Guy Bonnaud

Physique de l'interaction laser-plasma

Modèles physiques et numériques



Préface de
Daniel Verwaerde

ellipses

Références sciences

Physique de l'interaction laser-plasma

Modèles physiques et numériques

Guy Bonnaud

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-071834
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Préface

En ce début de troisième millénaire, notre civilisation est en transition parce la planète doit faire face à un réchauffement climatique probablement sans précédent quant à sa vitesse de croissance et que nous considérons que l'importance des rejets de gaz à effet de serre dans l'atmosphère est un contributeur majeur à l'accélération de ce réchauffement. Avec une population qui ne cesse de croître pour atteindre les 10 milliards d'habitants durant le présent siècle, il est devenu impératif de minimiser notre consommation d'énergies carbonées, charbon, pétrole et gaz, y compris naturel, en faisant largement appel aux énergies qui ne contribuent pas à l'effet de serre. Comme il n'est pas question de revivre « comme à l'âge des cavernes », nous devons utiliser des sources d'énergie certes sans carbone mais qui pour certaines soient pilotables, c'est-à-dire qui assurent à tout-un-chacun qu'il pourra bien disposer de l'énergie au moment où il en a besoin. A l'échelle de l'humanité, et pour une disponibilité 365 jours par an, les seules énergies pilotables « sans carbone » sont l'énergie hydraulique et les énergies tirant partie non pas du nuage électronique des atomes mais de leur noyau : la Fission et la Fusion.

La Fission, mise en œuvre au sein des réacteurs électronucléaires, doit permettre d'assurer la suffisance énergétique d'une partie importante de l'Humanité pendant plusieurs millénaires du fait des ressources prouvées en uranium naturel, tandis que la Fusion pourrait elle aussi apporter une suffisance énergétique équivalente parce que les océans recèlent de grandes quantités de deutérium. La maturité de ce second moyen de production d'énergie « nucléaire » n'est cependant pas acquise : la fusion thermonucléaire est aujourd'hui le défi énergétique du XXIe siècle, parce qu'elle est la promesse d'une énergie abondante, disponible et quasiment sans déchets dangereux.

Il suffit de se plonger dans ce nouveau livre de Guy Bonnaud pour comprendre pourquoi la fusion thermonucléaire est beaucoup plus complexe à atteindre et à mettre en œuvre industriellement que la fission : Tout simplement, si j'ose dire, parce que la fusion des noyaux – même la réaction de fusion la plus accessible, la fusion du deutérium et du tritium – nécessite de produire des conditions physiques hors du commun. Et ces conditions sont indispensables pour vaincre les barrières de potentiel répulsives des noyaux entre eux, alors qu'on accède bien plus facilement à la fission, parce que pour le neutron qui va provoquer la réaction, il n'existe aucune barrière électrique à franchir. La température au sein des réacteurs électrogènes se mesure en centaines de Kelvin, alors que les conditions pour accéder à la Fusion sont dans l'échelle des millions de Kelvin, pour autant que cela ait encore un sens de parler de température au moment où la fusion peut se produire.

Cette problématique, cette difficulté à accéder aux bonnes conditions, impliquent pour quiconque veut comprendre la Fusion qu'il ait une bonne connaissance de la physique des plasmas et des moyens – au premier rang desquels le Laser – nécessaires à sa mise en œuvre. Ce nouveau livre, qui est le fruit de plusieurs dizaines d'années

d'enseignement et de recherche au sein du CEA, accompagne l'étudiant dans son parcours de formation en lui présentant l'état actualisé des connaissances en la matière. Cette physique de l'interaction laser-plasma a en effet ceci de merveilleux, à savoir qu'elle n'est pas au bout du chemin, qu'elle est elle-même un livre dont les derniers chapitres sont encore à écrire. Il s'agit probablement de la plus belle des motivations pour de jeunes scientifiques à choisir de devenir un physicien de l'interaction laser-plasma tout autant, *mutatis-mutandis*, que l'astrophysique ou la conquête spatiale ! Remarquons, à ce propos, que l'Astrophysique de laboratoire en est le chaînon commun, puisqu'elle met en œuvre des outils physico-numérique communs avec la fusion par confinement inertiel.

Ce caractère « pas encore achevé » nécessite que l'état documentaire sur la physique des plasmas soit actualisé en permanence, ce que fait cet ouvrage de Guy Bonnaud aujourd'hui. Sa position, son choix éditorial, lui confèrent également un caractère très actuel : il va bien au-delà de la présentation de la physique 0D, toujours indispensable pour que le lecteur appréhende les phénomènes et les ordres de grandeurs, en introduisant une modélisation réaliste où les dimensions géométrique et temporelle jouent un rôle fondamental. Ces dernières conduisent à des équations dont on ne sait pas écrire la solution analytique, nécessitant leur transcription numérique et l'usage de codes de Simulation à mettre en œuvre sur des supercalculateurs : le physicien de l'interaction laser-plasma d'aujourd'hui et surtout de demain devra proposer et mettre en œuvre des expériences sur de très grandes installations telles que les tokamaks ou les lasers, expériences qui seront préparées et interprétées grâce à des outils de simulation numérique.

Pour terminer ces quelques mots, précisons bien que la connaissance de la physique de l'interaction laser-plasma contribue à la quête de la fusion. dans l'état actuel de la technologie, ce sont les tokamaks, au premier des quels ITER, qui sont les candidats pour produire de la fusion à l'échelle industrielle et donc répondre au besoin énergétique de l'Humanité. Les lasers de puissance pour l'expérimentation de la FCI, la fusion par confinement inertiel, sont d'abord et avant tout des outils de laboratoire pour la compréhension de la matière dans tous ses états, dans des conditions de mise en œuvre qu'on ne rencontre normalement pas sur terre. ce sont des laboratoires qui nous ouvrent des perspectives incomparables pour comprendre les états extrêmes de la matière, que l'on ne peut pas généralement appréhender.

un nombre significatif de laboratoires dans le monde s'intéresse à la fusion, par confinement magnétique (tokamak) ou inertiel (laser), mais la communauté de la fusion reste une petite communauté de par le nombre d'individus qui la composent. Le CEA est l'un des rares organismes à contribuer à cette recherche dans toute sa diversité et je ne peux que souhaiter que le présent ouvrage de Guy Bonnaud contribue à la fois au rayonnement de cet organisme et à susciter des vocations parmi les étudiants en Physique.

Daniel Verwaerde,
Ancien Directeur du Programme Simulation du CEA,
Ancien Administrateur Général du CEA

Préambule

Audience

Ce livre est destiné aux étudiants de niveau Master, dans des formations universitaires ou d'écoles d'ingénieur ; il agrège un ensemble de manuels et polycopiés de cours, rédigés pour différents auditoires donc, avec en perspective le monde de la recherche. Son contenu a été enseigné durant de nombreuses années, que ce soit en troisième année dans les écoles Centrale Paris, SupOptique, ENSTA ou dans des formations de deuxième année de Master, autrefois Diplômes d'études approfondies (DEA), centrées sur les plasmas, leur physique et aussi leur environnement rencontré dans les grands équipements de recherche associés. Ces formations ont été ou sont cohabilitées par l'université Paris-Sud, devenue Université Paris-Saclay au début 2020 avec certaines écoles citées plus haut, par l'Ecole Polytechnique et par Sorbonne Université. Formations également développées à une échelle nationale, comme le DEA « Physique des Gaz et des plasmas » puis le Master « Sciences de la fusion » qui dès 2006 a regroupé de nombreux établissements partenaires du territoire national autour de grands infrastructures de recherche à performances uniques et à visibilité internationale, le tokamak ITER et le laser LMJ en cours de construction au moment où ce livre a été rédigé.

Le niveau de formation Master-2 est singulier : pour les étudiants, c'est une rampe de lancement d'un semestre vers une activité de laboratoire pour le stage puis la thèse ou l'activité professionnelle d'ingénieur ; l'enseignement y est dense et réalisé par des enseignants de provenances plus diverses que dans les niveaux de formation antérieurs, Master-1, licence et les deux premières années écoles d'ingénieur : des chercheurs d'organismes de recherche et des labos de R&D d'entreprises se joignent aux universitaires ; la formation laisse moins de place aux travaux dirigés et donc plus de place à des travaux personnels alimentés par une forêt d'informations. Ce livre est donc là pour élaguer, résumer, développer, mettre en cohérence différents phénomènes afin que l'escalier pédagogique puisse avoir des marches régulières et adaptées à des étudiants.

Physique abordée

Ce livre concerne le quatrième état de la matière, là où la brique de base de notre planète, à savoir l'atome, est concurrencée en termes de concentration par des ions et des électrons libres, qui impactent la dynamique et les champs électromagnétiques. La physique de cet état, appelé plasma, relève de l'électromagnétisme de charges libres, non appariées comme dans un atome. Tous les plasmas ne sont pas abordés ; ce livre porte sur ceux créés artificiellement par une source électromagnétique intense singulière, à savoir, le laser, dont le premier a été réalisé en 1960. La physique discutée est donc récente mais le savoir est suffisamment stabilisé pour pouvoir être enseigné au niveau Master.

La cohérence temporelle et spatiale des lasers, leur capacité à générer des impulsions brèves de durée entre la nanoseconde (10^{-9} s) jusqu'à actuellement la femtoseconde (10^{-15} s), les puissances étonnantes accessibles jusqu'au petawatt (10^{15} W) et la facilité de la focalisation de ces impulsions conduisent à des concentrations d'énergie et de puissance totalement hors du champ des conditions terrestres et ressortissant au champ astrophysique ; avec des processus non-linéaires, très rapides et très efficaces pour transférer l'énergie laser incidente en chaleur intense, ou bien en expansion rapide ou en particule énergétiques. Dans ce livre, le domaine spatio-temporel utilisé est borné au millimètre et à la nanoseconde.

Un plasma se crée par ionisation à partir de matière terrestre dans des conditions voisines de la normale thermodynamique. L'ionisation est introduite en début de ce livre mais une fois ce processus présenté, nous considèrerons implicitement que la dynamique du plasma est dominée par les charges libres, en oubliant les aspects associés à la matière neutre, sa polarisabilité sous l'influence d'un champ, et sa dynamique sous la compétition entre ionisation et recombinaison : le livre n'aborde donc pas le contexte des faibles éclairements lasers, où la matière atomique doit toujours être prise en compte. Les modèles abordés ne relèvent pas du quantique, sauf cas explicité en particulier dans le chapitre sur l'ionisation : le livre ne traite donc pas des plasmas suffisamment denses au point de devenir dégénérés. Nous considérons le cadre de la dynamique relativiste des particules, seulement dans le cas de charges indépendantes, tant dans leurs trajectoires que dans le rayonnement associé ; nous ne traitons donc pas ici de la rétroaction de ce rayonnement sur la dynamique conduisant au traitement relativiste de l'ensemble des processus mis en œuvre, dont la propagation des ondes. Cela signifie que ce livre n'aborde pas dans sa globalité les ultra-hautes intensités laser (UHI), domaine des impulsions laser plus brèves et plus intenses ayant démarré de manière fulgurante vers 1990 avec l'invention de la technique d'amplification à dérive de fréquence, qui a valu à ses auteurs, Gérard Mourou et Donna Strickland, le prix Nobel de physique en 2018. Pour le contexte UHI, le savoir est toujours en cours de consolidation au travers de processus qui permettent d'envisager des sources secondaires brèves et intenses d'électrons, d'ions et de rayonnement dont les énergies caractéristiques se situent entre 1 MeV et 1 GeV.

Les processus analysés dans ce livre interviennent dans la quête de la fusion par confinement inertiel ; la recherche associée est active dans plusieurs pays de la planète au travers d'expériences de plus en plus complexes et exigeant de grandes infrastructures de recherche. A cette quête qui rassemble la communauté des physiciens des plasmas, appelés les plasmiciens, est associé un enjeu dépassant celui de cette communauté, ainsi que l'a indiqué en 2010 le physicien Stephen Hawkings répondant à dix questions rapportées par le magazine Time (Luca Zanzi, Massachusetts – USA) dont celle-ci « *Specifically which scientific discovery or advance would you like to see in your lifetime?* » : « *I would like nuclear fusion to become a practical power source. It would provide an inexhaustible supply of energy, without pollution or global warming*. » En résumé, les plasmas étudiés ici vivent sous éclairement laser (ou densité surface de puissance) situé dans la gamme [10^{12}-10^{17}] W.cm^{-2}. Ils ont des énergies thermiques caractéristiques dans la gamme de 1 à 100 keV, ou autrement dit des températures de l'ordre de 10^7 à 10^9 Kelvin. Avec les échelles spatio-temporelles délimitées plus haut,

ces échelles d'énergie finissent de fixer le trépied de la physique utilisé, avec ces unités de temps, de lieu et d'action, pour paraphraser les fondements du théâtre classique.

Ce livre est organisé en une vingtaine de chapitres, dont la séquence suit la chronologie des processus physiques inventoriés jusqu'à la phase finale de la fusion par confinement inertiel, à savoir :

Source laser → Focalisation → Ionisation → Trajectoires → Collisions → Rayonnement → Ondes → Chauffage → Conduction thermique et radiative → Hydrodynamique → Fusion

Des chapitres ne rentrent pas dans cette liste ; ils rapportent des notions transverses à ce premier ensemble et abordent : la taxonomie des plasmas, les modèles fondamentaux de la matière (statistique, hydrodynamique), les méthodes numériques et quelques outils mathématiques.

Contenu et présentation

Ce livre rassemble différents items. Il décrit les modèles théoriques utilisés pour qualifier et mesurer les grandeurs intéressant la physique des plasmas. Il rapporte sur la résolution analytique des équations qui, avec un jeu d'hypothèses plus ou moins simplificatrices, permettent de décrire les processus individuels, de les identifier et de caractériser leur dépendance à différents paramètres. Il rapporte aussi sur les modèles numériques utilisés pour résoudre des modèles complexes couplant plusieurs processus. Le passage entre le continu de la théorie et le discret de la simulation numérique est abordé et les nombreux schémas numériques utilisés présentés. Ce livre fait donc place à une large interface avec l'analyse numérique ; celle-ci fournit la boîte à outils spécifiques et les éléments de leur compréhension en vue de concevoir et qualifier des schémas numériques aptes à résoudre les équations essentiellement différentielles mises en œuvre dans les modèles. Entre méthodes robustes déjà utilisées depuis quelques décennies et donc sur étagère, où le physicien peut se servir, et méthodes plus modernes résultant d'une recherche active en mathématiques, un dialogue riche peut s'établir entre physiciens et mathématiciens ; ce qui oblige le physicien à travailler avec des grandeurs adimensionnées, à distinguer les ordres de grandeur, hors contexte, à se dépouiller de la myriade de phénomènes, grandeurs, pour se concentrer sur le modèle et sur une comparaison des apports entre les différents opérateurs mathématiques décrivant les processus physiques à l'œuvre. Grâce à ces outils numériques encouragés par le spectaculaire progrès informatique depuis le milieu du vingtième siècle, des modèles, beaucoup moins simplifiés que dans l'approche analytique et donc permettant d'aborder une physique plus riche, sont utilisés dans la recherche contemporaine. Les temps de simulation devenus raisonnables permettent de confronter les résultats numériques aux résultats expérimentaux ; et ceci contrairement aux année 1970-1980 où les physiciens devaient faire le grand écart, entre l'expérience résolue au mieux temporellement à la limite de 20 picosecondes (10^{-12} s) et la simulation numérique en géométrie mono- voire bi-dimensionnelle restant en deçà de 1 picoseconde.

Sous-jacent à la simulation numérique traitant des équations générales et donc différentes de celles du modèle analytique lui-même, se profile la validation d'une

théorie et/ou d'une résolution numérique. La précision de la comparaison y est de rigueur pour savoir discriminer l'artefact provenant de l'outil numérique du phénomène physique, l'aboutissement étant dans la validation croisée du modèle théorique et de la simulation numérique, constituant la dialectique du théoricien.

Pour les différents processus décrits, ce livre combine donc caractérisation analytique, illustration avec un modèle numérique simplifié, puis illustration du processus dans un chaîne plus complexe de sous-processus multiples et inter-dépendants obtenus par simulation à l'aide d'un outil numérique plus riche, appelé code numérique. Ce livre est abondamment illustré, essentiellement à l'aide de graphiques visualisant le comportement spatio-temporel ou paramétrique des grandeurs décrites. En parallèle de ce livre, des outils non de dessin mais de calcul et de visualisation ont donc été programmés en différents langages par l'auteur : langage Mathematica® pour l'analytique couplant le calcul formel proprement dit et la visualisation, le langage Visual Basic Application® pour quelques cas et langage Fortran 90® pour les codes numériques couplés à la bibliothèque graphique Bacchus, et son interface dans le langage Postscript®, standard multi-décennal de de visualisation et d'impression. Pour illustrer cette séquence et la hiérarchie des modèles, la réflexion d'une onde plane laser sur un plasma de densité non uniforme fournit un bon exemple :

- la relation de dispersion, pour une réponse linéaire du plasma,
- l'équation d'Helmholtz pour l'expression asymptotique du champ stationnaire,
- l'équation d'onde pour les transitoires de propagation par résolution numérique,
- les équations de Maxwell et de Vlasov via la simulation numérique

Comme toute communauté d'experts, la communauté des plasmiciens a son lexique et ses unités : un chapitre est consacré à la mise en perspective des différentes grandeurs manipulées. Ce livre est écrit en français, mais la science étant massivement partagée depuis la moitié du vingtième siècle au travers d'une langue de communication qui est l'anglais, nous avons choisi de fournir la traduction anglaise (*en italique*) des termes techniques introduits dans ce livre. Par ailleurs, en vue de détailler des points techniques ou bien de rapporter des résultats de simulation numérique, des compléments à ce livre se trouvent sur le site de l'éditeur, ainsi que des figures en couleurs.

