$ et $HI = R\sin i$, donc $\boxed{\overline{CA'} = R\cos i + \frac{R\sin i}{\tan(r-i)}}$.



⇨ *Méthode 1.3*

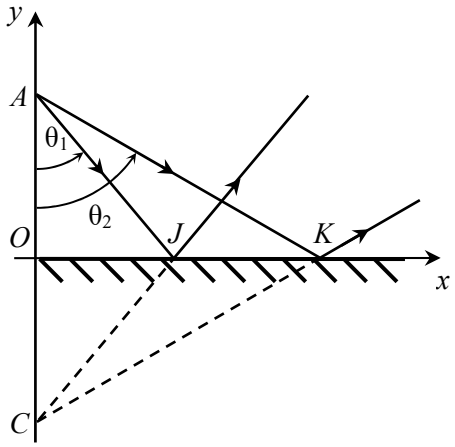
2. L'approximation de Gauss consiste à se limiter à des rayons paraxiaux, ce qui permet d'écrire $\boxed{i \ll 1}$, d'où également $r \ll 1$. Alors $\sin i \approx \tan i \approx i$, donc la loi de Snell–Descartes devient $ni \approx r$; et $\cos i \approx 1$ d'où $\overline{CA'} \approx R + \frac{Ri}{r-i} \approx R + \frac{Ri}{ni-i}$ soit $\overline{CA'} \approx \boxed{\frac{nR}{n-1} = \overline{CF'}}$.
On a, dans ces conditions, une lentille stigmatique dont F' est le foyer principal image.

3. Pour qu'un rayon émergent existe, il faut que la loi de Snell–Descartes donne $\sin r \leq 1$ donc $\sin i \leq \frac{1}{n}$. Or $\sin i = \frac{a_0}{R}$, la condition est donc $\boxed{a_0 \leq \frac{R}{n} = 3{,}3 \text{ cm}}$.

Exercice 1.13

1. Voir schéma.

2. Le rayon (1) a pour pente $\frac{1}{\tan\theta_1}$. L'équation cherchée est donc de la forme $y_1 = \frac{x}{\tan\theta_1} + k$. On détermine la constante k en imposant que le point J appartienne à cette droite, soit $0 = \frac{OJ}{\tan\theta_1} + k$ et donc $k = -\frac{OJ}{\tan\theta_1} = -a$. L'équation de la droite du rayon réfléchi (1) est donc : $\boxed{y_1 = \frac{x}{\tan\theta_1} - a}$.



⇨ *Méthode 1.4*

Pour le rayon (2), on utilise la même méthode en notant que sa pente est $\frac{1}{\tan\theta_2}$ et en utilisant le point K pour déterminer la constante. L'équation recherchée est alors $\boxed{y_2 = \frac{x}{\tan\theta_2} - a}$.

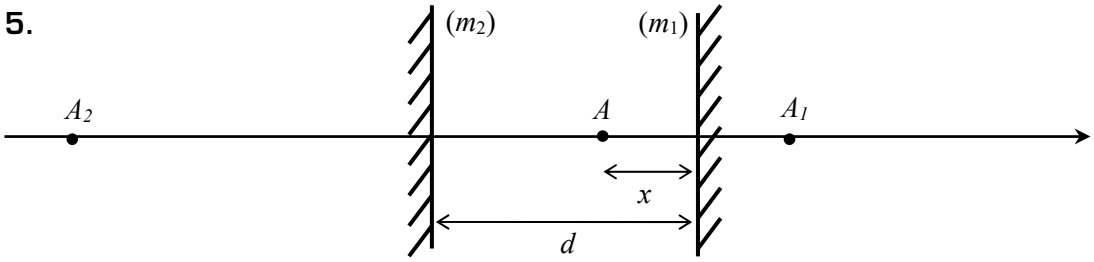
3. Pour déterminer le point d'intersection C, on cherche à résoudre l'équation $y_1 = y_2$.

Donc $\frac{x_C}{\tan\theta_1} - a = \frac{x_C}{\tan\theta_2} - a$ et, vu que $\tan\theta_1 \neq \tan\theta_2$, alors $\boxed{x_C = 0}$ et $\boxed{y_C = -a}$.

4. Les angles θ_1 et θ_2 étant quelconques, on peut en déduire que tous les rayons issus de A semblent venir de C après réflexion. C est donc l'image de A par le miroir.
Ce n'est pas une approximation mais un résultat exact : il y a stigmatisme rigoureux du miroir.

✎ *Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique.*

5.



