100% ENTRAÎNEMENT

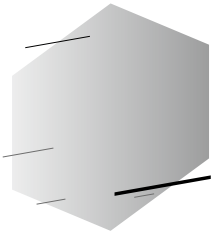
NOUVEAUX PROGRAMMES

MATHS

MPSI/MP2I

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses



100% ENTRAÎNEMENT

Collection dirigée par Sylvain Rondy

MATHS

MPSI/MP2I

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

Retrouvez tous les ouvrages de la collection **100% ENTRAÎNEMENT** sur :
www.editions-ellipses.fr



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Christophe Poulain en LaTeX.

ISBN 9782340-048775
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques (préparant aux écoles d'ingénieur) et économiques (préparant aux écoles de commerce et de management). L'objectif de cette collection est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficulté progressive, sans rappels de cours excepté dans les corrigés.

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires MPSI et MP2I qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 58 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

- **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.
- **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.
- **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le Vrai/Faux de la fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.
- **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs de cette collection ont compilé cet abondant vivier d'exercices pour que ce livre constitue une aide efficace pour le lecteur, non seulement pendant la première année de classe préparatoire, mais aussi par la suite.

Sylvain Rondy

Sommaire

Premier semestre

1. Modes de raisonnement 7
2. Ensembles et applications 15
3. Injections, surjections, bijections 22
4. Relations 28
5. Sommes et produits 34
6. Trigonométrie 47
7. Nombres complexes : formes algébrique et trigonométrique 56
8. Nombres complexes : racines carrées, racines *n*-ièmes 66
9. Nombres complexes : géométrie 77
10. Inégalités 82
11. Généralités sur les fonctions 98
12. Fonctions : limite et continuité 109
13. Fonctions : dérivation 123
14. Fonctions usuelles 132
15. Calcul intégral 146
16. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 159
17. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 168
18. Études de suites 178
19. Suites usuelles 196
20. Dérivation : compléments 205
21. Fonctions convexes 221
22. Divisibilité, PGCD, PPCM 227
23. Congruences 233
24. Structures algébriques usuelles 238
25. Calcul matriciel 247
26. Inversibilité et systèmes linéaires 256
27. Polynômes 263

28. Arithmétique des polynômes 273
29. Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ 278
30. Fractions rationnelles 286

Deuxième semestre

31. Comparaisons de fonctions, de suites 293
32. Développements limités 305
33. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels 316
34. Familles libres, génératrices et bases. 323
35. Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe,sous-espaces supplémentaires 332
36. Espaces vectoriels de dimension finie 338
37. Applications linéaires 349
38. Projecteurs et symétries 364
39. Formes linéaires et hyperplans 372
40. Matrices et applications linéaires 379
41. Changement de base 388
42. Noyau, image et rang d'une matrice 396
43. Matrices semblables et trace 403
44. Groupe symétrique et déterminants 412
45. Compléments d'intégration et formules de Taylor 421
46. Dénombrement 435
47. Espaces probabilisés finis 449
48. Indépendance d'événements 466
49. Variables aléatoires réelles discrètes finies 477
50. Lois discrètes finies usuelles 495
51. Couples de variables aléatoires 506
52. Inégalités en probabilités 519
53. Produits scalaires 528
54. Orthogonalité 535
55. Projection orthogonale et distance 546
56. Séries 555
57. Familles sommables 572
58. Fonctions de deux variables 581

1 Modes de raisonnement

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☐ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. Soit $n \geq 0$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par contraposée, que si n^2 est un entier pair alors n aussi.
2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exercice 4 –

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$$

Montrer par récurrence double que :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Exercice 5 –

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence forte, que tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 1$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 2, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 7 –
Soit u la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 6$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (-3n + 5)\, 3^n$$

Exercice 8 –
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon \implies x = 0$$

Pour aller plus loin

Exercice 9 –
Soit $b > 0$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = bu_n^2$$

Exercice 10 –
Déterminer la (ou les) fonction(s) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle(s) que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est le carré d'un entier, $2n$ ne l'est pas. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Tout entier positif est somme de trois carrés d'entiers naturels. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☒ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. On souhaite montrer que si n^2 est pair, alors n aussi. Supposons donc que n n'est pas pair et montrons que n^2 n'est pas pair. L'entier n est donc impair : il existe un entier $k \geq 0$ tel que $n = 2k + 1$. Alors :

   $$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

   et $2k^2 + 2k$ est un entier donc n^2 est impair. On a ainsi montré le résultat souhaité par contraposée.