Pour terminer, je formule l'espoir que les universaux, les catégories et les figures regroupés dans cet ouvrage, pour reprendre une tirade d'un maître de philosophie chez Molière, vous fassent apprécier cette belle physique des plasmas et la quête de la fusion et, conscients de l'état énergétique du monde, vous fassent dire avec Guillaume Apollinaire « *Il est grand temps de rallumer les étoiles* ».

Saclay, décembre 2021

Table des matières

I. Grandeurs et dimensions **13**

I.1. Unités ... 14
I.2. Constantes fondamentales ... 17
I.3. Grandeurs, grandeurs de référence et valeurs typiques ... 19
I.4. Conversion d'unités ... 26
I.5. Adimensionnement ... 28

II. Source d'énergie : le laser **31**

II.1. Populations des états d'un atome ... 31
II.2. Emission stimulée et absorption ... 35
II.3. Cavité optique ... 35
II.4. Evolutions temporelles couplées ... 36
II.5. Grandeurs électromagnétiques : gain et puissance sortante ... 37
II.6. Blocage (ou couplage) de modes ... 39
II.7. Dérive de fréquence ... 40
II.8. Sources laser de puissance ... 41
II.9. Scenarii d'émission laser ... 44
II.10. Grandes installations laser de puissance ... 57

III. Focalisation et propagation dans le vide **63**

III.1. Optique ondulatoire et diffraction ... 64
III.2. Equation paraxiale dans le vide ... 67
III.3. Focalisation et tache focale ... 71
III.4. Focalisation spécifique à la FCI ... 76
III.5. Conclusion ... 92

IV. Ionisation **95**

IV.1. L'atome isolé ... 95
IV.2. L'ionisation ... 103
IV.3. L'atome/ion dans un plasma ... 121
IV.4. Modèle numérique ... 122

V. Les plasmas **123**

V.1. Matière : distance inter-particule ... 124
V.2. Interaction binaire ... 124
V.3. Interaction collective ... 125
V.4. Caractère quantique : distance de de Broglie ... 128
V.5. Distances d'interaction avec le rayonnement ... 128
V.6. Classification des plasmas ... 129

VI. Trajectoires 135

VI.1. Champs uniformes et statiques ... 136
VI.2. Champs non uniformes et variables ... 146
VI.3. Mouvement dans une onde plane ... 163
VI.4. Force pondéromotrice ... 168

VII. Collisions élastiques 169

VII.1. Lois générales ... 170
VII.2. Collision de deux charges dans le vide ... 180
VII.3. Modèle de collision binaire entre deux particules ... 192
VII.4. Equation de Fokker-Planck ... 192
VII.5. Modélisation stochastique des collisions ... 195

VIII. Rayonnement 197

VIII.1. Unités et dimensions des grandeurs caractéristiques ... 198
VIII.2. Intensité rayonnée et intensité spectrale ... 198
VIII.3. Rayonnement d'une charge mobile ... 201
VIII.4. Spectre de Fourier en pulsation ... 203
VIII.5. Rayonnement par accélération axiale ... 204
VIII.6. Rayonnement synchrotron dans un champ magnétique uniforme ... 206
VIII.7. Rayonnement dans un champ magnétique sinusoïdal ... 223
VIII.8. Diffusion Thomson ... 229
VIII.9. Rayonnement lors des collisions ... 232
VIII.10. Rayonnement d'un plasma ... 238

IX. Couplage champ-plasma : modes propres 245

IX.1. Modes propres ... 246
IX.2. Modèle cinétique du plasma ... 258
IX.3. Modèle hydrodynamique du plasma ... 288

X. Propagation d'une onde transverse 289

X.1. Equation de Helmholtz ... 290
X.2. Indice optique : propagation et absorption ... 291
X.3. Dispersion temporelle ... 292
X.4. Plasma et bremsstrahlung inverse ... 298
X.5. Optique géométrique : rayons optiques ... 301
X.6. Réflexion sur un gradient d'indice ... 305
X.7. Propagation dans un plasma inhomogène suivant une direction ... 314

XI. Couplage non-linéaire et instabilités paramétriques 329

XI.1. Analyse temporelle ... 330
XI.2. Analyse spatio-temporelle : couplage d'ondes ... 345
XI.3. Mode transverse de grande amplitude ... 368
XI.4. Mode longitudinal plasma de grande amplitude ... 391
XI.5. Bilan des instabilités ... 402
XI.6. Analyse WKB ... 403

XI.7. Instabilités absolues 422

XII. Autofocalisation et filamentation 427

XII.1. Réfraction et diffraction 428
XII.2. Mécanismes non-linéaires 429
XII.3. Equation paraxiale dans un plasma 432
XII.4. Puissance d'un faisceau et puissance seuil 433
XII.5. Formalisme de l'eikonale 439
XII.6. Dynamique de la densité : onde acoustique ionique 451
XII.7. Filamentation thermique 462
XII.8. Simulations numériques 465

XIII. Non-linéarités fortes, particules rapides 467

XIII.1. Evolution non-linéaire du couplage à 3 ondes 468
XIII.2. Compétition d'instabilités 481
XIII.3. Onde plasma de forte amplitude 490
XIII.4. Piégeage 500
XIII.5. Déferlement et/ou piégeage 503
XIII.6. Electrons et ions suprathermiques 504

XIV. Hydrodynamique 515

XIV.1. Transport thermique 516
XIV.2. Pression d'ablation 519
XIV.3. Détente et compression d'un fluide 520
XIV.4. Tube de Sod 536
XIV.5. Expansion d'un plasma dans le vide 536
XIV.6. Mise en mouvement d'une cible mince 540
XIV.7. Effet fusée 541
XIV.8. Instabilités hydrodynamiques 543
XIV.9. Problèmes et contrôle 551

XV. Fusion thermonucléaire 553

XV.1. Réactions de fusion 553
XV.2. Taux de réaction 559
XV.3. Gains et pertes 561
XV.4. Bilan énergétique 564
XV.5. Allumage dans le schéma de fusion inertielle 566
XV.6. Le scénario FCI : dynamique de la cible 573
XV.7. Réalisations 578
XV.8. Perspectives 585

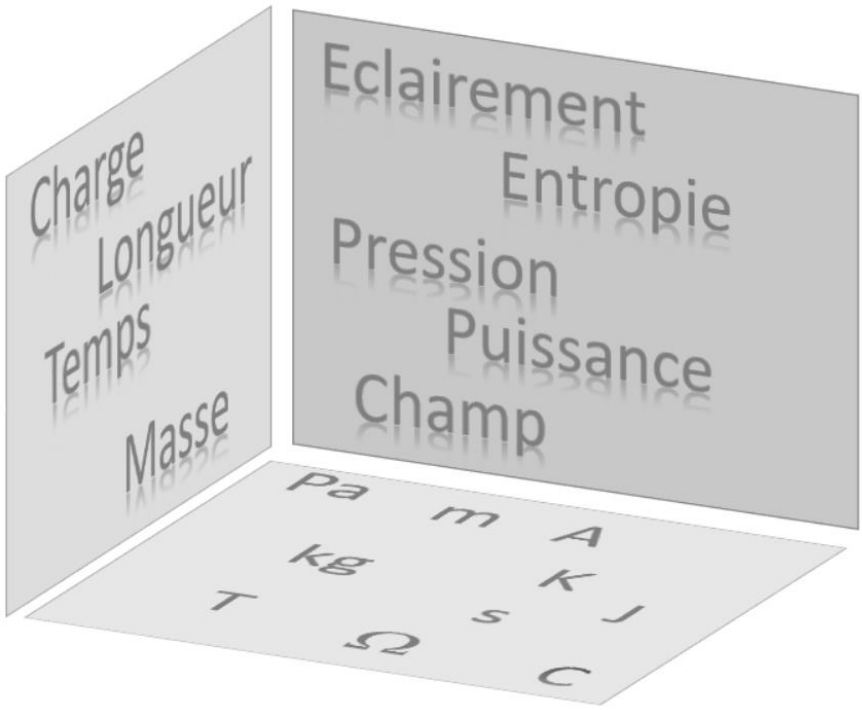
XVI. Modèles numériques 591

XVI.1. La simulation numérique 592
XVI.2. Les modèles de physique des plasmas 599
XVI.3. Analyse numérique 615
XVI.4. Résolution des systèmes linéaires 634
XVI.5. Intégration numérique des équations différentielles ordinaires 634

XVI.6. Modèles cinétiques et équations de Maxwell 634
XVI.7. Modèles hydrodynamiques 669
XVI.8. Modèles de diffusion ou de Schrödinger 685
XVI.9. Modèles d'ondes 698

Table des matières des compléments sur le site de l'éditeur 707
Bibliographie.....709
Index.....717

I. Grandeurs et dimensions



En physique des plasmas, l'extrême variété des conditions de densité, d'énergie fait que les unités usuelles d'une communauté de physiciens ou d'une sous-communauté de plasmiciens obligent à de fréquentes conversions d'unités. Se limiter à l'usage des unités du système international (SI) présuppose que notre contexte est associé à notre perception d'humain : la seconde est idéale pour un battement de cœur, le mètre pour une taille humaine et le kilogramme pour notre perception de la pesée. Mais les échelles atomiques ou bien astrophysiques obligent alors à manipuler de très grands nombres dont les exposants peuvent être de plusieurs dizaines et conduire à des erreurs de représentation de nombres sur calculateur numérique. Ce chapitre passe donc en revue les unités, puis les constantes fondamentales et les constantes secondaires associées. Il aborde ensuite nombre de grandeurs utiles en physique en général et pour les plasmas en particulier, en les accompagnant de grandeurs de référence tirées des constantes fondamentales et d'ordres de grandeur rencontrés dans divers contextes. Ce chapitre se termine avec l'adimensionnement, technique qui permet dans un modèle de repérer l'homogénéité dimensionnelle des expressions mathématiques et de rapporter les grandeurs à étudier aux bonnes grandeurs de référence ; et finalement, de simplifier les équations à résoudre en faisant concrètement disparaître les dimensions des grandeurs et des opérateurs.

La compréhension de l'univers passe par une étape quantitative, fondée sur la notion de grandeur g, qui peut prendre des valeurs variées v en fonction du contexte dans une unité particulière notée U :

$$g = v\,U \qquad \text{noté encore} \qquad g(U) = v$$

A notre disposition actuellement depuis 1960 lors d'une Conférence générale des poids et mesures (la première remontant à 1889), un système d'unités international dit SI ou MKSA, comme mètre kilogramme seconde ampère. Système à sept unités qui inclut les unités Kelvin et Candela et depuis 1971 la mole. Il est devenu le système légal en France seulement en 1961. Nous parlons aussi de système de Giorgi ou MKSA rationalisé, de par la présence de 4π dans les expressions de champs électromagnétiques, cette constante étant associée à l'angle solide sous lequel d'un point nous voyons l'ensemble de l'espace.

Toute grandeur a une dimension qui peut s'exprimer comme un monôme produit des grandeurs fondamentales sous-jacentes, à savoir longueur notée L, masse notée M, temps noté T et intensité I que nous utiliserons ici plutôt sous la forme de la charge notée Q (I = Q/T). Une grandeur est donc identifiable dans un repère à quatre dimensions L M T Q. Un système de grandeurs et d'unités secondaires peut être défini, comme produit de ces quatre grandeurs et unités fondamentales. Nous pouvons dénombrer quelques dizaines de grandeurs manipulées fréquemment en physique et donc ayant reçu un nom spécifique permettant de mieux les identifier. Quelques exemples : énergie W (dimension ML^2T^{-2}), puissance P (ML^2T^{-3}), densité volumique de courant ($L^{-3}QLT^{-1}$), vitesse (LT^{-1}), ….

Un aparté sur le principe du rasoir d'Ockam (Ockam était un franciscain (1285-1349) philosophe logicien et théologien scolastique anglais). Il précise simplement : rien ne sert de multiplier les êtres sans nécessité. Ceci conduit à un principe de parcimonie de la pensée, où pour chaque type de grandeur il nous faut trouver une grandeur de référence. Cette recherche s'appelle adimensionner. Chaque grandeur est manipulée à travers le rapport de sa valeur et de la grandeur de référence. Comment choisir une telle grandeur : en deux étapes, par le choix de paramètres de base associés au contexte étudié puis la définition de ces paramètres par rapport à un jeu pertinent de constantes fondamentales.

I.1. Unités

I.1.1 Unités SI de référence

Grandeur de base	Unité SI	Dimension
Masse	kilogramme (kg)	M
Longueur	mètre (m)	L
Temps	seconde (s)	T
Intensité de courant	ampère (A)	I
Température	kelvin (K)	K
Intensité lumineuse	candela (Cd)	$M\,L^2\,T^{-3}$

		1/683 = 1.47 10^{-3} W/sr à λ = 0.556 μm
Nombre	mole (mole)	

Grandeur supplémentaire	Unité SI	Dimension
Radian	rad	
Stéradian	sr	

Grandeur dérivée	Unité SI (symbole)	Dimension
Fréquence	hertz (Hz)	T^{-1}
Activité	becquerel (Bq)	T^{-1}
Dose absorbée	gray (Gy)	$L^2 T^{-2}$
Equivalent de dose	sievert (Sv)	$L^2 T^{-2}$
Force	newton (N)	$M L T^{-2}$
Energie	joule (J)	$W \equiv M L^2 T^{-2}$
Puissance	watt (W)	$M L^2 T^{-3}$
Pression	pascal (Pa)	$M L^{-1} T^{-2}$
Viscosité dynamique	poiseuille (Pl) = Pa.s	$M L^{-1} T^{-1}$
Quantité d'électricité	coulomb (C)	$T I \equiv Q$
Potentiel électrique	volt (V)	$M L^2 T^{-3} I^{-1} \equiv U$
Induction magnétique	tesla (T)	$M T^{-2} I^{-1}$
Capacité électrique	farad (F)	$M^{-1} L^{-2} T^4 I^2 = Q U^{-1}$
Résistivité électrique	ohm (Ω)	$M L^2 T^{-3} I^{-2} = U I^{-1}$
Conductivité électrique	siemens (S)	$M^{-1} L^{-2} T^3 I^2 = I U^{-1}$
Inductance	henry (H)	$M L^2 T^{-2} I^{-2}$
Flux magnétique	weber (Wb)	$M L^2 T^{-2} I^{-1}$

I.1.2 Unités secondaires

Grandeur	Unités secondaires (symbole)	Valeur en unité SI
Masse	uma (unité de masse atomique)	10^{-3} kg/N_{Av} = m_p
Longueur	parsec (pc)	3.086 10^{16} m = 3.26 al
	année-lumière (al)	9.46 10^{15} m
	unité astronomique (UA)	1.496 10^{11} m
	didot	3.76 10^{-2} m
	pica	4.217 10^{-3} m
	point	3.515 10^{-4} m
	angström (Å)	10^{-10} m
	fermi (fm)	10^{-15} m
Surface	darcy	0.98 10^{-12} m^2
	barn	10^{-28} m^2
Volume	baril	0.159 m^3

Temps	heure jour année	3 600 86 400 $3.15\ 10^7$
Force	kilogramme-force	9.81 N
Energie	quad	$1.054\ 10^{18}$ J
	tep (tonne équivalent pétrole) (= toe – ton of oil equivalent)	$4.1868\ 10^{10}$ J
	tec (tonne équivalent charbon)	2/3 tep
	baril-brut	$6\ 10^9$ J
	thermie	$4.186\ 10^6$ J
	kWh	$3.600\ 10^6$ J
	grande calorie (Cal)	$4.18\ 10^3$ J
	british thermal unit (btu)	$1.054\ 10^3$ J
	calorie (cal)	4.18 J
Puissance	cheval-vapeur (CV)	$7.375\ 10^2$ W
Flux	lumen	$1.47\ 10^{-3}$ W à $\lambda = 0.556$ µm
Eclairement	lux	1 lm/m^2
Pression	bar	$1.013\ 10^5$ Pa
Viscosité dynamique	poise	0.1 Pa.s
Viscosité Cinématique	Stokes	10^{-4} m^2/s
Quantité d'électricité	faraday	N_{Av} e = 96 495.3415 C
Moment dipolaire	debye	1/3 10-29 C.m

I.1.3 Définition des unités de référence

- mètre : longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 s. Sa définition a été adoptée en 1983. Il en résulte que c = 299 792 458 m/s.
- seconde : durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de ^{133}Cs au repos (fréquence notée $\Delta\nu_{Cs}$), à une température de 0 K. Sa définition a été adoptée en 1967.
- kilogramme : masse du prototype international du kilogramme, à savoir un cylindre en platine iridié (90 % de platine et 10% d'iridium) de 39 mm de diamètre et 39 mm de haut. C'était la référence depuis 1889. En 2019, il devient $1.4521475\ 10^{40}$ fois ($= h\Delta\nu_{Cs}/c^2$) la masse équivalente à l'énergie ondulatoire d'un photon émis par un atome de ^{133}Cs se propageant dans le vide.
- ampère : intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2\ 10^{-7}$ N/m. Cette définition a été adoptée en 1948. En 2019, l'ampère correspond à $1/e = 10^{19}/(1.602\ 176\ 634)$ électrons par seconde

- kelvin : fraction 1/273.16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau. Cette définition a été adoptée en 1967. En 2019, il correspond à une augmentation d'énergie de $1.380649.10^{-23}$ J.
- mole : quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0.012 kg de ^{12}C. En 2019, elle a été redéfinie par rapport à une sphère de silicium pur de quelques centimètres de diamètre.
- candela : intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540 10^{12} Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 W/sr. Unité adoptée en 1979.