$\overline{AA_1} = 2x$; $\overline{AA_2} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = 2x - 2(d+x) = -2d$;

$\overline{AA_3} = \overline{AA_2} + \overline{A_2A_3} = -2d + 2(2d+x) = 2d + 2x$;

$\overline{AA_4} = \overline{AA_3} + \overline{A_3A_4} = 2d + 2x - 2(3d+x) = -4d$.

6. En continuant la suite, et par extrapolation, on obtient :

– si n est pair, $\overline{AA_n} = -nd$;

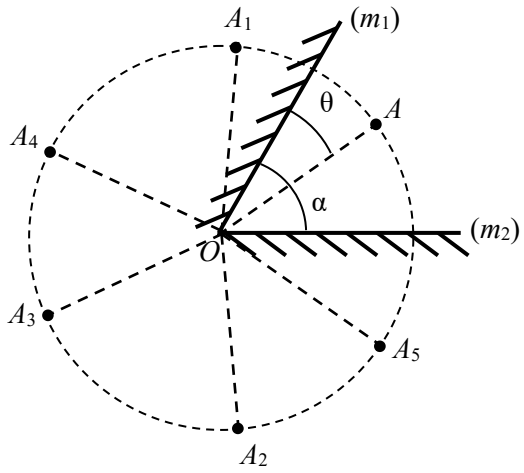
– si n est impair, $\overline{AA_n} = (n-1)d + 2x$.

On peut donc (en théorie) observer une infinité d'images.

Corrigé

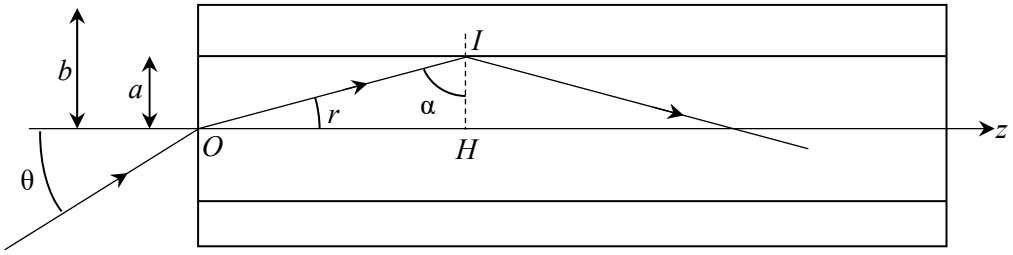
7. Les images sont toutes situées sur un cercle de centre O et de rayon OA.
Voir schéma.

8. On constate que A_6 est confondue avec A.
On pourra donc observer six images distinctes.



Exercice 1.14

1. Cette résolution nécessite de bien identifier ce qui se passe en chaque point utile. Pour que le rayon se propage dans le cœur de la fibre, il doit y avoir tout d'abord une réfraction en O (le rayon entrant dans le cœur) puis une réflexion totale en I et en tous les points analogues successifs : ainsi le rayon suivra une ligne brisée sans sortir du cœur.



Donc $n_0 \sin\theta = n_c \sin r$ (1) et $\alpha > \alpha_{lim} = \arcsin\left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)$ ou $\sin\alpha > \dfrac{n_g}{n_c}$ (2). D'autre part, la somme des angles dans le triangle OHI est égale à π : $\alpha + r + \dfrac{\pi}{2} = \pi$ donc $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - r$ (3).

D'après (3), $\sin\alpha = \cos r$ et (2) peut donc s'écrire $\cos r > \dfrac{n_g}{n_c}$ ou $1 - \sin^2 r > \left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)^2$.

On utilise alors (1) et on obtient $1 - \dfrac{n_0^2 \sin^2\theta}{n_c^2} > \left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)^2$, d'où $\boxed{\theta < \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_0}\right) = \theta_a}$.

Si l'angle θ vérifie cette condition, le rayon restera dans la fibre et sera guidé par elle.

On a donc trouvé $\boxed{o_n = n_0 \sin\theta_a = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$. AN $\boxed{o_n = 0{,}51}$.

⇨ *Méthodes 1.1 et 1.2*

2. La durée de parcours d'une distance d, à la célérité v, est $\tau = \dfrac{d}{v}$. Or $v = \dfrac{c}{n_c}$, et pour le rayon dessiné, $d = \dfrac{L}{\cos r}$, donc $\tau = \dfrac{L n_c}{c \cos r}$.

Le rayon le plus rapide est celui qui parcourt le trajet le plus court, ce qui correspond à $\theta = 0$ donc $r = 0$ et $\cos r = 1$. Par conséquent $\tau_{min} = \dfrac{L n_c}{c}$.