Méthode

Soit P et Q deux propositions mathématiques. Montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie est équivalent à montrer que l'implication non$(Q) \Rightarrow$ non(P) est vraie. Autrement dit, pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que Q est fausse et montrer que P est fausse.

2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Sachant que ce nombre est strictement positif, il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

et sans perte de généralité, on peut supposer que cette fraction est irréductible (autrement dit, p et q sont premiers entre eux). On a alors $q\sqrt{2} = p$ donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est un entier pair donc p aussi d'après la question 1. Ainsi, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$. Alors :

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ce qui implique que $q^2 = 2k^2$. Ainsi, q^2 est pair donc q aussi d'après la question 1. On en déduit que p et q sont tous les deux divisibles par 2 ce qui est absurde car p et q sont supposés premiers entre eux. On vient donc de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Cours

L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Un réel est irrationel si il n'est pas rationnel.

Méthode

Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Exercice 3 –

On a $2^1 = 2 > 1$ donc l'inégalité souhaitée est vraie au rang 1.

Soit $n \geq 1$ tel que $2^n > n$. Montrons que $2^{n+1} > n + 1$. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n$$

par hypothèse de récurrence. Or $n \geq 1$ donc $2n = n + n \geq n + 1$. On en déduit que :

$$2^{n+1} > 2n \geq n + 1$$

ce qui montre le résultat souhaité.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Méthode

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer par récurrence une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— On conclut.

Exercice 4 –

On a :

$$\frac{a_0}{0!} = 1 \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{1!} = 1 \leq 1$$

L'inégalité à montrer est donc vraie aux rangs 0 et 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_n}{n!} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leq 1$$

Montrons que :

$$a_{n+2} \leq (n+2)!$$

On a par hypothèse de récurrence et sachant que les termes sont positifs :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + (n+1)a_n \\ &\leq (n+1)! + (n+1)n! \\ &\leq 2(n+1)! \\ &\leq (n+2)(n+1)! \\ &\leq (n+2)! \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait prouver.

Par récurrence double, on vient donc de montrer l'inégalité souhaitée :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Méthode

Pour démontrer par récurrence double une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq 0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq 0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et montre alors que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

— On conclut.

Ce type de raisonnement est particulièrement adapté dans le cas de certaines suites dont un terme dépend des deux précédents. On adapte évidemment le raisonnement si la propriété est définie à partir d'un autre rang que 0.

Exercice 5 –

$2 = \prod_{k=1}^{1} 2$ est bien un produit de nombres premiers (2 est premier).

Soit $n \geq 2$ tel que $2, 3, \dots, n-1$ vérifient la propriété souhaitée. Distinguons deux cas. Si n est premier, le résultat est évident. Sinon, il existe deux entiers naturels i et j, compris entre 2 et $n-1$ tels que $n = ij$. Par hypothèse de récurrence, i et j s'écrivent comme un produit de nombres premiers donc $n = ij$ aussi.

On vient donc de montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers.

Méthode

Pour démontrer par récurrence forte une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

- *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.
- On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout entier $k \in \{n_0, \dots, n-1\}$ et montre alors que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
- On conclut.

Exercice 6 –

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$. Ainsi la propriété est vérifiée au rang 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à deux tel que :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Montrons que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

On sait que :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Par hypothèse de récurrence on sait que $0 \leq u_n \leq 1$. Il est clair que :

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

et on a :

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \geq 0$$

car $n \geq 2$. Ainsi, u_n et $1 - \frac{1}{n^2}$ sont deux nombres compris entre 0 et 1. Par produit, u_{n+1} appartient donc lui aussi à $[0, 1]$.

La propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 7 –

On a :

$$(-3 \times 0 + 5)\, 3^0 = 5 = u_0 \quad \text{et} \quad (-3 \times 1 + 5)\, 3^1 = 2 \times 3 = 6 = u_1$$

L'égalité souhaitée est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = (-3n + 5)\, 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (-3(n+1) + 5)\, 3^{n+1} = (-3n + 2)\, 3^{n+1}$$

Montrons que :

$$u_{n+2} = (-3(n+2) + 5)\, 3^{n+2} = (-3n - 1)\, 3^{n+2}$$

Par définition de u, on sait que :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6\,(-3n + 2)\, 3^{n+1} - 9\,(-3n + 5)\, 3^n \\ &= 2\,(-3n + 2)\, 3^{n+2} - (-3n + 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-6n + 4 + 3n - 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-3n - 1)\, 3^{n+2} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

Par récurrence double, on vient donc de montrer que la propriété de l'énoncé est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Cours

Ce type de suite est appelé suite récurrente linéaire d'ordre deux. Un résultat du programme permet d'obtenir leur terme général (voir fiche 19).

Exercice 8 –

Raisonnons par contraposée. Soit x un réel non nul.

Montrons l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x^2 > \varepsilon$.

Non$(\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon) = (\exists \varepsilon > 0 \mid x^2 > \varepsilon)$

Posons :

$$\varepsilon = \frac{x^2}{2}$$

Sachant que x est non nul, il est clair que $\varepsilon \in \left]0, x^2\right[$ ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 9 –

Il est toujours utile de calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence. Cela permet de conjecturer le signe, les variations, l'expression du terme général...

On a :

$$u_1 = bu_0^2$$

puis :

$$u_2 = bu_1^2 = b(bu_0^2)^2 = b^3u_0^4$$

et :

$$u_3 = bu_2^2 = b^7u_0^8$$

On conjecture alors :

Attention : $u_0^{2^n}$ n'est pas $(u_0^2)^n$

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1}u_0^{2^n}$$

On montre cette égalité par récurrence. Elle est vraie au rang 0 car :

$$b^{2^0-1}u_0^{2^0} = b^0u_0^1 = u_0$$

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = b^{2^n-1}u_0^{2^n}$$

Montrons que :

$$u_{n+1} = b^{2^{n+1}-1}u_0^{2^{n+1}}$$

Par définition de la suite, on a :

$$u_{n+1} = bu_n^2$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b\left(b^{2^n-1}u_0^{2^n}\right)^2 \\ &= bb^{2(2^n-1)}u_0^{2\times 2^n} \\ &= b^{1+2^{n+1}-2}u_0^{2^{n+1}} \\ &= b^{2^{n+1}-1}u_0^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc par principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1}u_0^{2^n}$$

Exercice 10 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction solution du problème posé :

On dit que f est solution d'une équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

On en déduit qu'en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x - f(0)) = 1 - x$$

En remplaçant x par $x + f(0)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x - f(0)$$

Pour $x = 0$, on en déduit que $f(0) = 1 - f(0)$ donc $f(0) = \frac{1}{2}$ et finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} - x$$

Synthèse. Vérifions que la fonction f obtenue est bien solution. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x - f(y)) &= f(x - \tfrac{1}{2} + y) \\ &= \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2} + y\right) \\ &= 1 - x - y \end{aligned}$$

La seule solution du problème posé est donc $f : x \mapsto \frac{1}{2} - x$.

Méthode

Le raisonnement par analyse-synthèse est très utile pour des problèmes du type :

- Trouver les fonctions telles que ...
- Trouver les suites telles que ...
- Trouver les couples de réels tels que ...

Dans l'analyse, on considère une solution du problème et en utilisant les données de l'énoncé, on essaie de trouver des conditions sur cette solution. Dans la synthèse, on vérifie si les conditions trouvées suffisent (il peut arriver que non : on peut alors tenter de trouver d'autres conditions et il peut arriver qu'aucune solution n'existe).