I.2. Constantes fondamentales

La compréhension de l'univers au travers des formalismes, des plus anciens aux plus récents, de la mécanique, de l'électromagnétisme, de la mécanique quantique, de la mécanique relativiste, nous donne des constantes fondamentales c, m_e, m_p, e, ε_0, h. Le formalisme de la relativité générale nous donne également la constante fondamentale de la gravitation G. A partir de ces constantes, nous pouvons extraire des grandeurs fondamentales (distances, temps, énergies, …). (cf. site du National Institute of Standards and Technology). Les valeurs ci-dessous sont celles redéfinies à compter du 20 mai 2019, suite à une nouvelle conférence générale des poids et mesures qui a souhaité prendre en compte l'amélioration notable et récente de la précision des mesures.

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2.997\ 924\ 58\ 10^{8}$ m/s
Masse électronique	$m_e = 9.109\ 381\ 88\ 10^{-31}$ kg
Masse proton	$m_p = 9.10938188\ 10^{-31}$ kg = 1836.152 6675 m_e
Charge électronique	$e = 1.602\ 176\ 634\ 10^{-19}$ C
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 10^7/4\pi c^2$ F/m
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m
Constante de Planck	$h = 6.626\ 070\ 15\ 10^{-34}$ J.s
Constante de Boltzmann	$K = 1.380\ 649\ 10^{-23}$ J/K
Constante de la gravitation	$G = 6.673\ 10^{-11}$ $m^3/kg/s^2$
Nombre d'avogadro	$N_{Av} = 6{,}022\ 140\ 76\ 10^{23}$

En tant que terrien, nous pouvons ajouter une autre constante :

Accélération gravitationnelle	$g = G\ M_T/R_T^2 = 9.8066$ m/s² (M_T : masse terre, R_T : rayon terre)

Cherchons à les combiner, en écartant ici la constante de gravitation et la masse du proton. Pour une combinaison f de la forme :

$$f = \eta\ c^{\alpha}\ m_e^{\beta}\ \varepsilon_0^{\gamma}\ e^{\delta}\ h^{\varepsilon} \qquad \text{(I-1)}$$

où η est un coefficient multiplicatif sans dimension, nous trouvons la dimension :

$$[f] = M^{\beta-\gamma+\varepsilon}\ L^{\alpha-3\gamma+2\varepsilon}\ T^{-\alpha+2\gamma-\varepsilon}\ Q^{2\gamma+\delta} \qquad \text{(I-2)}$$

Chercher une grandeur particulière de dimension $M^{p_1}L^{p_2}T^{p_3}Q^{p_4}$ revient à déterminer un quintuplet d'exposants $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$ à l'aide des quatre équations :

$$\beta - \gamma + \varepsilon = p_1$$
$$\alpha - 3\gamma + 2\varepsilon = p_2$$
$$-\alpha + 2\gamma - \varepsilon = p_3$$
$$2\gamma + \delta = p_4$$

Il y a donc une infinité de solutions. En supprimant la dépendance par rapport à une constante fondamentale (son exposant est mis à 0), il reste quatre exposants à trouver pour lesquels cette fois il y a une solution unique. Noua arrivons à :

$$f = \eta\, c^{-p_2-2p_3}\, m_e^{\,p_1-p_2-p_3}\, e^{p_4}\, h^{p_2+p_3} \left(\frac{c\varepsilon_0 h}{e^2}\right)^{\gamma} \qquad \text{(I-3)}$$

Ci-dessous, nous indiquons quelques choix donnant lieu aux grandeurs fondamentales les plus connues.

- <u>Grandeur sans dimension</u> : $(p_1,p_2,p_3,p_4) = (0,0,0,0)$. Nous en déduisons : $\beta = 0$, $\gamma = \varepsilon$, $\alpha = \gamma$, $\delta = -2\gamma$. Choisissant γ comme paramètre libre, nous avons :

  $$f = \eta \left(\frac{c\varepsilon_0 h}{e^2}\right)^{\gamma}$$

  Le choix $\gamma = -1$, $\eta = ½$ conduit à la constante de structure fine $\alpha_f = e^2/2c\varepsilon_0 h$.
- <u>Longueur</u> : $(p_1,p_2,p_3,p_4) = (0,1,0,0)$. Nous choisissons γ comme paramètre libre. Ce qui donne :

  $$f = \eta\, c^{-1}\, m_e^{-1}\, h \left(\frac{c\varepsilon_0 h}{e^2}\right)^{\gamma}$$

  - Choix $\gamma = 0$, $\eta = 1$. Nous trouvons la longueur d'onde Compton $\lambda_C = h/m_e c$
  - Choix $\varepsilon = 0 \Rightarrow \gamma = -1$, $\eta = 1/4\pi$, nous trouvons le rayon classique de l'électron $r_e = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e c^2$
  - Choix $\varepsilon = 2 \Rightarrow \gamma = 1$, $\eta = 1/\pi$. Il donne le rayon de l'orbite de Bohr $r_B = r_e/\alpha_f^2$
- <u>Temps</u> : $(p_1,p_2,p_3,p_4) = (0,0,1,0)$. Avec γ comme paramètre libre, nous trouvons :

  $$f = \eta\, c^{-2}\, m_e^{-1}\, h \left(\frac{c\varepsilon_0 h}{e^2}\right)^{\gamma}$$

  - Choix $\gamma = 2$, $\eta = ½$: nous trouvons la période de l'orbite de Bohr (ou son inverse, à savoir la pulsation de Bohr) :

  $$T_B = \frac{1}{2}\frac{h}{m_e c^2}\frac{1}{\alpha_f^2} \;\Rightarrow\; \omega_B = \frac{2\pi}{T_B} = 4\pi\frac{m_e c^2}{h}\alpha_f^2$$

- <u>Energie</u> : $(p_1,p_2,p_3,p_4) = (1,2,-2,0)$. Avec γ comme paramètre libre, il vient :

  $$f = \eta\, m_e c^2 \left(\frac{c\varepsilon_0 h}{e^2}\right)^{\gamma}$$

  - Choix $\gamma = 0$, $\eta = 1$: nous trouvons l'énergie de l'électron au repos : $m_e c^2$
  - Choix $\gamma = -2$, $\eta = ¼$: nous trouvons l'énergie de Rydberg : $\alpha_f^2\, m_e c^2$

I.3. Grandeurs, grandeurs de référence et valeurs typiques

Le tableau ci-dessous liste l'ensemble des grandeurs utilisées en physique des plasmas, en tentant l'exhaustivité. Une grandeur est introduite sur deux lignes structurées pour avoir sous forme compacte la grandeur, les relations usuelles qui la relient aux autres grandeurs, les valeurs extraites de grandeurs fondamentales et enfin des valeurs rencontrées dans des contextes très variés : vie courante, astrophysique, plasmas, … Nous avons ci-dessous rassemblées des grandeurs associées à notre contexte terrestre :

- M_T : masse de la terre, R_T : rayon terrestre.
- $P_0 = 101325$ Pa : pression atmosphérique normale, $T_0 = 273.15$ K température normale.
- M_O : masse solaire.
- n_c : densité volumique 10^{27} m^{-3}. Cette densité d'électrons dans un plasma est la densité minimale qui interdit la pénétration d'une onde électromagnétique de longueur d'onde 1 μm.

Dans les cases « Dimension » du tableau ci-dessous, le symbole W peut apparaître : il se réfère à la dimension de l'énergie. Les cases entourées d'un double filet rassemblent des grandeurs spécifiquement électromagnétiques.

Grandeur (unité SI)	**Dimension**	**Grandeurs fondamentales avec valeur en SI, sauf quand unité indiquée**
	Relation avec autres grandeurs	Valeurs typiques nature ou labo
Sans dimension		Constante de structure fine : $\alpha_f = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc} = \frac{1}{137.036}$ 1 mole = Nombre d'Avogadro : $N_{Av} = 6.022\ 141\ 99\ 10^{23}$ Nombre baryons de l'univers : $c^3/(Gm_pH_0) \approx 10^{80}$
Masse	M	Masse électron : $m_e = 9.11\ 10^{-31}$ Masse proton : $m_p = 1.67\ 10^{-27}$ Masse de Planck $M_P = \frac{\hbar}{c\lambda_P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.18\ 10^{-8}$
		Soleil : $M_O = 2\ 10^{30}$ Terre : $m_T = 5.98\ 10^{24}$ Lune : $7.38\ 10^{22}$
Longueur (m)	L	Rayon classique de l'e^- : $r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2.82\ 10^{-15}$ Longueur de Compton : $\lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{r_e}{\alpha_f} = 3.862\ 10^{-13}$

		Rayon de Bohr : $r_B = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{r_e}{\alpha_f^2} = 5.29\ 10^{-11}$ Longueur de Planck : $\lambda_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.61\ 10^{-35}$
		Longueur de Loschmidt : $\ell_{los} = (V_{mol}/N_{av})^{1/3} = 3.3\ 10^{-9}$ Rayon terrestre : $R_T = 6.378\ 10^6$ Rayon de Schwarzschild : $r_P = GM/c^2 = 2\ 950\ M/M_O$
Surface, section efficace (m^2)	L^2	Section efficace de Thomson : $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3 = 6.65\ 10^{-29}$ Surface de l'orbite de Bohr : $\pi r_B^2 = 8.80\ 10^{-21}$
Volume (m^3)	L^3	Volume de la sphère de Bohr : $4\pi r_B^3/3 = 6.21\ 10^{-31}$
		Volume molaire : $V_{mol} = \frac{P_0}{RT_0} = 22.4$
Nombre d'onde (m^{-1})	L^{-1}	Nombre de Rydberg : $\frac{U_B}{hc} = \alpha_f^2 \frac{m_e c}{2h} = 1.097\ 10^7$
Densité volumique (m^{-3})	L^{-3}	$1/r_e^3 = 4.47\ 10^{43}$ $1/r_B^3 = 6.75\ 10^{30}$ Nombre de Loschmidt : $N_L = N_{Av}/V_{mol} = 2.69\ 10^{25}$ e^- libres dans SiO_2 300 K : $1.5\ 10^{16}$
		Eau : densité molécules H_2O : $3.32\ 10^{28}$ Al : densité électrons : $7.77\ 10^{29}$ SiO_2 : densité électrons : $8.97\ 10^{29}$ Densité électrons critique pour onde EM longueur d'onde λ_0 : $n_c = 10^{27}/\lambda_0^2(\mu m)$
Temps (s)	T	$r_e/c = 9.40\ 10^{-24}$ Période de Bohr : $T_B = \frac{2\pi r_B}{v_B} = \frac{h}{\alpha_f^2 m_e c^2} = 1.52\ 10^{-16}$ Temps de Planck : $T_P = \lambda_P/c = 5.59\ 10^{-44}$ Age de l'univers : $1/H_0 = 4.3\ 10^{17}$
		Période onde longueur d'onde 1 μm : $3\ 10^{-15}$
Impulsion spécifique (s)	T	
	$\frac{F}{\dot{m}\ g} = \frac{v_{ex}}{g}$	$\rightarrow \dot{m}$ débit massique, v_{ex} vitesse d'expulsion $\sqrt{\frac{KT_0}{m_p g^2}} = 153$

		Propulseur : durée où un kg de combustible expulsé produit 9.8 N : Ariane 5, navette spatiale : 450 Turboréacteur Boeing-747 : 6 000 Plasma : 30 000
Fréquence, activité nucléaire : ν (s^{-1})	T^{-1}	Constante Hubble : $H_0 = 7\ 10^4$ m/(s.Mparsec) = $2.32\ 10^{-18}$
		Transition ^{133}Cs entre 2 nivaux hyperfins : $\Delta\nu = 9.19\ 10^9$
Pulsation : ω ($rd.s^{-1}$)	T^{-1}	Pulsation de Bohr : $\omega_B = \frac{\pi m_e e^4}{2\varepsilon_0^2 h^3} = \alpha_f^2 \frac{m_e c^2}{\hbar} = \frac{2U_B}{\hbar} = \frac{2\pi}{T_B}$ = $4.13\ 10^{16}$
	$\omega = 2\pi\ \nu$	Constante de Gauss : $2\ 10^{-7}$ = 0.017 rad/jour
Vitesse : v (m/s)	LT^{-1}	Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.00\ 10^8$ Vitesse de Bohr : $\frac{v_B}{c} = \frac{m_e v_B}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c r_B} = \frac{\lambda_c}{r_B} = \alpha_f$
		Vitesse sonore atmosphère à T_0 : 331
Accélération (m/s^2)	LT^{-2}	$c^2/r_e = 3.19\ 10^{31}$ $v_B^2/r_B = 9.04\ 10^{22}$
		Accélération terrestre : g = 9.81
Masse volumique : ρ (kg/m^3)	ML^{-3}	Atome de Bohr : $\frac{m_p}{r_B^3} = 1.13\ 10^4$
		Centre naine blanche : 10^{13} Osmium : $2.26\ 10^4$ Aluminium sur terre : $2.7\ 10^3$ Atmosphère terrestre : $2N_{Av}m_p(0.8x14 + 0.2x16)/V_{mol}$ = 1.29 Matière galactique dans l'univers : $2\ 10^{-28}$
Impulsion : p (kg.m/s)	MLT^{-1}	$m_e c = 2.73\ 10^{-22}$ $m_e v_B = 2\ 10^{-24}$
	$p = m\ v$	
Moment cinétique : $\mathcal{M}$ ($kg/m^2/s$)	ML^2T^{-1}	h $r_B\ m_e\ \alpha_f c = \hbar = 1.05\ 10^{-34}$
	$\mathcal{M} = r\ p$	Volant d'inertie diamètre 0.2 m, 30 000 tours/min : $\mathcal{M} = 9110$
Force, poussée : F (N)	MLT^{-2}	$m_e c^2/r_e = 29.1$ Force de Bohr : $e^2/(4\pi\varepsilon_0\ r_B^2) = 8.24\ 10^{-8}$
	$F = W/L$	Fusée Saturn V au décollage – 1er étage : $3.3\ 10^7$
Impédance mécanique : Z	MT^{-1}	$c^3/G = 4.04\ 10^{35}$

(kg/s)		
	$Z = F/v$	
Impédance acoustique : Z (Pa.s/m)	$ML^{-2}T^{-1}$	
	$Z = \text{Pression}/v$ $Z = \rho c_s$	Air 20°C : 413. Eau : 1.5 10^6. Graisse : 10^6
Energie : W (J)	$W \equiv ML^2T^{-2}$	$m_e c^2 = 511$ keV $h\nu_C = \frac{hc}{\lambda_C} = \frac{hc}{\hbar} m_e c = 2\pi m_e c^2$ Energie de Bohr ou de Rydberg : $U_B \equiv U_{Ry} = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = 13.6 \text{ eV} \Rightarrow \frac{U_{Ry}}{m_e c^2} = \frac{\alpha_f^2}{2}$ Energie de Planck : $M_P c^2 = 1.96\ 10^9$ Température Hawking : $K_B T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}$ avec M masse trou noir $\Rightarrow$ 0.12 µK M/M_O
	$W = mv^2$ $W = QU = CU^2 = Q^2/2C$	Eruption à la surface solaire : 10^{26} Séisme magnitude Richter 9.5 : 1.1 10^{19} Production électrique France (2018) : 2 10^{18} Rayon cosmique : énergie/nucléon : 10^{-10} à 10^{-6} Energie de Fermi pour e^- dégénérés : $\frac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi^2 n_e)^{2/3}$ Al : 30.8 eV
Puissance, flux : P (W)	$P \equiv W\ T^{-1} = M\ L^2T^{-3}$	Puissance Compton : $P_c = \frac{m_e c^2}{r_e/c} = 8.71\ 10^9$
	$P = WT^{-1}$ $P = UI = RI^2 = U^2/R$	Soleil : 3.83 10^{26} Puissance solaire arrivant sur terre : 1.7 10^{17} Moteur moléculaire (100 ATP/s) : 10^{-17}
Luminance : L ($W/m^2/sr$)	MT^{-3}	
	$L = \frac{P}{r^2\ \Omega}$	Surface solaire : 1.65 10^9 Cd/m² Soleil vu à travers l'atmosphère : 1.6 10^8 Cd/m^2 Pleine lune vue au zénith : 3 10^4 Cd/m^2 Soleil au niveau du sol : 3 10^4 Cd/m^2
Intensité lumineuse : I (W/sr)	$M\ L^2T^{-3}$	
	$I = \frac{P}{\Omega}$	Phare marine : 3 10^5 Cd Lampe incandescence 100 W : 150 Cd
Éclairement : I (W/m^2)	MT^{-3}	$m_e/(c/r_e)^3 = 1.10\ 10^{39}$ $U_{Ry}/(r_B/c)/r_B^2 = 4.4\ 10^{21}$