Le rayon le plus lent correspond à $\theta = \theta_a$ et à l'angle $\alpha = \alpha_{lim}$ correspondant à la réflexion limite en I, sachant que $\sin \alpha_{lim} = \dfrac{n_g}{n_c} = \cos r_{lim}$. Donc $\tau_{min} = \dfrac{L n_c^2}{c n_g}$.

On en déduit : $\boxed{\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min} = \dfrac{L n_c (n_c - n_g)}{c n_g}}$.

AN pour une longueur de fibre $L = 1{,}0$ km : $\boxed{\Delta\tau = 320 \text{ ns}}$.

3. Pour que les impulsions lumineuses puissent être bien séparées à la sortie de la fibre, il faut que la durée T entre deux impulsions soit supérieure à $\Delta\tau$, soit $\boxed{f < \dfrac{1}{\Delta\tau} = f_{max}}$.

AN $\boxed{f_{max} = 3{,}1 \text{ MHz}}$.

Corrigé

Chapitre 2

Lentilles minces

UN SCIENTIFIQUE



Connu sous le nom d'Alhazen en Occident, le savant arabe Al-Hassan ibn **Al-Haitham** (965-1039) vivait au Caire. Il consacre ses recherches à l'optique et comprend que la lumière vient à l'œil et non l'inverse ; « sinon nous verrions la nuit » ajoute-t-il.
Ceci lui permet de construire des miroirs sphériques et des lentilles grâce à des propriétés géométriques qu'il met en lumière. Il construit une chambre noire qui lui permet d'observer les éclipses.

Un peu d'histoire

Dans l'Antiquité, Euclide, Héron et Ptolémée se sont intéressés à l'optique en introduisant la notion de rayon lumineux. Le dernier a étudié la réflexion et la réfraction. Le savant arabe Ibn Sahl expose dans son ouvrage *Sur les miroirs ardents et les lentilles* diverses propriétés des rayons lumineux. De nombreuses expériences astucieuses permettent à Al-Haitham d'établir une théorie sérieuse sur le sujet.
À la fin du XVI^e^ siècle, apparaissent en Italie, ou peut-être aux Pays-Bas, les premières lentilles. Ceci permet à Galilée de découvrir en 1610 des satellites de Jupiter à l'aide de l'une des premières lunettes astronomiques. Christiaan Huygens, mais surtout Isaac Newton, apportent des éléments théoriques à la compréhension de la lumière. Grâce à des prismes et des lentilles, le savant anglais établit la composition de la lumière blanche et explique la présence d'arcs-en-ciel.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les propriétés des lentilles convergentes et divergentes
- Les définitions de la distance focale et de la vergence d'une lentille
- Les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton
- La distance minimale pour former l'image d'un objet réel sur un capteur
- Le modèle de l'œil et les ordres de grandeur de sa limite de résolution et de sa plage d'accommodation
- Le modèle de l'appareil photographique

Ce qu'il faut savoir faire

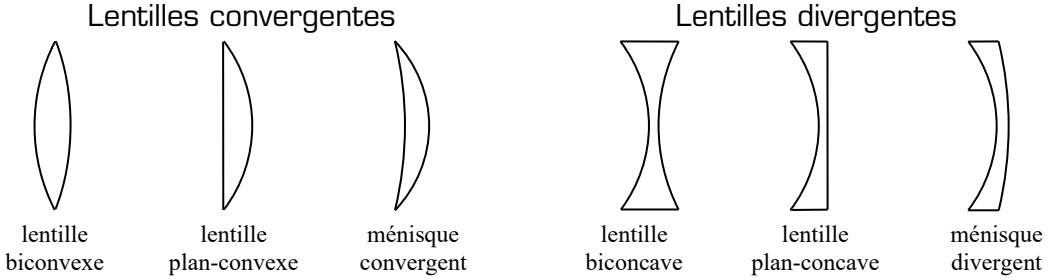
- Construire des rayons lumineux traversant une lentille
- Faire la construction géométrique d'une image, et identifier sa nature réelle ou virtuelle
- Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton
- Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné de l'appareil photographique

■■ Résumé de cours

■ Propriétés d'une lentille

❑ Définition et classification

Une lentille est un système optique centré, constitué d'un milieu transparent homogène et isotrope délimité par deux dioptres sphériques (ou un dioptre plan et un dioptre sphérique).
Les lentilles à bords minces sont **convergentes** ; celles à bords épais sont **divergentes**.
On se limitera aux lentilles minces (dont l'épaisseur est négligeable) utilisées dans les conditions de Gauss.