Exercice 11 –

1. Vrai. Soit $n \geq 1$ s'écrivant comme le carré d'un entier : $n = k^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que $2n$ est aussi le carré d'un entier : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n = p^2$. On en déduit que $p^2 = 2k^2$ donc par stricte positivité de p et k :

   $$\sqrt{2} = \frac{p}{k}$$

   ce qui implique que $\sqrt{2}$ est rationnel ce qui est absurde. Ainsi, $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

2. Faux. Il suffit de trouver un contre-exemple. En étudiant les premières valeurs de n, on remarque que la propriété est fausse pour $n = 7$. En effet, si il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

   $$7 = a^2 + b^2 + c^2$$

   alors a, b et c appartiennent nécessairement à $\{0, 1, 2\}$ (sinon, la somme est supérieure ou égale à 9). On vérifie alors facilement qu'aucun triplet n'est solution.

   Méthode

   Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier $n \geq 0$ est fausse, il suffit de donner un contre-exemple concret.

2 Ensembles et applications

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$	☐ Vrai	☐ Faux
2. $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
3. $A \subset B \iff \exists x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$	☐ Vrai	☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Donner l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 3 –

On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = [0, 2]$, $B = [1, 2]$, $C = [1, 3]$. Donner explicitement les ensembles suivants :

— $A \cup B$.

— $A \cup C$.

— $A \cap C$.

— $A \backslash B$.

— $(\mathbb{R} \setminus A) \cap C$.

Exercice 4 –

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = -x$$

1. $f \circ g$ est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si oui, donner son expression.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f \circ g(x) = x$.

Exercice 5 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 1$$

1. Déterminer l'image directe de $[0, 2]$ par f.

2. Déterminer l'image réciproque de $[1, 4]$ par f.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 6 –
Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble telles que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$. Montrer que $A = B$.

Exercice 7 –
Soit X une partie d'un ensemble E. On définit la fonction indicatrice de X, $\mathbf{1}_X : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, de la manière suivante :

$$\forall e \in E,\ \mathbf{1}_X(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in X \\ 0 & \text{si } e \notin X \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E. Exprimer les fonctions indicatrices de $E \setminus A$, $A \cap B$, $A \cup B$ en fonction des fonctions indicatrices de A et B.

Exercice 8 –
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer les assertions suivantes :

1. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(F)^2,\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –
Soit A, B deux parties d'un ensemble E.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$ admette au moins une solution.
2. Résoudre dans ce cas cette équation.

Exercice 10 –
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ f$.

Exercice 11 – Le vrai/faux de la fin
Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$	☒ Vrai	☐ Faux
2. $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$	☒ Vrai	☐ Faux
3. $A \subset B \iff \exists x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☒ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$	☒ Vrai	☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	☒ Vrai	☐ Faux

🎓 Cours

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

— On définit la réunion de A et B, et on note $A \cup B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

— On définit l'intersection de A et B, et on note $A \cap B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$$

— On définit le complémentaire de A dans E, et on note $E\backslash A$, le sous-ensemble de E défini par :

$$E\backslash A = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

On a les propriétés suivantes (distributivité) :

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

Exercice 2 –

Notons E cet ensemble. Alors :

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$$

🎓 Cours

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est l'ensemble des sous-ensembles de E. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, et l'ensemble E sont des parties de E.

Exercice 3 –

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cup B$ si et seulement si x appartient à A ou x appartient à B. Or B est inclus dans A donc $A \cup B = A = [0, 2]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cup C$ si et seulement si x appartient à A ou x appartient à C.

On en déduit que $A \cup C = [0, 3]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \cap C$ si et seulement si x appartient à A et x appartient à C. On en déduit que $A \cap C = [1, 2]$.

— Pour tout réel x, x appartient à $A \setminus B$ si x appartient à A mais pas à B donc $A \setminus B = [0, 1[$.

— Pour tout réel x, x appartient à $(\mathbb{R} \setminus A) \cap C$ si et seulement si x n'appartient pas à A et x appartient à C donc si et seulement si $x < 0$ ou $x > 2$ et $x \in [1, 3]$. Ainsi, $(E \setminus A) \cap C =]2, 3]$.