		Schwinger : $I_{Sch} = \varepsilon_0 E_{Sch}^2 = 4.6\ 10^{29}$ W/cm^2 $n_c m_e c^2 = 2.45\ 10^{18}$ W/cm^2
	$I = \frac{P}{r^2}$	Ionisation gaz rare : 10^{14} W/cm^2, solide : 10^9 W/cm^2 Rayonnement solaire maximal au sol : 0.14 W/cm^2, 10^5 lux Rayonnement pleine lune : 0.25 lx
Pouvoir d'arrêt (J/m)	MLT^{-2}	$m_e c^2 / r_e = 29.05$ $m_e v_B^2 / r_B = 8.24\ 10^{-8}$ $m_e c^2\ r_e^2 / (2r_B)^3 = 0.0342$ MeV/cm
	ρR	α 1 MeV dans eau = 2 000 MeV/cm H^+ 1 MeV dans eau = 300 MeV/cm e^- 1 MeV dans eau = 2 MeV/cm
Energie spécifique, Dose rayonnt ionisant (J/kg = Gray)	$WM^{-1} = L^2T^{-2}$	$c^2 = 8.99\ 10^{16}$
		Fusion DT : 17.6 MeV/(5 m_p) = $3.26\ 10^{14}$ Fission U naturel : $4.2\ 10^{11}$ Combustion gazole : $4.3\ 10^7$ Chaleur latente vaporisation eau : $2.25\ 10^6$ Batterie Pb-H_2SO_4 : $6.1\ 10^5$
Pression : P (Pa = N/m^2 = J/m^3)	$WL^{-3} = ML^{-1}T^{-2}$	$U_{Ry}/r_B^3 = 1.47\ 10^{13}$ Module Young matériau isotrope : 2 U_{Ry}/r_B^3
	$P = nK_BT$ $P = \varepsilon_0 E^2/2$	Milieu dégénéré : $P = h\ (3n/4\pi)^{1/3}$ Fusion inertielle allumage cible DT : 100 Gbar = 10^{16} Module d'Young Fe : $1.96\ 10^{11}$ Pression au centre de la terre : $3.61\ 10^{10}$ Béton haute performance : résistance à compression : $2\ 10^8$ Combustion gaz naturel : $3.89\ 10^6$ Oreille : seuil d'audition, de douleur : $2\ 10^{-5}$, 63 Tactile : pression seuil douleur : 1.8 N/mm^2 pression idéale : 510^5 Soleil sur terre : max = $4\ 10^{-6}$
Fluence, tension superficielle, adhésion (J/m^2)	$WL^{-2} = MT^{-2}$	$U_{Ry}/r_B^2 = 778$
		Hg : 0.475. Eau (20°) : 0.073. Huile olive : 0.033 ^{4}He : $1.2\ 10^{-5}$ (à 5 K), $2.8\ 10^{-3}$ (à 15 K) Assemblage collé : 10^{2-3}

		Fluences admissibles par l'œil : 5 10^{-6} J/cm^2 (1.06 μm), 10^{-6} (1.54 μm), 10^{-2} (10.6 μm)
Diffusivité thermique : D (m^2/s)	L^2T^{-1}	$r_B^2/T_B = 3.68\ 10^{-5}$
	$D = \frac{\kappa}{\rho C_p}$	Cu 25 °C : 1.11×10^{-4} Verre : $3.4\ 10^{-7}$
Conductivité thermique : κ (W/m/K)	$WT^{-1}L^{-1}K^{-1}$	$K_B/(T_B r_B) = 3.43\ 10^3$
	$\kappa = \frac{P}{r\,T}$	Diamant : 2600 Al : 237, Cu : 390 Verre : 1.2
Chaleur spécifique, capacité thermique : C (J/kg/K)	$WM^{-1}K^{-1}$	$K_B/m_p = 8.25\ 10^3$
		Capacités isobares : max pour H : $1.4\ 10^4$, min pour Ra : 94 Al : 899. Eau : $4.18\ 10^3$
Dureté : (kg/m/s^2)	$ML^{-1}T^{-2}$	
		Fe : dureté Vickers $6.08\ 10^8$
Viscosité cinématique : ν (m^2/s)	L^2T^{-1}	$cr_B^2 = 8.40\ 10^{-13}$
		eau à 15° : $1.3\ 10^{-6}$
Viscosité dynamique : η (Pa.s)	$WL^{-3}T$ = $ML^{-1}T^{-1}$	$mc/r_B^2 = 9.75\ 10^{-2}$
	$\eta = \rho\,\nu$	eau(0°) : $1.8\ 10^{-3}$, eau(20°) : 10^{-3}, eau(100°) : $2.84\ 10^{-4}$ glycérine(20°) : 0.83, air(20°) : $1.8\ 10^{-5}$ He II à 1.6 K : 12.7
Émittance : (m^2)	L^2	
Entropie (J/K/mole)	$ML^2T^{-2}K^{-1}$	$N_{Av}K_B = R = 8.31$
		Al à 25 °C : 28.3 Quartz à 25 °C : 41
Dipôle électrique : D (C.m)	LQ	$er_B = 8.48\ 10^{-30} = 2.54$ debye

	$U = \frac{D}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$	Eau : 1.86 debye = $6.2\ 10^{-30}$ HCl : 1.03 debye =
Polarisation : P ($C.m^{-2}$)	$L^{-2}Q$	$e/r_B^2 = 57.2$
	$P = \varepsilon_0\chi E = n\ D$	Eau : $P = 3.32\ 10^{28}$. 1.84 1/3 $10^{-29} = 0.2$
Intensité électrique : I (A)	$T^{-1}Q$	Courant d'Alfvèn : $ec/r_e = m_e c^3/e = 1.70\ 10^4$
		Tokamak ITER bobine supraconductrice : $8\ 10^4$
Potentiel électrique : U (V)	$ML^2T^{-2}Q^{-1}$	
	$P = U.I$	Différence de potentiel orage : 10^8 Influx nerveux : repos –0.07, action : + 0.04
Champ électrique : E (V/m)	$MLT^{-2}Q^{-1}$	$E_e = e/(4\pi\varepsilon_0 r_e^2) = m_e c^2/er_e = 1.81\ 10^{20}$ $E_B = e/(4\pi\varepsilon_0 r_B^2) = \alpha_f^4\ E_e = 2U_B/(er_B) = 5.14\ 10^{11}$ Schwinger : $E_{Sch} = m_e c^2/(e\lambda_C) = 1.3\ 10^{18}$
	$E = F/Q$	Ciel d'orage : 10^4 Niveau maximal d'exposition biologique à 1 GHz : 50
Induction magnétique : B (T)	$MT^{-1}Q^{-1}$	$e/(4\pi\varepsilon_0 c r_e^2) = 6.05\ 10^{11}$ $B_{Sch} = m_e c/(e\lambda_C) = 4\ 10^9$
	$B = E/v$ $B = \mu_0 I/(2r)$	$\rightarrow$ rayon r B surface de la terre : $4.7\ 10^{-5}$ Tokamak ITER : B = 5
Capacité électrique : C (F)	$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$	$\varepsilon_0 r_B = 4.68\ 10^{-22}$
	$Q = CV$	Supercondensateur : 1.5 F
Permittivité diélectrique : ε (F/m)	$M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$	Permittivité vide $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$
	$C = \varepsilon$ surface/distance	
Résistance impédance électrique : R (Ω)	$R = \frac{ML^2T^{-3}}{Q^2T^{-2}} = ML^2Q^{-2}T^{-1}$	Résistance Hall : $\frac{h}{e^2} = \frac{m_e c\lambda_C}{e^2} = 2.58\ 10^4$ Impédance du vide : $\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} = 376.7$
	$P = RI^2$	

Résistivité électrique : ρ (Ω.m)	$ML^3T^{-1}Q^{-2}$	$m_e \omega_B r_B^3/e^2 = 4.35\ 10^{-7}$
	$\rho = R.L$ $\rho = m_e\nu_{ei}/(n_e e^2)$ $= \nu_{ei}/(\varepsilon_0\omega_{pe}^2)$	Conducteur : $< 10^{-5}$, Isolant : $> 10^6$, Cuivre 300 K : $16\ 10^{-9}$ Plasma densité e^- 10^{27} m^{-3} : $1/(\varepsilon_0\omega_{pe}) = 6.33\ 10^{-5}$ SiO_2 300 K : 2300 Eau distillée : $1.8\ 10^5$
Intensité surfacique de courant : j (A/m^2)	$L^{-2}T^{-1}Q$	Plasma densité e^- 10^{27} m^{-3} : $n_e ec = 5.36\ 10^{12}$ A/cm^2
	$j = nqv$	Câble domestique : 10^6 Ceinture de Van Allen : $5.4\ 10^{-9}$
Mobilité électrique : μ (C.s/m)	$M^{-1}TQ$	
	$\mu = v/E$ $\mu = e/(m_e\nu)$	$\rightarrow \nu$ fréquence collisions Mobilité e^- : Ge : 0.39, AsGa : 0.85, Nanotube C : 10. cristal Si : $\mu = 0.14$, Si amorphe : $\mu = 1$ Mobilité trous : Ge : 0.19, AsGa : 0.04
Inductance : L (H)	ML^2Q^{-2}	$m_e r_B^2/e^2 = 9.94\ 10^{-14}$
	$W = LI^2/2$	Solenoïde longueur $L \gg$ rayon R de N spires : $\pi\mu_0 N^2R^2/L$
Moment magnétique : μ ($A.m^2$)	$L^2T^{-1}Q$	magnéton de Bohr : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27\ 10^{-24}$
	$W = \mu B$ $\mu = mv_\perp^2/2B_0$	
Flux magnétique : Φ (Wb)	$ML^2T^{-1}Q^{-1}$	quantum : $\frac{h}{2e} = 2.07\ 10^{-15}$
	$\Phi = B.S$	

I.4. Conversion d'unités

Tout contexte a ses propres références, en termes de grandeurs (*quantities*) et d'unités (*units*). Un consensus a été trouvé pour un système international d'unités, adapté à ce qui est aisément manipulable par un humain : le mètre pour les distances, la seconde pour le temps, le kilogramme pour la masse et l'ampère pour l'intensité électrique. Dans des contextes spécifiques, ces unités ne sont pas a priori adaptées ; pour faciliter ces mesures et estimations, chaque communauté scientifique a donc forgé des habitudes

autour de certaines unités. Le choix de telle unité plutôt que telle autre est d'autant plus justifié que les grandeurs exprimées dans les conditions habituelles ont une valeur voisine de 1 ; pour certains choix, il est difficile de développer un fondement aussi rationnel et seul le poids des habitudes associées peut être mis en avant. Les grandeurs de référence seront donc fournies et les résultats rapportés systématiquement à ces grandeurs, sous forme de grandeurs sans dimensions. La conversion d'unités est un exercice permanent entre scientifiques d'une même communauté. Aussi, est-il bon de rappeler cette règle universelle de conversion.

Supposons qu'une grandeur g_a soit fonction de deux autres grandeurs g_b et g_c selon $g_a([U_a]) = f(g_b([U_b]),g_c([U_c]))$, dans le système d'unités $[U_a]$, $[U_b]$ et $[U_c]$. Quelle est la relation à écrire dans le nouveau système d'unités $[U_a']$, $[U_b']$ et $[U_c']$? Il faut considérer l'écriture sous-jacente :

$$\frac{g_a}{[U_a]} = f\left(\frac{g_b}{[U_b]}, \frac{g_c}{[U_c]}\right) \tag{I-4}$$

Dans un système d'unités $[U_a']$, $[U_b']$ et $[U_c']$, nous avons la relation suivante entre les nouvelles valeurs :

$$\frac{g_a}{[U_a']} = \frac{g_a}{\frac{[U_a']}{[U_a]}[U_a]} = \frac{1}{\frac{[U_a']}{[U_a]}} f\left(\frac{1}{\frac{[U_b]}{[U_b']}}\frac{g_b}{[U_b']}, \frac{1}{\frac{[U_c]}{[U_c']}}\frac{g_c}{[U_c']}\right) \tag{I-5}$$

- *Exemple 1* : comparons les valeurs d'une distance d donnée en m et en cm. La relation précédente donne :

$$d(m) = \frac{d(cm)}{1\ m/1\ cm} = 10^{-2}\ d(cm)$$

- *Exemple 2* : une pression est fournie en Mbar. Que devient-elle en pascal ?

$$\frac{P}{Pa} = \frac{1}{Pa/Mbar}\frac{P}{Mbar} = \frac{1}{1/(10^3 101325)}\frac{P}{bar} = 1.01\ 10^8\ \frac{P}{Mbar}$$

- *Exemple 3* : le pouvoir d'arrêt R, défini comme l'énergie déposée par une particule par distance qu'elle parcourt, est souvent mesurée en MeV/cm. Que devient cette valeur en unités SI ?

$$\frac{R}{J/m} = \frac{1}{J/MeV\ cm/m}\frac{R}{MeV/cm} = \frac{1}{1/1.6\ 10^{-13}\ 10^{-2}}\frac{R}{MeV/cm} = 1.6\ 10^{-11}\frac{R}{MeV/cm}$$

- *Exemple 4* : le rayonnement d'un corps noir de température T se caractérise par une densité de puissance par unité de surface du corps rayonnant $dP_{cn}/dS = \sigma_{sB}T^4$ où σ_{sB} désigne la constante de Stefan-Boltzmann de valeur $5.67\ 10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$. Plutôt qu'utiliser des températures, nous allons utiliser des énergies thermiques définies en keV et des densités en cm^{-3}. Que devient la constante ?

$$\frac{dP_{cn}/dS}{W.cm^{-2}} = \frac{m^{-2}}{cm^{-2}}\frac{dP_{cn}/dS}{W.m^{-2}} = \frac{m^{-2}}{cm^{-2}}\left(\frac{keV}{J}\right)^4\frac{\sigma_{sB}}{K_B{}^4}\left(\frac{K_BT}{keV}\right)^4$$

$$\Rightarrow \frac{dP_{cn}/dS}{W.cm^{-2}} = 10^{-4}\ (1.6\ 10^{-16})^4\ \frac{5.67\ 10^{-8}}{(1.38\ 10^{-23})^4}\left(\frac{K_BT}{keV}\right)^4 = 10^{17}\left(\frac{K_BT}{keV}\right)^4$$

Concrètement, et bien que nous soyons attaché aux unités SI, nous utiliserons souvent dans ce livre des unités courantes de notre communauté des plasmas-laser. Ainsi, pour les densités volumiques [n'] = cm^{-3}, les éclairements laser [I'] = W/cm^2, les énergies thermiques [KT'] = keV. Les relations suivantes permettent de retrouver les valeurs en unités SI :

$$n\ (m^{-3}) = \frac{n\ (cm^{-3})}{m^{-3}/cm^{-3}} = 10^6\ n\ (cm^{-3})$$

$$I\ (W/m^2) = \frac{n\ (W/cm^2)}{cm^2/m^2} = 10^4\ I\ (W/cm^2)$$

$$T\ (Kelvin) = \frac{1}{K}\frac{KT}{J/keV} = 1.16\ 10^7\ KT\ (keV)$$

I.5. Adimensionnement

Les lois de la physique sont invariantes par changement d'unité. Il nous est donc possible et fortement souhaitable de choisir des unités pertinentes au contexte analysé. Les vertus de l'adimensionnement sont évidentes : les valeurs ne s'affichent qu'avec de petits exposants ; elles sont plutôt centrées autour de 1. Et donc, sur calculateur, elles ne risquent pas de se retrouver en dehors du domaine de représentation des nombres (*underflow* ou *overflow*).

Citons le théorème de Buckingham-Vaschy (ou théorème Π) : si une équation $f(q_1,q_2, \ldots, q_n) = 0$ relie un ensemble de n grandeurs ayant une dimension physique et si cet ensemble s'exprime en termes de m dimensions indépendantes, alors cette équation est équivalente à une équation $F(\Pi_1,\Pi_2,\ldots\Pi_{n-m})$ reliant (n-m) variables adimensionnelles notées Π_k, construites à partir des grandeurs initiales $\Pi_k = q_1^{p1} q_2^{p2} \ldots q_n^{pn}$, avec p_i entiers. C'est le principe de l'adimensionnement. Ce théorème attribué à A. Vaschy (ingénieur télégraphe français) et E. Buckingham (du National bureau of standards américain) en 1914 a été démontré en 1878 par un mathématicien français, J. Bertrand (professeur au Collège de France).