❑ Caractéristiques d'une lentille mince

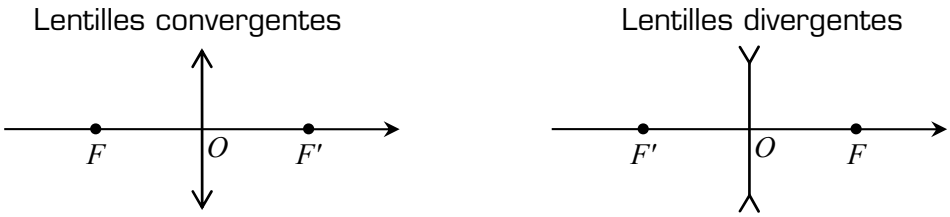
Une lentille mince possède :
– un centre optique O et un axe optique passant par O ;
– un foyer objet F sur l'axe optique, et un foyer image F' symétrique de F par rapport à O.

On note $f = \overline{OF}$ la **distance focale objet** et $f' = \overline{OF'}$ la **distance focale image** (appelée aussi simplement focale).

La **vergence** d'une lentille est $\boxed{V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}}$ et s'exprime en m^{-1} ou dioptries (δ).

V et f' sont positives pour une lentille convergente, négatives pour une lentille divergente.

❑ Schématisation



Par convention, la lumière se propage de la gauche vers la droite sur les schémas.

⇨ **Méthode 2.1. Construction d'un rayon particulier**
⇨ **Méthode 2.2. Construction d'un rayon quelconque**

■ Image donnée par une lentille

❑ Construction graphique

On représente un objet par un segment AB, orthogonal à l'axe, avec A sur l'axe et B au-dessus. On peut déterminer graphiquement les positions des images B' puis A' en traçant au moins deux rayons issus de B. Inversement, on peut aussi déterminer l'objet AB à partir de l'image $A'B'$.

⇨ **Méthode 2.3. Construction graphique d'une image ou d'un objet**

❑ Formules de conjugaison et de grandissement

L'image peut également être déterminée à partir de l'objet (ou inversement) par le calcul, à l'aide des formules de conjugaison (qui relient les positions de A et de A') et de grandissement (qui relient les tailles de AB et de $A'B'$).

Formules de Descartes

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}.$$

Formules de Newton

$$\boxed{\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\overline{OF'}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}}.$$

Le **grandissement (transversal)** $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est souvent noté γ.

⇨ **Méthode 2.4. Détermination d'une image ou d'un objet avec les formules**

❑ Formation d'une image sur un écran

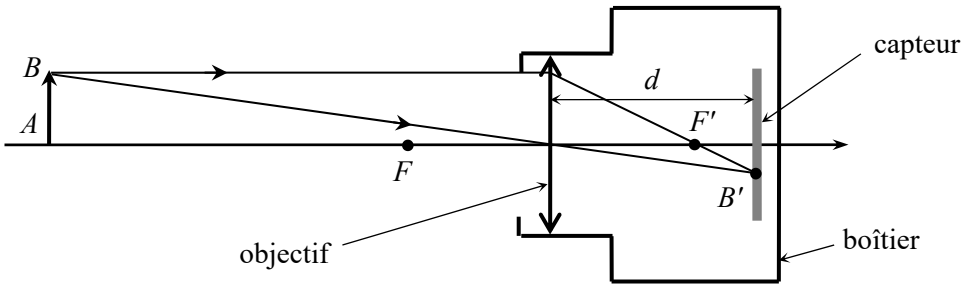
Pour former une image réelle sur un écran, à partir d'un objet réel :
- seule une lentille convergente peut convenir ;
- la distance D entre l'objet et l'écran doit vérifier $\boxed{D \geq 4f'}$.

⇨ **Méthode 2.5. Détermination de la distance minimale de projection**

■ L'appareil photographique

❑ Principe

Un appareil photographique comporte principalement :
- un **objectif**, modélisé par une lentille mince convergente de focale f' ;
- un **capteur** situé derrière la lentille, à une distance d réglable (**mise au point**) entre $d_{\min}$ et $d_{\max}$, en fonction de la distance de l'objet à photographier ; la valeur $d_{\min} = f'$ étant utilisée lorsque l'objet à photographier est à l'infini ;
- un **diaphragme** de diamètre réglable, qui permet de contrôler la quantité de lumière qui pénètre dans l'appareil.



❑ Profondeur de champ

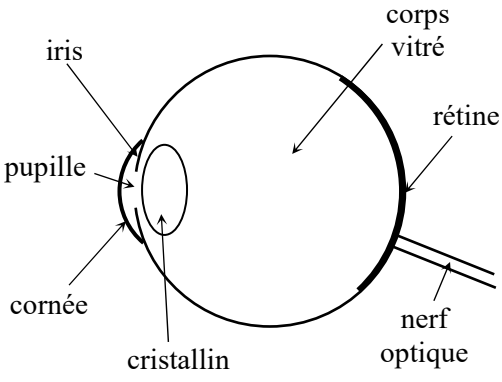
Aucune image n'est rigoureusement ponctuelle, mais l'image d'un point est acceptable si sa taille ne dépasse pas la taille d'un pixel du capteur. Si on effectue la mise au point sur un plan à une distance *D*, les plans situés plus loin ou plus près peuvent donner aussi des images nettes.
La **profondeur de champ** est la distance entre le plan le plus proche et le plan le plus lointain donnant des images nettes. Elle augmente quand la distance de mise au point augmente, quand le diaphragme est moins ouvert, et quand la focale diminue.


Grande profondeur de champ


Faible profondeur de champ

■ L'œil

❑ Description



L'œil humain, vu en coupe, a la structure ci-contre.
– L'iris (partie colorée), percé de la pupille de diamètre variable, permet de contrôler le flux lumineux pénétrant dans l'œil.
– Le cristallin constitue (avec la cornée) une lentille biconvexe dont la courbure peut être modifiée par un muscle, ce qui fait varier sa focale.
– Le corps vitré est une substance fluide transparente.
– La rétine est tapissée de cellules réceptrices : c'est là que se forme l'image (réelle). Ces cellules communiquent alors les informations au cerveau.

Deux points peuvent être vus distinctement si leur écart angulaire est supérieur à $\alpha_{min} = 3 \cdot 10^{-4}$ rad : leurs images se forment alors sur deux cellules distinctes de la rétine.

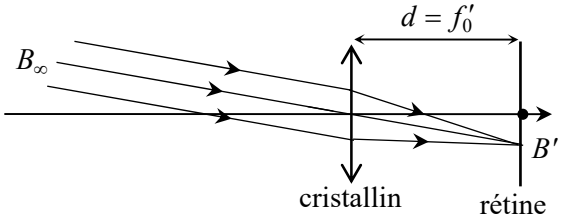
❑ Modélisation

On peut modéliser l'œil par une lentille convergente (cristallin) de distance focale réglable, et un écran (rétine), situés à une distance fixe l'un de l'autre (profondeur de l'œil).

❑ Fonctionnement de l'œil emmétrope

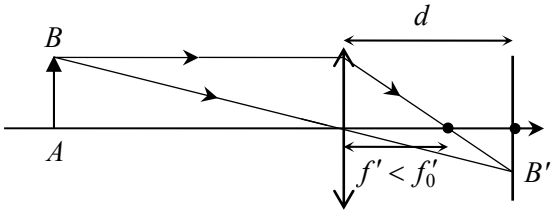
Œil au repos

Un œil **emmétrope** (sans défaut) est réglé, au repos, pour voir des objets à l'infini. L'image se forme sur la rétine et la profondeur de l'œil est alors égale à la focale du cristallin.
Le point que voit un œil au repos est le plus éloigné de l'œil, appelé **punctum remotum** (PR) : il est à l'infini pour un œil emmétrope.



Accommodation

La distance cristallin-rétine est fixe, donc pour voir un objet proche l'œil doit diminuer sa focale, en contractant le muscle associé au cristallin : ce processus est l'**accommodation**.
Lorsque l'œil est en accommodation maximale, le point visible est le plus proche de l'œil, appelé **punctum proximum** (PP).



La distance entre un œil emmétrope et son PP est notée d_m et vaut conventionnellement 0,25 m.
L'intervalle entre le PP et le PR est appelé **plage d'accommodation**.

■ Associations de lentilles

❑ Principe général

Si un système optique est constitué de deux lentilles successives, l'image donnée par la première devient un objet pour la deuxième, qui en donne à son tour une image. Ceci peut être schématisé de la manière suivante :

$$AB \xrightarrow{L_1} A_iB_i \xrightarrow{L_2} A'B'$$

Le grandissement global est alors $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_iB_i}} \times \dfrac{\overline{A_iB_i}}{\overline{AB}}$ soit $\boxed{\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2}$.

Ce fonctionnement se généralise à une association de trois lentilles ou plus.

❑ Théorème des vergences pour des lentilles accolées

Dans le cas où on associe deux lentilles de vergences V_1 et V_2 en les accolant, c'est-à-dire sans laisser d'espace entre elles, on obtient un système équivalent à une seule lentille de vergence V telle que $\boxed{V = V_1 + V_2}$.