Equation x = a + b t

Cette équation manipule 4 grandeurs et fait état de 2 dimensions : L, T. Il y a donc 2 variables Π :

$$\xi = x/a,\ \tau = bt/a \Rightarrow \xi = 1 + \tau$$

Equation x = mv/qB cos(qBt/m)

Cette équation utilise 6 grandeurs et 4 dimensions M, L, T, Q. Donc 2 variables Π :

$$\tau = qB/m\ t,\ \xi = qB/mv\ x \Rightarrow \xi = \cos(\tau)$$

Système de Zakharov

Ce système combine deux équations aux dérivées partielles modélisant, en géométrie spatiale 1D, le couplage basse fréquence d'un champ électrique oscillant d'amplitude E avec un plasma de densité ionique n_i :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{2}\left(\frac{n_i}{n_{i0}} - 1\right)\omega_{p0}\, E - i\,\frac{3}{2}\frac{v_{Te}^2}{\omega_{p0}}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - c_s^2\frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} = \frac{n_{i0}}{4}\frac{Zm_e}{m_i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{eE}{m_e\omega_{p0}}\right)^2 \qquad \text{(I-6)}$$

avec ω_{p0} la pulsation plasma électronique, v_{Te} la vitesse thermique électronique, c_s la vitesse acoustique ionique, $m_{e,i}$ les masses électronique et ionique, Z le nombre de charge ionique, E le champ électrique, n_{i0} la densité ionique de référence. La dynamique de ce système est analysée dans le chapitre Couplage d'ondes.

Nous notons :

- 10 grandeurs indépendantes ayant une dimension : E, t, n_i, n_{i0}, ω_{p0}, v_{Te}, x, m_e, m_i, e, sachant que $c_s = v_{Te}\sqrt{Zm_e/m_i}$
- 4 dimensions : L, T, M, Q

Ce qui donne 6 grandeurs Π : $\tilde{n} = n_i/n_{i0}$, $\mu = Zm_e/m_i$, $\tilde{E} = eE/m_e\omega_{p0}v_{Te}$, $\tau = \omega_{p0}t$, $\xi = x/(v_{Te}/\omega_{p0})$, $\eta = n_{i0}^{-1/3}/(v_{Te}/\omega_{p0})$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tau} + \frac{i}{2}\left(\tilde{n} - 1\right)\tilde{E} - i\,\frac{3}{2}\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial \xi^2} = \frac{\mu}{4}\frac{\partial^2 (\tilde{E})^2}{\partial \xi^2} \qquad \text{(I-7)}$$

Si nous introduisons la grandeur vitesse $v_E = eE/m_e\omega_{p0}$, les deux grandeurs e et E laissent place à v_E. Les grandeurs s'expriment alors en fonction de trois dimensions L,T,M ; Q n'apparaît plus. Soit encore 6 variables Π.

Technique d'adimensionnement : nous posons pour les variables et les grandeurs qui en dépendent $x = \tilde{x}\alpha$, $t = \tilde{t}\beta$, $n_i = \tilde{n}\gamma$, $E = \tilde{E}\delta$:

$$\frac{\delta}{\beta}\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} + \frac{i}{2}\left(\frac{\gamma\tilde{n}}{n_{i0}} - 1\right)\omega_{p0}\delta\,\tilde{E} - i\,\frac{3}{2}\frac{v_{Te}^2}{\omega_{p0}\alpha^2}\delta\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \tilde{x}^2} = 0$$

$$\frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{c_s^2\gamma}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{n_{i0}}{4}\frac{Zm_e}{m_i}\frac{\partial^2 \tilde{E}^2}{\partial \tilde{x}^2}\frac{e^2\delta^2}{m_e^2\omega_{p0}^2\alpha^2}$$

Egalités de coefficients dans la 1e équation :

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}\omega_{p0} = \frac{3}{2}\frac{v_{Te}^2}{\omega_{p0}\alpha^2}\,,\ \frac{\gamma}{n_{i0}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2}{\omega_{p0}}\,,\ \gamma = n_{i0} \qquad \text{(I-8)}$$

Egalités de coefficients dans la 2e équation :

$$\frac{\gamma}{\beta^2} = \frac{c_s^2\gamma}{\alpha^2} = \frac{n_{i0}}{4}\frac{Zm_e}{m_i}\frac{e^2\delta^2}{m_e^2\omega_{p0}^2\alpha^2} \quad \Rightarrow\ \alpha = c_s\beta = c_s 2/\omega_{p0}\,,\ \frac{c_s^2}{\alpha^2} = \frac{1}{4}\frac{Zm_e}{m_i}\frac{e^2\delta^2}{m_e^2\omega_{p0}^2\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta = 2\sqrt{\frac{m_i}{Zm_e}}\,\frac{m_e\omega_{p0}c_s}{e} = 2\,\frac{m_e\omega_{p0}v_{Te}}{e} \tag{I-9}$$

Il y avait 5 égalités à satisfaire pour seulement 4 coefficients. Une égalité n'est donc pas satisfaite. Nous avons ainsi le coefficient dans la 1e équation :

$$\frac{3}{2}\frac{v_{Te}^2\beta}{\omega_{p0}\alpha^2} = \frac{3}{2}\frac{v_{Te}^2}{\omega_{p0}^2}\frac{2}{4}\frac{\omega_{p0}^2}{c_s^2} = \frac{3}{4}\frac{m_i}{Zm_e} \equiv \mu$$

Le système adimensionné s'écrit finalement sans facteurs multiplicatifs excepté μ :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{E}}{\partial\tilde{t}} + i\,(\tilde{n} - 1)\,\tilde{E} - i\,\mu\,\frac{\partial^2\tilde{E}}{\partial\tilde{x}^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2\tilde{n}}{\partial\tilde{t}^2} - \frac{\partial^2\tilde{n}}{\partial\tilde{x}^2} = \frac{\partial^2\tilde{E}^2}{\partial\tilde{x}^2} \end{aligned} \tag{I-10}$$

Equation d'oscillateur

L'équation d'oscillateur amorti s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\nu\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = A\cos(\omega_0 t) \tag{I-11}$$

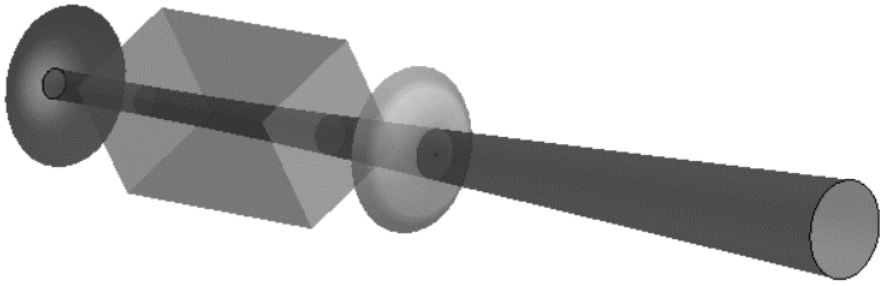
Elles fait intervenir 6 grandeurs : x, t, ν, ω, A, ω_0 et 2 dimensions : L, T. Il en résulte 4 grandeurs Π :

$$\tau = \omega_0 t,\ \ \gamma = \frac{2\nu}{\omega_0},\ \ \Omega = \frac{\omega}{\omega_0},\ \ \xi = \frac{x}{A/\omega_0^2}$$

L'équation adimensionnée s'écrit :

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \gamma\frac{d\xi}{d\tau} + \Omega^2 x = \cos(\tau) \tag{I-12}$$

II. Source d'énergie : le laser



Une source laser est un système combinant trois ingrédients :

- un milieu amplificateur,
- une source d'énergie permettant d'agir sur ce milieu,
- une cavité optique constituant une boucle de rétroaction.

Ce chapitre décrit les différentes parties constitutives d'un laser de puissance. Il reprend des notions atomiques du milieu pour introduire par un modèle 0 D (sans notion spatiale) la dynamique temporelle de l'émission de lumière sortant du laser, en décrivant par analyse théorique et résolution numérique des équations les scenarii de cette dynamique. Les schémas numériques utilisés sont décrits et comparés. Le chapitre se termine avec une description des grandes installations laser de la décennie aptes à produire des impulsions laser renfermant plus d'un mégajoule d'énergie lumineuse.

II.1. Populations des états d'un atome

Nous nous donnons un atome avec deux niveaux d'énergie b (bas) et h (haut), entre lesquels existe une transition de pulsation ω_{hb} et donc d'énergie $\hbar\omega_{hb}$.

II.1.1 Atome isolé

Si cet atome baigne dans un champ électrique d'amplitude E de pulsation ω, un modèle classique, dit de Lorentz, d'un électron élastiquement lié et se déplaçant peu devant la longueur d'onde du champ, conduit à l'équation d'oscillateur forcé :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = - m \omega_{bh}^2 \vec{r} - e \vec{E} \cos(\omega t - \phi) \qquad \text{(II-1)}$$

En définissant le dipôle $\vec{d}_{bh} = -e\vec{r}$, la solution forcée se caractérise par $\vec{d}_{bh} \propto \vec{E}$. La puissance transférée du champ à l'électron s'écrit : $P = - < \vec{E}.d(\vec{d}_{bh})/dt >$. La phase de l'oscillation de $\vec{d}_{bh}$ et de $\vec{E}$ donne ici P = 0.

Dans un modèle quantique, les probabilités de population des niveaux b et h oscillent en temps. Si à t = 0, le niveau haut est vide, ces probabilités s'écrivent :

$$p_b = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2}\cos^2(\Omega t/2) \qquad p_h = \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2}\sin^2(\Omega t/2) \tag{II-2}$$

avec $\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + (\omega - \omega_{bh})^2}$ et $\Omega_R \equiv \vec{d}_{bh}.\vec{E}_0/\hbar$ la pulsation de Rabi. Cette oscillation permanente suppose que l'atome reste dans un état cohérent non perturbé par son environnement sur la durée d'une oscillation Rabi. Il n'y a donc pas de régime stationnaire et donc alternativement il y a transfert énergétique du champ vers l'atome et de l'atome vers le champ. Sur une demi-période π/Ω_r apparaît donc une inversion de population.

II.1.2 Atome non isolé

Un atome n'est pas isolé. Il interagit avec des ondes électromagnétiques, avec des phonons et collisionne avec d'autres atomes dans un gaz. En introduisant un amortissement associé aux collisions et au rayonnement de l'électron, le modèle classique montre que le mouvement électronique se déphase par rapport au champ et donne P < 0 caractéristique de l'absorption du champ. Le rayonnement se caractérise par une friction, associée à la force d'Abraham–Lorentz :

$$\vec{F}_{ray} = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \tag{II-3}$$

En supposant le mouvement dominé par l'oscillation forcée dans le champ, cette force s'écrit :

$$-m\gamma_{ray}\vec{r} \quad \text{avec} \quad \gamma_{ray} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}\omega_{bh}^3 \tag{II-4}$$

Notez que γ_{ray} a pour dimension T^{-2}. L'atome non isolé donne ainsi lieu à de l'émission spontanée de temps caractéristique τ_A. Cette émission n'est pas directionnelle et agit comme du bruit et donc ne peut être utilisée pour l'amplification d'un rayonnement incident de direction donnée.

Un modèle quantique, dit de Bloch, introduit la matrice densité du système dont les coefficients sont les probabilités de populations des niveaux b et h et également des termes de cohérence de phase du moment dipolaire avec le champ E. Le moment dipolaire qui fournit la polarisation du milieu évolue selon :

$$\frac{d\, d_{hb}}{dt} = \left(i\omega_{bh} - \frac{2\pi}{\tau_B}\right) d_{bh} \tag{II-5}$$

avec τ_B un temps de relaxation de la phase du dipôle. Dans l'interaction atome-champ en milieu dilué, l'atome n'est couplé qu'au rayonnement, ce qui donne l'égalité $\tau_B = 2\tau_A$. Mais l'interaction de l'atome avec des phonons ou d'autres atomes conduit à $\tau_B < 2\tau_A$ et parfois $<< 2\tau_A$. Si $\tau_B << \tau_A$, le dipôle suit l'intensité du champ et $p_h - p_b$ évolue suivant l'équation :

$$\frac{d(p_h - p_b)}{dt} = -\frac{p_h - p_b}{\tau_A}\left[1 + L(\nu)\frac{I}{I_s}\right] + \frac{(p_h - p_b)_{th}}{\tau_A} \qquad \text{(II-6)}$$

où I désigne l'éclairement du champ incluant les deux directions de propagation du champ, I_s l'éclairement saturé (le terme intensité est plus souvent usité), $L(\nu)$ la forme de raie normalisée d'expressions :

$$I = v_g \varepsilon_0 E^2/2 = v_g \Delta\nu\, U \quad , \qquad I_s = \frac{v_g \varepsilon_0}{2}\frac{\hbar^2}{d_{bh}^2 \tau_A \tau_B}\frac{g_h}{g_b} \quad , \quad L(\nu) = \frac{1}{1 + (\nu_{bh} - \nu)^2 \tau_B^2}$$

avec $\Delta\nu$ la largeur spectrale = $1/\tau_B$ et I. La forme de raie lorentzienne étant associée à ce qui est appelé un élargissement homogène, typique des milieux solides. Nous pouvons vérifier que la dimension de $\hbar/(d_{bh}\sqrt{\tau_A \tau_B})$ est celle d'un champ électrique $[MLT^{-2}Q^{-1}]$. Notons le rapport : $I/I_s = \tau_A \tau_B \Omega_R^2 g_b/g_h$. Le terme dans le […] de $d(p_h - p_b)/dt$ est proportionnel à I et est responsable de l'émission stimulée (ou induite)de l'atome. L'équation précédente montre que $p_h - p_b$ tend vers un état d'équilibre dit saturé :

$$(p_h - p_b)_s = \frac{(p_h - p_b)_{th}}{1 + L(\nu) I/I_s} \qquad \text{(II-7)}$$

Regardons la puissance absorbée par l'atome :

$$P = \hbar\omega_{bh}\frac{\Omega_R^2}{2}\tau_B \frac{L(\nu)}{1 + L(\nu) I/I_s}$$

et ses deux cas extrêmes pour $\nu = \nu_{bh}$:

- $I/I_s << 1$: $P_{abs} = h\nu_{bh}\, \Omega_R^2/2\, \tau_B \propto I$
- $I/I_s >> 1$: $P_{abs} = h\nu_{bh}\, \Omega_R^2/2\, \tau_B \frac{I_s}{I} = \frac{h\nu_{bh}}{2\tau_A}\frac{g_h}{g_b}$ soit un photon par durée de vie de l'état excité. Dans ce cas, $(p_h - p_b)_s$ tend vers 0 : les états h et b sont alors équiprobables.

Coefficients d'Einstein

En présence du champ E, A. Einstein (alors professeur à l'université de Zurich) a introduit en 1917 un modèle phénoménologique qui donne l'évolution conjuguée de p_h et de l'intensité du champ E, en considérant trois processus : l'émission spontanée introduite ci-dessus (coefficient A), l'absorption (coefficient B_{bh}) et l'émission stimulée (coefficient B), cette dernière étant en cohérence de phase avec le rayonnement stimulant :

$$\frac{dp_h}{dt} = -A\, p_h + B\, U\, p_b - B_{bh}\, U\, p_h \qquad \text{(II-8)}$$

U désigne la densité spectrale d'énergie du champ à la pulsation ω_{bh}. Sa dimension s'écrit : $[U] = ML^{-1}T^{-1}$; elle s'exprime en $J.m^{-3}Hz^{-1}$. Par ailleurs $[BU] = T^{-1}$ ce qui donne la dimension du coefficient B : $[B] = M^{-1}L$ et son unité $1/(J.m^{-3}.Hz^{-1}s)$. Ces coefficients sont déterminés par l'équilibre thermodynamique qui se caractérise par trois relations :

- Etat stationnaire des populations : $dn_{b,h}/dt = 0 \Rightarrow -An_h + B\, U\, (n_b - n_h) = 0$

$$\Rightarrow U = \frac{A}{B}\frac{1}{n_b/n_h - 1}$$

- Equilibre de Boltzmann entre les populations : $n_h/n_b = \exp(-h\nu_{bh}/k_BT)$
- Rayonnement de corps noir pour les photons :

$$U = \frac{8\pi\nu_{bh}^2}{c^3}\frac{h\nu_{bh}}{\exp(h\nu_{bh}/k_BT) - 1}$$

Il en résulte le rapport suivant, qui montre que dans la bande ultraviolette (ν_{bh} élevé) l'émission spontanée est favorisée alors que dans l'infrarouge l'émission stimulée est favorisée :

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu_{bh}^3}{c^3} \qquad \text{(II-9)}$$

Un nombre sans dimension peut être défini, à savoir la force d'oscillateur $f_{bh} = 2m\omega_{bh}\, d_{bh}^2/(e^2\,\hbar)$. Avec g_h, g_b les dégénérescences des niveaux h et b, respectivement, les coefficients d'Einstein ont les expressions réunies dans le tableau ci-dessous. A noter que dans la colonne dimension, W désigne la dimension Energie.