⇨ **Méthode 4.6. Détermination de l'image donnée par une association**

❑ Constitution et réglage d'un instrument d'optique

Les instruments d'optique dans lesquels l'œil observe directement sont constitués :
– d'un **objectif** (du côté de l'objet), que l'on peut modéliser comme une lentille convergente de grande focale, et dont le rôle est de donner de l'objet une image intermédiaire agrandie ;
– d'un **oculaire** (du côté de l'œil), modélisé comme une lentille de courte focale, et qui permet de donner de l'image intermédiaire une image finale virtuelle et si possible à l'infini ;
– parfois d'un **réticule**, plaque transparente munie d'une croix ou de graduations, sur laquelle se forme l'image intermédiaire.
Pour régler l'oculaire, on cherche à voir le réticule net *sans accommoder*.
Pour régler l'objectif, on cherche à observer l'image *et* le réticule *nets simultanément*.

❑ Exemples d'instruments d'optique

Loupe

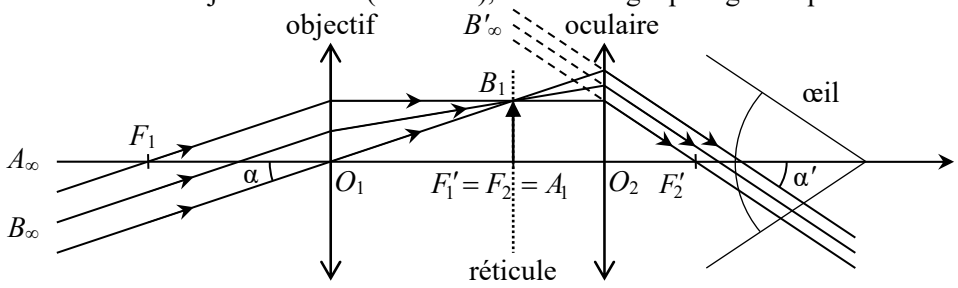
C'est une simple lentille convergente, pour laquelle on place l'objet entre son centre et son foyer objet. Un œil placé de l'autre côté observe donc une image virtuelle, droite et agrandie.
Si l'objet est placé sur le foyer objet de la loupe, l'image finale est à l'infini (cas idéal).

Oculaire

C'est une loupe perfectionnée constituée d'un doublet de lentilles convergentes coaxiales et séparées par une distance d. L'ensemble se comporte comme une unique lentille convergente.
L'intérêt est d'obtenir une loupe plus puissante et une image de meilleure qualité.

Lunette astronomique

Elle sert à observer des objets lointains (à l'infini), sous un angle plus grand qu'à l'œil nu.



L'objectif donne de l'objet AB une image intermédiaire A_1B_1 (renversée), qui doit se former sur le réticule : celui-ci doit donc se trouver en F_1'.
L'oculaire donne ensuite de A_1B_1 une image finale $A'B'$, qui doit être à l'infini : l'image intermédiaire est alors en F_2. Donc F_2 coïncide avec F_1' et la lunette est **afocale**.

Lunette terrestre (ou lunette de Galilée)

Le principe est le même mais l'oculaire est une lentille divergente. Cela permet d'obtenir une image finale droite, et aussi de diminuer l'encombrement.

Viseur à frontale fixe

C'est une lunette réglée pour observer des objets à courte distance d (notamment des images virtuelles données par un autre instrument), d étant fixée par la distance objectif-réticule.
Sur un banc optique, viser un objet consiste à déplacer le viseur sur le banc jusqu'à observer une image nette sur le réticule. On peut alors en déduire la position de l'objet.

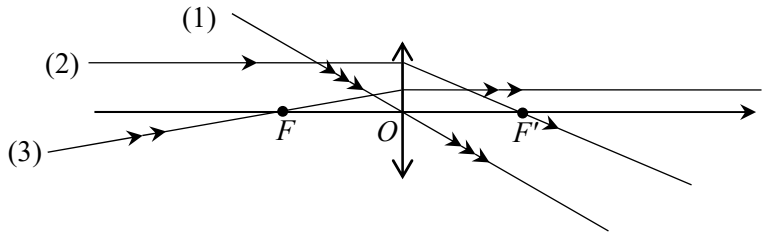
■■ Méthodes

■ Comment construire graphiquement des rayons lumineux ?

❑ Méthode 2.1. Construction d'un rayon particulier

Il existe trois rayons particuliers : les règles suivantes permettent de construire immédiatement le rayon émergent à partir du rayon incident, ou l'inverse.
1) Un rayon incident passant par le centre optique O n'est pas dévié.
2) Si le rayon incident est parallèle à l'axe optique, le support du rayon émergent passe par le foyer image F'.
3) Si le support du rayon incident passe par le foyer objet F, le rayon émergent est parallèle à l'axe.

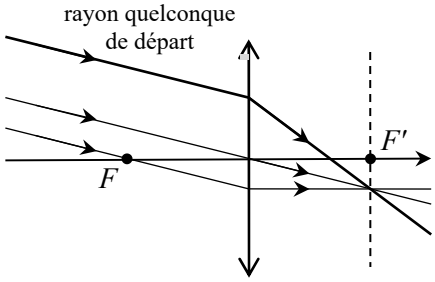
⇨ **Exos minute 2.A, 2.B, Exercices 2.1, 2.6, 2.7, 2.9**

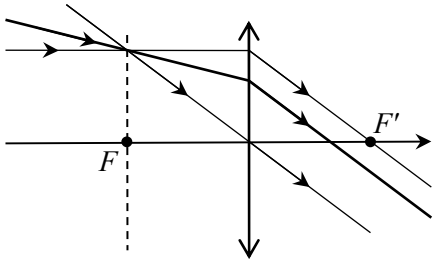


❑ Méthode 2.2. Construction d'un rayon quelconque

Dans le cas d'un rayon quelconque, on peut procéder de deux façons symétriques.
– On choisit l'un des rayons incidents particuliers, parallèle au rayon incident étudié (deux possibilités : celui passant par O ou celui passant par F), et on trace son rayon émergent. Alors ce rayon émergent et celui que l'on cherche se coupent dans le plan focal image.
– On peut aussi choisir l'un des rayons incidents particuliers coupant le rayon incident étudié dans le plan focal objet (deux possibilités également : celui passant par O ou celui parallèle à l'axe), et tracer son rayon émergent. Alors ce rayon émergent et celui que l'on cherche sont parallèles entre eux.

⇨ **Exo minute 2.A, Exercices 2.6, 2.7, 2.16, 2.18**



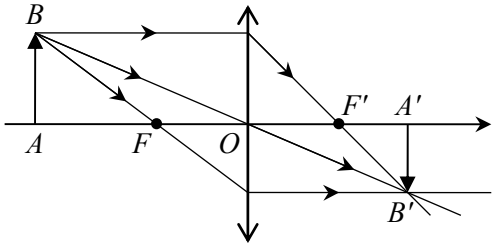


■ Comment déterminer l'image d'un objet par une lentille ?

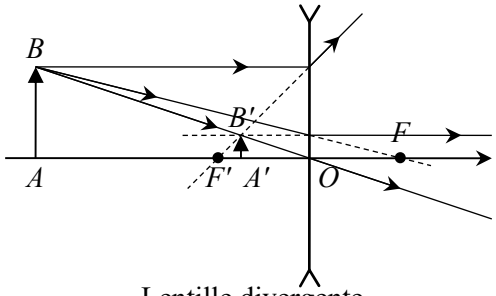
❑ Méthode 2.3. Construction graphique d'une image ou d'un objet

L'objet AB est orthogonal à l'axe, A étant sur l'axe. On cherche l'image $A'B'$. Celle-ci est également orthogonale à l'axe (par aplanétisme de la lentille) et A' est sur l'axe (puisque celui-ci correspond à un rayon particulier).
– On choisit au moins deux rayons incidents particuliers dont les supports passent par B, et on trace les rayons émergents correspondants.
– L'intersection des supports de ces rayons émergents donne B'.
– On projette alors B' orthogonalement sur l'axe pour obtenir A'.
De façon inverse, on peut ainsi obtenir l'objet AB à partir de l'image $A'B'$.

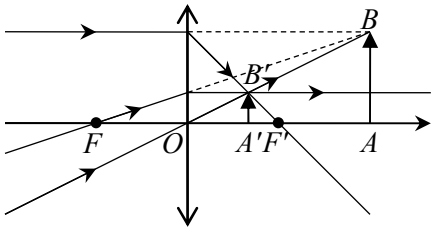
⇨ **Exo minute 2.B, Exercices 2.1, 2.6, 2.9, 2.11, 2.16, 2.18**



Lentille convergente,
objet réel (avant F), image réelle



Lentille divergente,
objet réel, image virtuelle



Lentille convergente,
objet virtuel, image réelle

❑ Méthode 2.4. Détermination d'une image ou d'un objet avec les formules

On peut déterminer la position et la taille de l'image en utilisant les formules de Newton ou de Descartes :
– une formule de conjugaison donne la position de A' (sur l'axe) ;
– une formule de grandissement donne la taille de $A'B'$ à partir de sa position.
Il faut cependant faire attention :
– à l'origine utilisée pour les positions (centre optique dans les formules de Descartes, foyers dans les formules de Newton) ;
– à bien utiliser des *mesures algébriques* et non des distances.