	Expression	**Dimension**
Emission spontanée	$A = \frac{1}{\tau_A} = \frac{\omega_{bh}^3\, d_{bh}^2}{\pi\,\varepsilon_0 c^3\,\hbar}\frac{g_b}{g_h} = \frac{e^2\omega_{bh}^2}{2\pi\varepsilon_0 mc^3} f_{bh}\frac{g_b}{g_h}$	$[A_{hb}] = T^{-1}$
Emission stimulée	$B = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{d_{bh}^2}{\hbar^2}\frac{g_b}{g_h} = \frac{e^2}{4\varepsilon_0 m\,\hbar\omega_{bh}} f_{bh}\frac{g_b}{g_h}$	$[B] = T^{-1}L^2/W$
Absorption	$B_{bh} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{d_{bh}^2}{\hbar^2}$	$[B_{hb}] = T^{-1}L^2/W$

Pour ordre de grandeur, un déplacement électronique de l'ordre du rayon de l'atome d'hydrogène donnant $d_{bh} = er_B$, le temps τ_A s'écrit :

$$\tau_A = \frac{3}{4(2\pi)^3}\alpha_f^3\frac{r_e}{c}\left(\frac{\lambda_{bh}}{r_e}\right)^3 = 4.94\ 10^{-7}\,\lambda_{bh}^3(\mu m)$$

Revenons à l'équation de la dynamique du niveau h, en considérant $B_{bh} = B$:

$$\frac{dp_h}{dt} = -\,A\,p_h + B\,U - 2\,B\,U\,p_h = -\,(A + 2\,B\,U)p_h + B\,U \qquad \text{(II-10)}$$

L'état stationnaire ($dp_h/dt = 0$) se caractérise par :

$$p_{hst} = \frac{B\,U}{A + 2\,B\,U} \qquad \text{(II-11)}$$

qui devient si $U << A/B$: $p_{hst} = B\,U/A << 1$ et si $U >> A/B$: $p_{hst} = ½$. La puissance P transférée du champ E à l'atome est due à l'absorption et à l'émission stimulée ; elle s'écrit :

$$P = \hbar\omega_{bh}\,B\,U\,(p_h - p_b) \qquad \text{(II-12)}$$

Nous observons que $P > 0$ si $p_h > p_b$ et donc si $p_h > ½$. Mais naturellement, l'équilibre thermodynamique donne $n_h/n_b < 1$ et donc $P < 0$. Pour pouvoir transférer de l'énergie de l'atome vers le champ, il faut donc réaliser un pompage (*pumping*) de l'état b vers l'état h et réaliser une inversion de population. Celui-ci peut être de nature optique comme imaginé en 1949 par A. Kastler (université de Paris). Notons pour finir que nous pouvons exprimer I_s par :

$$I_s = \frac{v_g \Delta\nu}{4B\tau_A} \tag{II-13}$$

II.2. Emission stimulée et absorption

Le niveau h se dépeuple par émissions spontanée ou induite et le nombre de photons augmente corrélativement. A une variation dn_h/dt de la population haute est associée une variation d'énergie photonique $dn_h/dt\ h\nu_{bh}$, soit dans une bande spectrale $\Delta\nu$ une variation d'énergie spectrale $dU/dt = dn_h/dt\ h\nu_{bh} / \Delta\nu$.

Nous pouvons définir une section efficace d'amplification/absorption σ du champ par la relation : $dU/dt \equiv \sigma v_g \Delta n\ U$. Or :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}\frac{d\Delta n}{dt} \tag{II-14}$$

La relation précédente donnant $d(p_h - p_b)/dt$ conduit, dans l'hypothèse $I/I_s >> 1$, permet de définir une section efficace σ :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}\frac{I}{\tau_A I_s}\Delta n \equiv \sigma\frac{I\,\Delta n}{\Delta\nu} \tag{II-15}$$

L'expression de I_s ci-dessus donne une relation entre le coefficient d'Einstein B (de dimension $[B] = L^3T^{-1}/(TW)$) et σ et également entre σ et τ_B :

$$B = \frac{v_g\sigma}{4\tau_B\, h\nu_{bh}} = \frac{v_g\sigma\Delta\nu}{4\, h\nu_{bh}} \quad , \qquad \sigma = \frac{e^2\tau_B}{\varepsilon_0 m v_g} f_{bh}\frac{g_b}{g_h}$$

II.3. Cavité optique

La cavité est délimitée par deux miroirs de réflectivité R_1 et R_2 distants d'une longueur L. Nous donnons une surface effective S au milieu amplificateur. Considérons les pertes de photons : elle sont dues soit à l'absorption $\alpha = \exp(-\kappa L)$ avec κ une taux d'absorption, soit à la transparence des miroirs. C'est cette transparence qui donne lieu à l'émission laser et au faisceau laser utile pour nos applications.

Un temps caractéristique important de cette cavité est le temps de transit de l'énergie photonique sur un aller-retour dans la cavité $T_{tr} = 2L/v_g$, avec v_g la vitesse de groupe du champ $= c/N_{opt}$ où N_{opt} désigne l'indice optique. La cavité est qualifiée par un facteur de qualité Q pour un aller-retour défini ainsi à un instant t :

$$[R_1R_2(1-\alpha)^2]^{t/T_{tr}} = \exp(-\omega_{bh}/Q\ t)$$

$$\Rightarrow Q = -\frac{\omega_{bh} T_{tr}}{\ln[R_1 R_2 (1-\alpha)^2]} = -\frac{4\pi L}{\lambda_{bh}} \frac{N_{opt}}{\ln[R_1 R_2 (1-\alpha)^2]} \qquad \text{(II-16)}$$

Nous définissons un temps de fuite des photons τ_f par la relation : ce qui donne :

$$\exp\left(-\frac{\omega_{bh}}{Q} t\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \quad \Rightarrow \quad \tau_f = -\frac{T_{tr}}{\ln[R_1 R_2 (1-\alpha)^2]} \qquad \text{(II-17)}$$

L'un des miroirs est parfaitement réfléchissant $R_1 = 1$ et c'est par le 2e miroir que les photons vont fuir. Si en outre $\alpha << 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1-T_2$ avec $T_2 << 1$, le temps de fuite se simplifie alors en :

$$Q = \frac{4\pi N_{opt} L}{\lambda_{bh} T_2} \quad , \quad \tau_f = \frac{T_{tr}}{\alpha + T_2}$$

II.4. Evolutions temporelles couplées

Introduisons la densité volumique d'atomes n_0 et définissons $n_h = n_0 p_h$, $n_b = n_0 p_b$ et $\Delta\nu = 1/\tau_B$ la largeur de bande spectrale associée à l'émission induite. Nous allons chercher à inverser les populations des niveaux b et h et pour cela nous nous donnons un processus de pompage qui tend à peupler le niveau supérieur à la densité n_{hp} sur le temps caractéristique τ_p.

En prenant en compte les processus d'émission spontanée, d'émission induite et d'absorption, de pompage et enfin de perte de la cavité, les densités de population des deux niveaux et la densité spectrale d'énergie photonique évoluent suivant le système ci-dessous à trois équations différentielles ordinaires (EDO) couplées, dit système de Statz-de Mars (ingénieurs à Raytheon Manufacturing Company, Massachusetts – USA) publié en 1960 :

$$\frac{dn_h}{dt} = -An_h + B\,U\,n_b - B\,U\,n_h - \frac{n_h - n_{hp}}{\tau_p}$$

$$\frac{dn_b}{dt} = An_h + B\,U\,n_h - B\,U\,n_b - \frac{n_b - n_{bp}}{\tau_p}$$

$$\frac{dU}{dt} = A\frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu} n_h + B\,U\frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}(n_h - n_b) - \frac{U}{\tau_f} \qquad \text{(II-18)}$$

Connaissant la relation $n_0 = n_h + n_b$ avec n_0 la densité d'atomes servant à l'amplification (atomes lasant) et en notant $\Delta n_p = n_{hp} - n_{bp} = 2n_{bp} - n_0$, par différence des deux 1e équations, ce système se ramène à deux EDO pour $\Delta n = n_h - n_b$ et U :

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -A(n_0 + \Delta n) - 2\,B\,U\,\Delta n - \frac{\Delta n - \Delta n_p}{\tau_p}$$

$$\frac{dU}{dt} = A\frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}\frac{n_0 + \Delta n}{2} + B\frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}\Delta n\,U - \frac{U}{\tau_f} \qquad \text{(II-19)}$$

Vérifions les dimensions des grandeurs : 1e éqnn : $[BU] = T^{-1}$, $[B\,h\nu_{bh}/\Delta\nu\,\Delta n] = T^{-1}$. Adimensionnons les équations : $\tilde{t} = \nu_{bh} t$, $\tilde{\Delta n} = \Delta n/n_0$, $\tilde{U} = U/(n_0 h)$. En divisant la 1e équation par n_0 et la 2e par $n_0 h\nu_{bh}$ nous obtenons :

$$\frac{d\tilde{\Delta n}}{d\tilde{t}} = -\frac{A}{\nu_{bh}}(1+\tilde{\Delta n}) - 2\frac{B\, n_0 h}{\nu_{bh}}\tilde{U}\,\tilde{\Delta n} - \frac{\tilde{\Delta n} - \tilde{\Delta n_p}}{\nu_{bh}\tau_p}$$

$$\frac{d\tilde{U}}{d\tilde{t}} = \frac{A}{2\Delta\nu}(1+\tilde{\Delta n}) + \frac{B\, n_0 h}{\Delta\nu}\tilde{\Delta n}\,\tilde{U} - \frac{\tilde{U}}{\nu_{bh}\tau_f} \qquad \text{(II-20)}$$

Ce système constitue un bilan énergétique entre photons et atomes, les photons apparaissant et disparaissant par désexcitation/excitation des atomes. Ce système fait état de quatre temps caractéristiques :

- le temps d'émission spontanée $\tau_A = 1/A$
- le temps de pompage τ_p
- le temps de fuite de la cavité τ_f
- le temps d'émission induite 1/(2BU) qui est inversement proportionnel à la densité de photons et varie continuellement

La comparaison de ces temps permet d'établir des catégories de laser :

- $\tau_f >> \tau_A, \tau_B$: la population d'atomes varie beaucoup plus rapidement que le champ ce qui autorise à considérer que Δn est à sa valeur d'équilibre à tout instant donné par $d\Delta n/dt = 0$. Ce type est celui des lasers à gaz et à colorant.
- $\tau_f, \tau_A >> \tau_B$: les populations et énergie du champ ont des dynamiques voisines. Ce type englobe les lasers de type solide à Nd ou bien à gaz CO_2.
- τ_f, τ_A, τ_B sont du même ordre de grandeur : la polarisation du milieu dépend du champ et non plus de l'intensité ; aux deux équations en Δn et U doit être ajoutée une équation pour cette polarisation. Cette situation se rencontre pour des émissions dans l'IR lointain (maser).

II.5. Grandeurs électromagnétiques : gain et puissance sortante

Une grandeur importante rencontrée dans les études sur les laser est le gain du champ suivant une direction et sur un aller dans la cavité (grandeur sans dimension), ce qui fait apparaître ½ x ½ = ¼ dans sa définition :

$$g = \frac{1}{4}\sigma v_g \Delta n\, T_{tr} = \frac{B h\nu_{bh}\, T_{tr}}{\Delta\nu}\Delta n \qquad \text{(II-21)}$$

En utilisant les grandeurs :

$$U = \frac{I}{v_g \Delta\nu}\ , \quad BU = \frac{I}{I_s}\frac{1}{4\tau_A}\ , \quad g_{0,p} = \frac{B h\nu_{bh}\, T_{tr}}{\Delta\nu}(n_0, \Delta n_p)$$

les équations d'évolution de Δn et U peuvent réécrites pour g et I :

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{1}{\tau_A}(g_0+g) - \frac{1}{2\tau_A}\frac{I}{I_s}g + \frac{g-g_p}{\tau_p}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2I_s}{T_{tr}}(g_0+g)\, I_s + \frac{g}{T_{tr}} I - \frac{I}{\tau_f} = \frac{I}{\tau_f}\left[\frac{\tau_f}{T_{tr}} g - 1\right] \qquad \text{(II-22)}$$

Regardons l'état stationnaire. Nous supposons le pompage réalisé antérieurement, permettant d'ôter le terme de pompage dans le gain, et un cas d'effet laser où l'émission spontanée peut être négligée dans le bilan photonique. Ce qui donne :

$$-\frac{1}{\tau_A}(g_0+g) - \frac{1}{2\tau_A}\frac{I}{I_s} g = 0 \Rightarrow g = \frac{g_0}{1 + I/(2I_s)}$$

$$\frac{\tau_f}{T_{tr}} g - 1 = 0 \Rightarrow g = \frac{T_{tr}}{\tau_f} \qquad \text{(II-23)}$$

soit au final, une relation entre I et le temps de fuite de la cavité :

$$I = 2I_s\left(\frac{\tau_f}{T_{tr}} g_0 - 1\right) \qquad \text{(II-24)}$$

L'effet laser demande donc que g_0 dépasse un seuil donné par $g_{0th} = T_{tr}/\tau_f$ d'autant plus élevé que τ_f est faible et donc que la cavité fuit. Déclinons maintenant différentes grandeurs électromagnétiques : la densité spectrale d'énergie U est définie à partir de la densité volumique de photons n_ν [L^{-3}] et de la largeur de bande spectrale $\Delta\nu = 1/\tau_B$:

$$U = n_\nu h\nu_{bh}/\Delta\nu \qquad \text{(II-25)}$$

L'énergie photonique contenue dans la cavité s'écrit :

$$W_{cav} = n_\nu h\nu_{hb} S\, L = U\Delta\nu\, SL \qquad \text{(II-26)}$$

et l'éclairement total incluant les deux directions de propagation du champ s'écrit $I = v_g\Delta\nu\, U = v_g\, n_\nu h\nu_{bh}$. Regardons maintenant la puissance associée à une seule direction du champ au sein de la cavité. Elle s'exprime de différentes façons :

$$P = ½\, I\, S = \frac{W_{cav}}{T_{tr}}$$

Passons maintenant à la puissance P_{out} sortant de la cavité. Il faut $T_{tr}/2$ pour vider la partie qui se dirige vers le miroir de sortie, temps pendant lequel l'autre moitié se réfléchit pour revenir vers le miroir de sortie. Seule la partie T_2 (transmission du miroir de sortie = $1–R_2$) sort et donc :

$$P_{out} = T_2 \frac{W_{cav}/2}{T_{tr}/2} = T_2 \frac{W_{cav}}{T_{tr}}$$

Pour l'équation donnant dI/dt, cette perte correspond au dernier terme de dU/dt, soit $P_{out} = W_{cav}/\tau_f$. Les deux expressions sont en accord. Plaçons nous maintenant dans la situation d'état stationnaire :

$$I = 2I_s\left(\frac{\tau_f}{T_{tr}} g_0 - 1\right) \;\Rightarrow\; P_{out} = T_2\, S\, I_s\left(\frac{\tau_f}{T_{tr}} g_0 - 1\right) \qquad \text{(II-27)}$$

Pour le cas de faibles transparence et absorption, τ_f se simplifie pour donner :

$$P_{out} = T_2\, S\, I_s\left(\frac{g_0}{\alpha + T_2} - 1\right)$$

Cette expression montre l'importance de la transparence T_2 du miroir de sortie. L'effet laser est associé à ce qui sort de la cavité mais la puissance sortante est proportionnelle à l'émission induite, qui est d'autant plus intense que la perte d'énergie dans la cavité est faible, autrement dit que la transparence du miroir est faible. Il faut trouver un compromis, qui dépend du gain g_0 et de la perte dans la cavité. Ci-dessous deux cas dont les valeurs optimales de T_2 sont 0.2 et 0.75 :

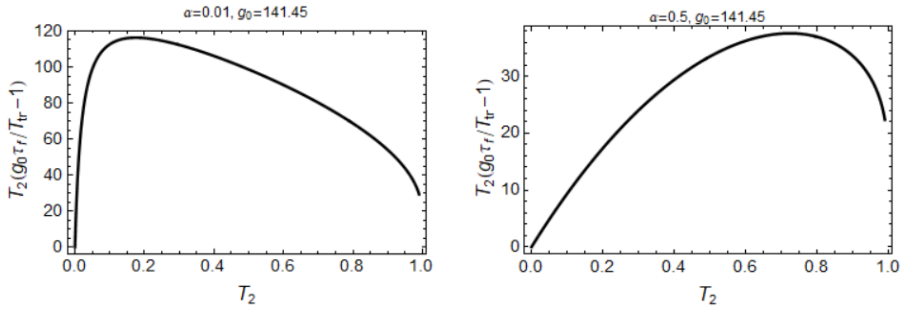


Figure II-1 : Puissance de sortie rapportée à I_sS pour deux absorptions différentes. Cavité L = 0.05 m de Nd.