⇨ **Exercices 2.1, 2.2, 2.4, 2.9, 2.12, 2.14, 2.16, 2.18**

Exemple : quelle est l'image d'un objet AB haut de 2,0 cm, placé 80 cm avant une lentille mince convergente, de focale $f' = 20$ cm ?

Les données sont, en mesures algébriques : $\overline{OA} = -80$ cm (objet réel), $\overline{OF'} = +20$ cm et $\overline{AB} = +2{,}0$ cm (si toutes les longueurs sont en centimètres, il n'est pas nécessaire de les convertir en mètres).

Formule de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ d'où $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{OA} + \overline{OF'}}{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}$ soit $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}$. Application numérique : $\boxed{\overline{OA'} = +27 \text{ cm}}$ (image réelle).

La formule de grandissement donne alors la taille de l'image : $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \overline{AB}$.

AN $\boxed{\overline{A'B'} = -0{,}67 \text{ cm}}$ (image renversée et rétrécie).

❑ Méthode 2.5. Détermination de la distance minimale de projection

La distance D entre un objet réel et l'écran où on veut former son image étant fixée, utiliser l'un des formules de conjugaison pour déterminer l'endroit où il faut placer la lentille (convergente). Le calcul montre alors que la condition pour qu'il y ait des solutions est $D \geq 4f'$.

⇨ **Exercice 2.4**

A et A' sont fixés, tels que $\overline{AA'} = D$, et on cherche où placer la lentille, donc le point O : on peut donc prendre comme inconnue $x = \overline{OA}$.

Formule de Descartes : $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ avec $x' = \overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = x + D$, donc $\frac{1}{x+D} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$

d'où l'équation du second degré $x^2 + Dx + Df' = 0$. Discriminant : $\Delta = D^2 - 4Df'$.

Si $\Delta > 0$, soit $\boxed{D > 4f'}$, il y a deux solutions distinctes (soit deux positions possibles de la lentille) : $x = \dfrac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$.

Le cas limite théorique $\Delta = 0$, soit $D = 4f'$, est celui où les deux positions sont confondues.

Si $D < 4f'$, il n'y a aucune solution : il est impossible de former une image réelle d'un objet réel si la distance objet - écran est trop petite (moins de 4 fois la focale).

■ Comment traiter l'association de deux lentilles ?

❑ Méthode 2.6. Détermination de l'image donnée par une association

Considérons l'association coaxiale de deux lentilles L_1 (O_1, f_1') et L_2 (O_2, f_2').

– Si les lentilles sont séparées, la lentille L_1 donne d'un objet AB une image intermédiaire A_1B_1, qui sert alors d'objet à la lentille L_2 qui en donne une image finale $A'B'$. Le grandissement global est alors $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$ soit $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$.

Le choix d'utiliser les formules de Newton ou celles de Descartes se fera en fonction de la situation particulière et des notations de l'énoncé : si par exemple des positions sont définies par rapport aux foyers, ou encore si F_1' est confondu avec F_2, il faudra plutôt utiliser les formules de Newton.

– Si les lentilles sont *accolées*, alors $O_1 \approx O_2$ et l'association est équivalente à une lentille *unique* de centre $O = O_1 = O_2$ et de focale f' telle que $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{f_1'} + \dfrac{1}{f_2'}$. Cela revient à dire que la lentille équivalente a une vergence $V = V_1 + V_2$.

⇨ **Exercices 2.6, 2.7, 2.9, 2.14, 2.16, 2.18**

– Considérons un système optique *afocal* constitué d'un objectif L_1 convergent, de centre O_1 et de focale $f_1' = 20$ cm, et d'un oculaire divergent L_2 de centre O_2 et de focale f_2', avec $O_1O_2 = 15$ cm. On pointe un objet AB de 2 cm situé à 30 cm devant l'objectif. On cherche à calculer $\overline{O_2A'}$ puis $\overline{A'B'}$, position et taille de son image finale.

Nommons les images successives : $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$

On applique deux fois la formule de Newton : $\overline{F_1A} \cdot \overline{F_1'A_1} = -f_1'^2$ et $\overline{F_2A_1} \cdot \overline{F_2'A'} = -f_2'^2$.

Le système étant afocal, l'image d'un point à l'infini sur l'axe par ce système est à l'infini sur l'axe. Or l'image d'un point à l'infini sur l'axe par L_1 est F_1' et le point dont L_2 donne une image à l'infini sur l'axe est F_2. Il en résulte que $F_1' = F_2$.