II.6. Blocage (ou couplage) de modes

Il s'agit de prendre en compte l'aspect spatial des ondes dans la cavité. Ces ondes sont stationnaires pour des fréquences résonnantes telle que le champ soit nul sur chaque bord : $\lambda_m = 2L/m$ avec L la longueur de la cavité et m entier. Sachant que $\lambda_m = c/(N\,\nu_m)$ avec N indice optique, l'écart fréquentiel entre modes voisins vaut $\delta\nu \equiv \nu_{n+1} - \nu_n = c/2NL = 1/T_{tr}$. Le nombre de modes n'est pas illimité. Il est donné par la bande de fréquence $\Delta\nu$ et l'amplification donne lieu à un spectre discret de fréquences situées dans la largeur de bande de l'amplification.

Ces modes oscillent indépendamment et l'énergie photonique est répartie uniformément dans la cavité. Si M+1 modes oscillent avec la même phase, le champ électrique s'écrit :

$$E = \sum_{-M/2}^{M/2} \sin[(\omega_0 + n\delta\omega)(t - Nx/c)] = \frac{1}{2i} \sum_{-M/2}^{M/2} \exp[i\omega_0(t - Nx/c) + i\, n\delta\omega(t - Nx/c)] + c.c.$$

$$= \frac{1}{2i} \exp[i\omega_0(t - Nx/c) - i\, M/2\ \delta\omega(t - Nx/c)]\ \frac{1 - \exp(i(M+1)/2\ \delta\omega(t - Nx/c))}{1 - \exp(i/2\ \delta\omega(t - Nx/c))} + c.c.$$

$$= \frac{\sin[(M+1)/2\ \delta\omega(t - Nx/c)]}{\sin(\delta\omega(t - Nx/c)/2)} \sin[\omega_0(t - Nx/c)] \qquad \text{(II-28)}$$

L'énergie est alors concentrée là où les modes sont en phase, en des zones séparées de $2\pi\ c/\delta\nu = \lambda_0\ \nu_0/\delta\nu$ et de largeur spatiale de zéro à zéro :

$$\delta x = \frac{4\pi c}{N(M+1)\delta\omega} = \frac{2L}{M+1} \qquad \text{(II-29)}$$

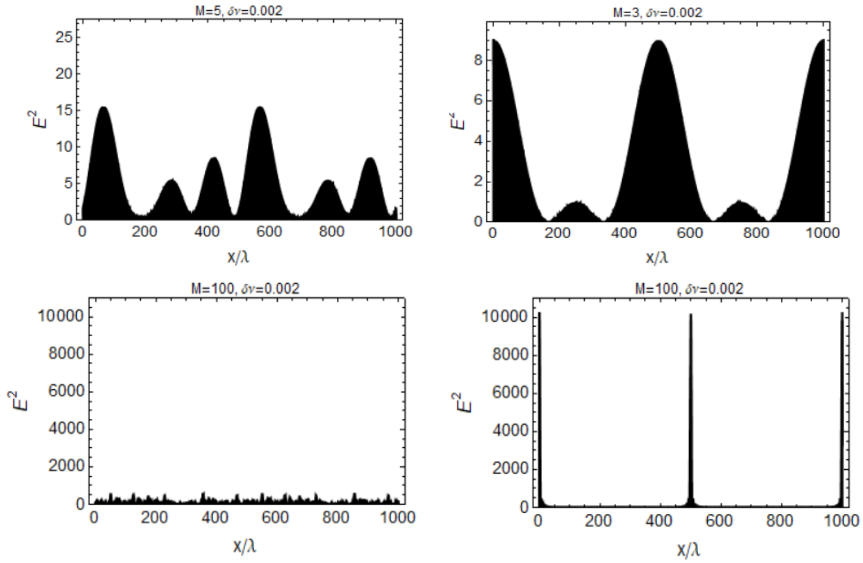


Figure II-2 : somme de M modes avec (à gauche) des phases aléatoires, (à droite) des phases identiques.

La puissance laser est donc augmentée dans le rapport longueur cavité/largeur impulsion = $T_r/\delta t = (M+1)/2$. Quelques exemples pour une cavité L = 0.05 m :

- Laser He-Ne : $\Delta\nu = 1.5\ 10^9$ Hz, $\lambda = 0.633$ µm. ⇒ si N = 1 $\delta\nu = 3\ 10^9$ Hz ⇒ 1 mode, $\delta t \approx 330$ ps
- Laser Nd : $\Delta\nu = 1/(9.5\ 10^{-12}) = 10^{11}$ Hz, $\delta\nu = 1.6\ 10^9$ Hz ⇒ 66 modes, $\delta t \approx 20$ ps
- Laser Ti-Sa : $\Delta\nu = 1/(2\ 10^{-14}) = 5\ 10^{13}$ Hz , $\delta\nu = 1.7\ 10^9$ Hz ⇒ $\Delta\nu/\delta\nu = 33\ 333$ modes, $\delta t \approx 40$ fs

Techniquement, le couplage de modes par modulateur acousto-optique met en phase les modes de la cavité par les fréquences satellite $\pm m\nu_m$ qu'il génère si $\nu_m = \Delta\nu$. Ce couplage peut également se faire de manière passive, grâce à un absorbant saturable qui absorbe les faibles intensités et qui est transparent aux fortes intensités.

II.7. Dérive de fréquence

Le blocage de modes permet d'amplifier une impulsion courte. Mais l'amplification bute contre une limite physique associée à la tenue au flux du matériau. Cette limite est associée à l'intégrale de chemin optique non-linéaire, donnée par l'indice optique non-linéaire N_2 associé à l'effet Kerr d'électrostriction :

$$B = \frac{2\pi}{\lambda_{bh}} \int dx\ N_2 I \qquad \text{(II-30)}$$

Si B > 3, l'effet Kerr devient visible et conduit à de l'autofocalisation au sein du matériau, qui affecte évidemment la qualité du faisceau et la pérennité du matériau. Pour

la silice, $N_2 = 10^{-16}$ cm^2/W . Pour ordre de grandeur, l'amplification dans 1 m de barreau de verre avec I = 10^9 W/cm^2 donne B = 0.63.

En dilatant, avant amplification, une impulsion courte sortant d'un oscillateur laser d'un facteur 10^5 jusqu'à la nanoseconde, puis en amplifiant cette impulsion l'intensité initialement divisée par le facteur de dilatation peut être amplifiée de manière bien plus importante. S'il est possible de comprimer temporellement l'impulsion à ce qu'elle était initialement, une impulsion courte et énergique peut apparaître. C'est le principe de l'amplification à dérive de fréquence (*Chirp pulse amplification* – CPA) inventée en 1985 et qui a valu le prix Nobel de physique à ses deux auteurs, G. Mourou et D. Strickland en 2018. La puissance des impulsions laser n'a fait qu'augmenter depuis 1990 : à l'époque 1 J en 1 ps soit 1 TW, puissance multipliée par 10 tous les 10 ans environ, avec 100 TW en 2010 pour atteindre actuellement 1 PW = 10^{15} W puissance associée à une énergie de 20 J dans 20 fs, durée usuelle accessible dans de nombreux laboratoires.

II.8. Sources laser de puissance

Différents verrous scientifiques et techniques ont sauté au cours des années 50 qui ont permis de faire émerger le laser, croître régulièrement ou par paliers l'énergie pouvant être extraite des faisceaux et la multiplication de ces faisceaux au sein de grands infrastructures de recherche. A l'image des calculateurs à haute performance qui trouvent leur puissance grâce à la multiplicité d'unités de calculs fonctionnant en parallèle. Les grandeurs affectées par ces progrès sont : la longueur d'onde, l'énergie extraite, la durée d'impulsion, le nombre de faisceaux.

1949-1951, c'est la période où A. Kastler (professeur à l'Ecole normale supérieure de la rue d'Ulm) travaille sur le pompage optique, technique permettant d'inverser une population d'atomes, et a qui a constitué un socle de compréhension à la mise au point des dispositifs à émission stimulée.

En 1954, le scénario d'amplification de lumière par l'émission induite conduit à l'invention du MASER (*Microwave amplification by stimulated emission of radiation*) par C. Townes et J. Gordon, son étudiant, à l'université de Columbia (NY, USA) : le milieu amplificateur est l'ammoniac ; 1 nW de puissance est délivré à la longueur d'onde 1.25 cm.

En 1955, N. Basov, A. Prokhorov de l'instiut Lebedev (URSS) propose théoriquement le pompage radiatif pour réaliser l'inversion de population.

En 1956, N. Bloombergen à U. Harvard (MA, USA) développe un maser à amplificateur solide.

En 1958, C.H. Townes et L. Schawlow aux Bell Labs (NY, USA) proposent une voie pour réaliser un maser dans le domaine optique et IR et font breveter leur idée en 1960.

En mai 1960, Th.H. Maiman du Hughes Research Laboratories (CA, USA) réussit le premier faisceau à la longueur d'onde 0.694 μm sortant d'un LASER (*Light amplification by stimulated emission of radiation*) à rubis de 2 cm de long x 1 cm de diamètre ; ce sont les ions Cr^{3+} dans une matrice de corindon (Al_2O_3) qui sont l'objet

d'une inversion de population provoquée par des lampes de flash photographiques. La puissance de ce laser est de 1 kW.

En déc. 1960, A. Javan, W. Bennett, D. Herriott aux Bell Labs développent le 1er faisceau He-Ne, émettant de la lumière continue à 1.15 μm.

1961 voit apparaître la technique du blocage de modes permettant d'atteindre à l'époque 1 MW. A l'heure actuelle elle permet d'atteindre 1 GW.

En 1962, F.J. McClung, Hellwarth de Hughes Research Laboratories (CA, USA) mettent en oeuvre le régime déclenché (ou Q-switch), à savoir une cellule de Kerr, permettant de commuter rapidement la perte de la cavité laser de forte à faible pour produire une impulsion contrôlable et puissante. Deux techniques sont utilisables :

- un absorbant saturable intégré à un miroir
- un modulateur acousto-optique qui induit la diffraction du champ sur les modulations de l'onde sonore. En l'absence de champ dans le modulateur, pas d'onde sonore et perte faible. Avec le modulateur opérationnel, une onde sonore conduit à la déviation de la propagation du champ et à une forte perte d'énergie.

En déc. 1963, L. E. Hargrove, R. L. Fork, M.A. Pollack au Hughes labs font la 1e démonstration d'un laser He-Ne à blocage de modes avec modulateur.

Ces travaux pionniers sur la laser se trouvent couronnés par le prix Nobel de physique, celui de 1964 attribué à C. Townes, N. Basov et A. Prokhorov pour leurs travaux sur l'électronique quantique et celui de 1966 à A. Kastler pour le pompage optique.

Parmi les très nombreuses sources laser, il en est trois qui ont marqué et marquent le domaine de l'interaction laser-plasma, car elles sont capables de fournir de très fortes puissances. Le tableau ci-dessous les listent, avec leurs caractéristiques. Dans la colonne matériau, le premier matériau indiqué est le matériau lasant suivi de la matrice utilisée pour les solides ou du gaz de base pour l'amplificateur à gaz carbonique.

Matériau	λ (μm)	σ (m^2)	τ_A (s)	τ_B (s)	Indice optique	Densité atomes lasant (m^{-3})
Nd^{3+}:YAG	1.064	$4.1\ 10^{-23}$	$1.2\ 10^{-3}$	$9.5\ 10^{-12}$	1.82	$1.38\ 10^{26}$
Ti^{3+}:AL_2O_3 (Ti-Saphir)	0.66 – 1.18	$3\ 10^{-23}$	$3\ 10^{-6}$	$2\ 10^{-14}$	1.76	$4.56\ 10^{25}$
CO_2:N_2:H_2:He	9.6 – 10.6	$7\ 10^{-24}$ si P = 1 bar	4.7	$1.2\ 10^{-7}$	1	$\approx 10^{24}$

Le laser à néodyme a été mis au point en 1964 par J.F. Geusic et R.G. Smith des Bell Labs (NY, USA). Il utilise l'excitation d'ions Nd^{3+} enchâssés dans une matrice YAG = Yttrium Aluminium Grenat. Ce laser pompé par lampes à décharge l'est maintenant avec diodes laser pour un bien meilleur rendement de 50 % au lieu de 3 % en raison de leur bande étroite d'émission adaptée aux raies du laser. Le schéma de pompage utilise 4 niveaux : un premier pompé avec une longueur d'onde 0.81 μm qui relaxe rapidement vers un 2e niveau qui est précisément le niveau h(aut) de l'inversion de population. Par émission stimulée à 1.064 μm, ce niveau se dépeuple vers un 3e niveau, ce dernier se dépeuplant rapidement de manière non radiative vers l'état fondamental. Ce laser a un

rendement faible, de l'ordre de 0.1 % ; il a été augmenté à 1 % dans les lasers de type mégajoule NIF et LMJ au début des années 2000, grâce une technique de multipassage du faisceau laser dans les barreaux d'amplification.

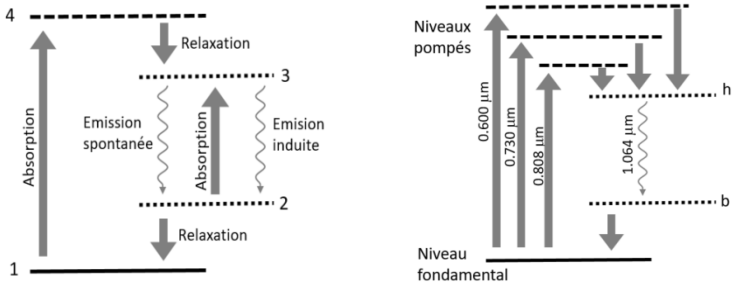


Figure II-3 : niveaux atomiques du laser à Néodyme.

Le laser CO_2 a été mis au point par C.K.N Patel (Bell Labs, USA) en 1964. Il utilise un mélange de différents gaz : 10-20 % CO_2, 10–20% N_2, quelques % H_2 et le reste en He, le tout sous une pression d'un bar en mode impulsionnel. Le pompage se fait par arc de 100 kV. Les molécules de N_2 sont excitées par la décharge vers un niveau vibrationnel d'où elles transfèrent leur énergie par collisions vers les molécules de CO_2. Ces dernières se désexcitent alors par émission stimulée à des longueurs d'onde situées dans l'infrarouge lointain vers un niveau intermédiaire. L'hélium sert à ramener les molécules vers l'état fondamental et à emporter la chaleur créée. Cette source laser se caractérise par un très bon rendement de conversion, au dessus de 10 % qui reste cependant en deça du pompage par diode laser.

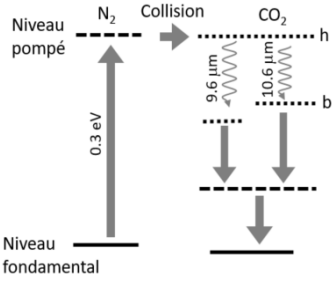


Figure II-4 : niveaux atomiques du laser à CO_2.

Le laser Titane-saphir mis au point en 1982 par P. Moulton du MIT (MA, USA). Il fonctionne suivant un schéma à quatre niveaux effectifs. Ce sont les ions Ti^{3+} qui sont utilisés au sein du saphir (oxyde d'aluminium Al_2O_3). Ces ions sont pompés par une longueur d'onde d'environ 0.52 µm. Le pompage permet de peupler un état vibratoire faisant partie d'une bande couvrant un continuum d'énergies. Des phonons vont alors faire descendre la population dans cette bande vers un état de plus basse énergie, le niveau haut lasant. Une émission est induite à la longueur d'onde ≈ 0.8 µm, ce qui désexcite le niveau haut vers un niveau bas, qui relaxe ensuite vers le niveau fondamental par phonon interposé.

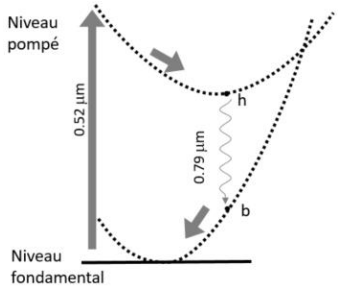


Figure II-5 : niveaux atomiques du laser à titane-saphir.

II.9. Scenarii d'émission laser

II.9.1 Etat stationnaire

Intéressons nous à la possibilité d'un état stationnaire et voyons en les caractéristiques. Les équations associées $d\Delta n/dt = 0$, $dU/dt = 0$ donnent :

$$0 = -A(n_0+\Delta n) - 2\,B\,U\,\Delta n - \frac{\Delta n - \Delta n_p}{\tau_p}$$

$$0 = A\frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}\frac{n_0+\Delta n}{2} + B\frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}\Delta n\,U - \frac{U}{\tau_f}$$

soit une solution $(\Delta n_{st}\,,\, U_{st})$ pouvant être écrite de deux façons différentes pour chaque équation :

$$d\Delta n/dt = 0 \;\Rightarrow\; U_{st} = \frac{1}{2B\tau_p}\left[\frac{\Delta n_p - \tau_p/\tau_A\, n_0}{\Delta n_{st}} - \left(1 + \frac{\tau_p}{\tau_A}\right)\right]$$

$$dU/dt = 0 \;\Rightarrow\; \Delta n_{st} = \frac{2\Delta\nu/h\nu\tau_f\, U_{st} - n_0/\tau_A}{1/\tau_A + 2\,BU_{st}}$$

En substituant cette expression de Δn_{st} dans la 1e équation, nous trouvons une équation du 2e degré en U :

$$U^2 + \frac{1}{2B\tau_p}\left(-\frac{B\,h\nu_{bh}\,\Delta n_p}{\Delta\nu}\tau_f + \frac{\tau_p}{\tau_A} + 1\right)U - \frac{h\nu_{bh}}{4\,B\,\Delta\nu}\frac{\tau_f}{\tau_p\tau_A}(n_0 + \Delta n_p) = 0 \qquad \text{(II-31)}$$

- Si $\tau_p \to \infty$ autrement dit si le milieu n'est pas pompé : l'équation devient : $U^2 + U/2B\tau_A = 0$ aux solutions $U = 0$ et une autre $U < 0$ solution non recevable. La solution stationnaire est donc :

  $$U_{st} = 0 \;\Rightarrow\; \Delta n_{st} = -n_0$$

  Il y a désexcitation des atomes par émission spontanée et donc repeuplement du niveau fondamental des atomes.
- Si $B \to 0$, l'émission induite disparaît : l'équation en U devient du 1er degré :

  $$\frac{1}{2B\tau_p}\left(\frac{\tau_p}{\tau_A} + 1\right)U - \frac{h\nu_{bh}}{4\,B\,\Delta\nu}\frac{\tau_f}{\tau_p\tau_A}(n_0 + \Delta n_p) = 0$$

$$\Rightarrow U_{st} = \frac{h\nu_{bh}}{2\Delta\nu}\frac{\tau_f}{\tau_p+\tau_A}(n_0 + \Delta n_p) \Rightarrow \Delta n_{st} = \frac{-\tau_p\, n_0 + \tau_A\, \Delta n_p}{\tau_p+\tau_A} \qquad \text{(II-32)}$$

Si le pompage est faible ($\tau_p/\tau_A >> 1$), nous trouvons $\Delta n_{st} \to -n_0$ (population désexcitée) ; en revanche si le pompage est fort ($\tau_p/\tau_A << 1$), $\Delta n_{st} \to \Delta n_p$.

- Si $\tau_A \to \infty$ c'est-à-dire l'émission spontanée disparaît : le dernier terme s'annule et nous trouvons une équation du 1er degré de solution :

$$U_{st} = \frac{1}{2\tau_p}\left(\frac{h\nu_{bh}\tau_f\Delta n_p}{\Delta\nu} - \frac{1}{B}\right) \Rightarrow \Delta n_{st} = \frac{\Delta\nu}{\tau_f\, Bh\nu_{bh}} \qquad \text{(II-33)}$$

L'expression de Δn_{st} devient très simple, indépendante de U_{st}. Ce qui donne :

$$U_{st} = \frac{1}{2B\tau_p}\left(\frac{\Delta n_p}{\Delta n_{st}} - 1\right)$$

Nous pouvons identifier un seuil d'accrochage laser associé à $U_{st} = 0$:

$$\Delta n_p = \frac{\Delta\nu}{B\, h\nu_{bh}\tau_f} \equiv \Delta n_{se} \qquad \text{(II-34)}$$

Augmentons Δn_p depuis $-n_0$ (correspond à $n_h = 0$). Tant que $\Delta n_p < \Delta n_{se}$, $U = 0$ et $\Delta n_{st} = \Delta n_p$ croit linéairement avec Δn_p : il n'y a aucun effet laser. Si Δn_p dépasse ce seuil, U_{st} augmente linéairement avec Δn_p et Δn_{st} reste constant.

Plus l'émission induite est importante (B grand) et plus les pertes sont faibles (τ_f grand) et plus Δn_{se} avoisine 0 (équilibre des populations b et h, qui correspond à l'égalité absorption-émission induite)

Pour les visualisations à venir, nous avons choisi un laser Nd:Yag, une cavité de longueur L = 5 cm, de diamètre 5 mm, un miroir de sortie de réflectivité $R_2 = 0.3$, un temps de pompage $\tau_p = 3$ ns, $n_{hp} = 0.9\, n_0$. A t = 0 $\Delta n = -n_0$.

II.9.2 Emission spontanée seule

Nous choissons : B = 0, $\tau_p \to \infty$. A t = 0 : $\Delta n_0 = n_0$, $U_0 = 0$. Deux équations dont la première ne dépendant que de Δn :

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -A(n_0+\Delta n)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{A}{2\Delta\nu}(n_0+\Delta n) - \frac{U}{\tau_f}$$

L'équation en Δn sans second membre a pour solution $\Delta n = C\exp(-At)$. La méthode de variation de la constante nous donne :

$$\frac{dC}{dt}\exp(-At) = -An_0 \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -An_0\exp(At) \Rightarrow C = C_{\Delta n} - n_0\exp(At)$$

$$\Rightarrow \Delta n = C_{\Delta n}\exp(-At) - n_0$$

L'équation en U s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{U}{\tau_f} U = \frac{A}{2\Delta\nu} C_{\Delta n} \exp(-At)$$

La solution sans second membre $U = C \exp(-t/\tau_f)$ nous donne par méthode de la variation de la constante :

$$\frac{dC}{dt} \exp(-t/\tau_f) = \frac{A}{2\Delta\nu} C_{\Delta n} \exp(-At)$$

Avec la condition initiale $C_{\Delta n} = 2n_0 \Rightarrow \Delta n = n_0(2e^{-At} - 1)$, nous trouvons :

si $A\tau_f \neq 1$	si $A\tau_f = 1$
$C = C_U + \frac{A}{2\Delta\nu} C_{\Delta n} \frac{\exp[(1/\tau_f - A)t]}{1/\tau_f - A}$	$C = C_U + \frac{A}{2\Delta\nu} C_{\Delta n}\, t$
$U = C_U \exp(-t/\tau_f) + \frac{A}{2\Delta\nu} C_{\Delta n} \frac{\exp[-At]}{1/\tau_f - A}$	$U = (C_U + \frac{A}{2\Delta\nu} C_{\Delta n}\, t) \exp(-t/\tau_f)$
$0 = C_U + \frac{A}{2\Delta\nu} 2n_0 \frac{1}{1/\tau_f - A}$	$0 = C_U$ (II-35)
$\Rightarrow U = \frac{A}{2\Delta\nu} \frac{1}{1/\tau_f - A} 2n_0 [\exp(-At) - \exp(-t/\tau_f)]$	$\Rightarrow U = \frac{A}{2\Delta\nu} 2n_0\, t \exp(-t/\tau_f)$

Pour $At << 1$, U croit linéairement :

$$U \approx \frac{A}{2\Delta\nu} 2n_0\, t$$

et est maximal pour :

$$\frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow t_m = \frac{\ln(A\tau_f)}{A - 1/\tau_f} \text{ si } A\tau_f > 0 \Rightarrow U_m = \frac{n_0}{\Delta\nu} (A\tau_f)^{-1/(1-1/A\tau_f)}$$

Nous voyons que $t_m > 0$ si $A > 1/\tau_f$, donc si le gain par émission est supérieur aux pertes. Si $A\tau_f = 1$, nous trouvons :

$$t_m = \frac{1}{A} \Rightarrow U_m = \frac{n_0}{e^1\, \Delta\nu}$$

Ci-dessous, des conditions anormales pour montrer le scénario de compétition pour l'énergie photonique entre émission spontanée et perte de la cavité : τ_A Nd x 10^{-5}, B x 0, τ_p x 10^{10} inhibant le pompage, $\Delta n(t=0) = n_0$:

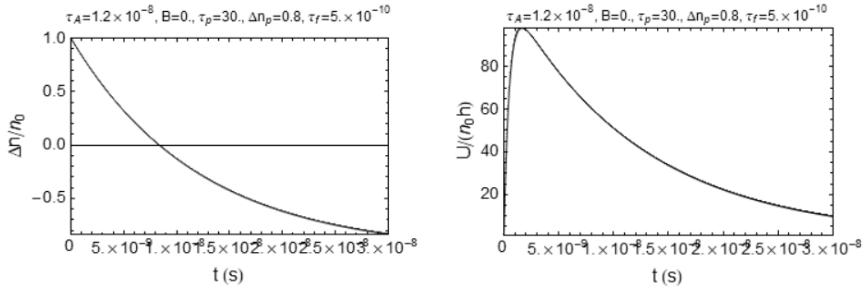


Figure II-6 : Evolution temporelle (à gauche) de l'écart des population des niveaux haut et bas et (à droite) de l'énergie spectrale.

II.9.3 Pompage seul

Nous choisissons A = 0, B = 0. A t = 0 : $n_{h0} = 0$ $\Delta n_0 = -1$. Une seule équation :

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -\frac{\Delta n - \Delta n_p}{\tau_p} \qquad \text{(II-36)}$$

La condition initiale $C_0 = -1 - \Delta n_p$ donne la solution :

$$\Delta n = \Delta n_p - (1+ \Delta n_p)\exp(-t/\tau_p) \qquad \text{(II-37)}$$

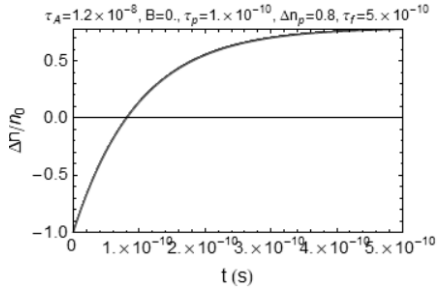


Figure II-7 : Evolution temporelle de l'écart des population des niveaux haut et bas. Pompage seul.

II.9.4 Atome pompé, sans émission spontanée

Considérons $\tau_A << \tau_f$ signifiant que la population d'atomes excités relaxe plus vite que la cavité (laser de type A). Cette condition est celle du laser He-Ne où $\tau_A = 10^{-7}$ s. Une cavité de longueur 1 m avec miroir $T_2 = 0.01$ donne $\tau_f = T_{tr}/T_2 = 6\ 10^{-7}$. Dans ce cas, U reste constant sur l'échelle de temps τ_A et Δn est toujours en situation d'équilibre donnée par $d\Delta n/dt = 0$, ce qui donne :

$$0 = -\frac{1}{\tau_A}(n_0+\Delta n) - 2\,B\,U\,\Delta n - \frac{\Delta n - \Delta n_p}{\tau_p} \Rightarrow \Delta n = \frac{1}{\tau_A+\tau_p}\,\frac{\tau_A\Delta n_p - \tau_p n_0}{1 + 2BU\,\tau_A\tau_p/(\tau_A+\tau_p)}$$

soit le gain :

$$g = \frac{g_0}{1 + I/I_s}$$

Avec cette expression, l'équation en I devient en posant $r = \tau_f g_0/T_{tr}$:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{\tau_f} + g\frac{I}{T_{tr}} = \frac{I}{\tau_f}\left[\frac{r}{1 + I/I_s} - 1\right]$$

Au début de l'amplification laser, I croît exponentiellement :

$$I << I_s \quad \Rightarrow \quad I = I_0 \exp\left[\frac{(r-1)t}{\tau_f}\right]$$

Lorsque $I/I_s >> 1$ et si $r >> 1$:

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{I}{\tau_f}\frac{r}{I/I_s} \quad \Rightarrow \quad I = I_0 + \frac{r}{\tau_f} I_s$$

A la fin $I >>> I_s$, nous observons un état stationnaire : $I = I_s (r-1)$. La solution analytique s'écrit sous la forme t(I) :

$$t = \frac{\tau_f}{r-1}\left[\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) + r \ln\left(\frac{1-r + I_0/I_s}{1-r + I/I_s}\right)\right] \qquad \text{(II-38)}$$

Nous voyons ci-dessous au cours du temps les régimes exponentiel, linéaire et saturé.

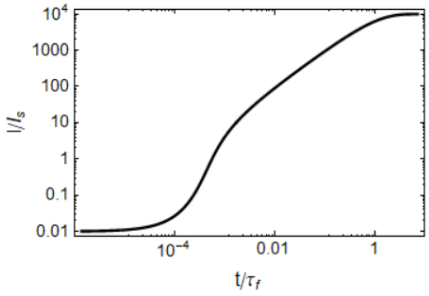


Figure II-8 : intensité spectrale en fonction du temps. $I_0 = 10^{-2}$, $r = 10^4$.

II.9.5 Atome déjà pompé, sans émission spontanée

Nous ne faisons pas d'hypothèse particulière sur τ_f et τ_A. Les grandeurs Δn et U sont couplées mais avec une dynamique qui n'est plus adiabatique comme précédemment pour Δn.

Prenons comme condition initiale $U = 0$, $\Delta n = \Delta n_i$ et définissons $r = \Delta n/\Delta n_{se}$. En ne considérant que l'émission induite et la perte de photons ($\tau_A \to \infty$, $\tau_p \to \infty$), les équations d'évolution s'écrivent :

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -2\,B\,U\,\Delta n = -2\,B\,U\Delta n_{se}\,r$$

$$\frac{dU}{dt} = B\frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}\Delta n\,U - \frac{U}{\tau_f} = \frac{1}{\tau_f}(r-1)\,U \qquad \text{(II-39)}$$

pour donner une équation $U(\Delta n)$:

$$\frac{dU}{d\Delta n} = \frac{dU}{\Delta n_{se}\, dr} = \frac{1}{2B\Delta n_{se}\,\tau_f}\left(-1+\frac{1}{r}\right) \Rightarrow U = \frac{h\nu_{bh}}{2\Delta\nu}\,\Delta n_{se}\,[-r + \ln(r) + C]$$

La condition initiale $r = r_i$, $U = 0$ donne la constante $C = r_i - \ln(r_i)$, soit au final :

$$U = \frac{h\nu_{bh}}{2\Delta\nu}\,\Delta n_{se}\left[-r + r_i + \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)\right] = \frac{h\nu_{bh}}{2\Delta\nu}\,\Delta n_i\left[-\frac{r}{r_i} + 1 + \frac{1}{r_i}\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)\right] \qquad \text{(II-40)}$$

$U = 0$ a deux solutions : $r = r_i$ et r_{fin}, ce dernier s'écrivant simplement pour $r_{fin} << r_i$: […] $\approx r_i + \ln(r/r_i) = 0 \Rightarrow r_{fin} = r_i \exp(-r_i)$. Entre ces deux valeurs de r, U présente un maximum défini par :

$$\frac{d[\ldots]}{dr} = -\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_i\, r} = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow U_{max} = \frac{h\nu_{bh}}{2\Delta\nu}\,\Delta n_{se}\,[-1 + r_i - \ln(r_i)]$$

L'émission induite se caractérise donc par l'évolution temporelle suivante :

Δn	Δn_i	Δn_{se}	Δn_{fin}
U	0	U_{max}	0

U(r) est donné ci-dessous pour deux r_i distincts :

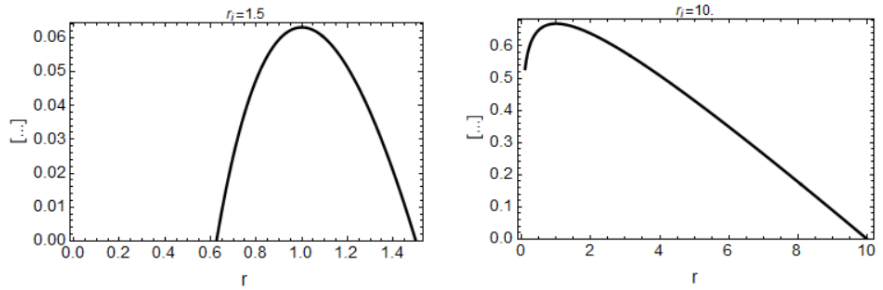


Figure II-9 : énergie spectrale maximale en fonction de l'écart de populations normalisé r $= \Delta n/\Delta n_{se}$.

Si les pertes de la cavité baissent conduisant donc à augmenter τ_f, $\Delta n_{se} \to 0$ ce qui conduit à $r_i \to \infty$ et donc à $U_{max} \to (h\nu_{bh}/2\Delta\nu)\,\Delta n_i$.

L'évolution en fonction explicite du temps n'est pas évidente analytiquement. Mais nous pouvons tout de même considérer le début de l'évolution lorsque U reste suffisamment faible pour ne pas induire de modification importante de Δn, permettant de conserver $\Delta n = \Delta n_i$. U évolue alors exponentiellement en temps :

$$\frac{dU}{dt} = B\frac{h\nu_{bh}}{\Delta\nu}\,\Delta n_i\, U - U/\tau_f = \gamma\, U$$

$$\Rightarrow U = \exp(\gamma t) - 1 \quad \text{avec } \gamma = (\Delta n_i/\Delta n_{se} - 1)\, t/\tau_f \qquad \text{(II-41)}$$

En introduisant cette expression de U dans l'équation $d\Delta n/dt$, nous trouvons :

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -2\,B\,\Delta n_i \exp(\gamma t) - 1 \Rightarrow \Delta n = \Delta n_i \exp\left[\frac{2B}{\gamma}(1 - e^{\gamma t}) - 2Bt\right] \qquad \text{(II-42)}$$