Exercice 4 –

1. On a f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de même pour g donc $f \circ g$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$$

Cours

Soit A, B et C trois ensembles $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle *application composée* de f par g et on note $g \circ f$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f & : & A & \longrightarrow & C \\ & & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Dans le cas de deux fonctions, les ensembles d'arrivées ne sont pas forcément précisés. Pour déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$ dans le cas de deux fonctions f et g définies sur A et B, on détermine les éléments $a \in A$ tels que $f(a) \in B$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f \circ g(x) &= \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) - \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \\ &= \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) - \ln(1 + \tfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}) \\ &= \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) - \ln(\tfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{x}}) \\ &= \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) - (\ln(\mathrm{e}^{x} + 1) - \ln(\mathrm{e}^{x})) \\ &= \ln(\mathrm{e}^{x}) \\ &= x \end{aligned}$$

Exercice 5 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x varie de 0 à 2, alors x^2 prend toutes les valeurs entre 0 et 4 donc $3x^2$ prend toutes valeurs entre 0 et 12 et finalement, $f(x)$ prend toutes les valeurs entre 1 et 13. Ainsi :

$$f([0, 2]) = [1, 13]$$

Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour une partie X de E, on définit l'image directe de X par f, et on note $f(X)$, la partie de F définie par :

$$f(X) = \{f(x),\ x \in X\} = \{y \in F,\ \exists x \in X,\ f(x) = y\}$$

2. Cherchons les réels x tels $f(x) \in [1,4]$. Cela revient à résoudre :

$$1 \leq 3x^2 + 1 \leq 4$$

ou encore :

$$0 \leq 3x^2 \leq 3$$

ce qui est équivalent à $x^2 \in [0,1]$. Ainsi :

$$f^{-1}([1,4]) = [-1,1]$$

Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour une partie Y de F, on définit l'image réciproque de Y par f, et on note $f^{-1}(Y)$, la partie de E définie par :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E,\ f(x) \in Y\}$$

Exercice 6 –

Montrons le raisonnement par double inclusion. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup C$ donc $x \in B \cup C$ par hypothèse. On en déduit que x appartient à B ou à C. Distinguons deux cas :

— Si x appartient à B, c'est ce que l'on voulait montrer.

— Si x appartient à C alors il appartient à $A \cap C$. Or $A \cap C = B \cap C$ donc x appartient à B.

On vient donc de montrer que pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc A est inclus dans B.

Par un raisonnement analogue (on échange les rôles de A et de B), on montre que B est inclus dans A. Ainsi, $A = B$.

Méthode

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A = B$ est équivalent à montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exercice 7 –

— Soit $x \in E$. Alors $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si et seulement si $x \notin A$ donc si et seulement si $x \in E \setminus A$. Une fonction indicatrice ne prenant que deux valeurs, on a aussi que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si et seulement si $x \notin E \setminus A$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$$

où 1 désigne abusivement la fonction constante égale à 1.

— Soit $x \in E$. Alors x appartient à $A \cap B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_B(x) = 1$ donc (sachant qu'une fonction indicatrice vaut 0 ou 1) si et seulement si $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

— La partie $A \cup B$ de E est l'union disjointe des éléments de A qui ne sont pas dans B, des éléments de B qui ne sont pas dans A et des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. En se basant sur ceci, posons :

$$f = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$$

Soit $x \in A \cup B$. Distinguons les trois cas précédents. Si $x \in A \setminus B$ alors :

$$f(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 + 0 - 1 \times 0 = 1$$

De même, si $x \in B \setminus A$, on obtient $f(x) = 1$. Pour finir, si $x \in A \cap B$:

$$f(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 \times 1 = 1$$

Si $x \notin A \cup B$ alors il est clair que $f(x) = 0$. On en déduit que :

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$$

Exercice 8 –

1. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \subset B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Or a appartient à A qui est inclus dans B donc a appartient à B. On en déduit que y appartient à $f(B)$. Ainsi, $f(A) \subset f(B)$.
2. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. On sait que x appartient à A et x appartient à B donc $y = f(x)$ appartient à $f(A)$ et $f(B)$. Ainsi, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Raisonnons par double inclusion.
   — Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si x appartient à A alors dans ce cas $y = f(x)$ appartient à $f(A)$. Si x n'est pas dans A, il est nécessairement dans B (car $x \in A \cup B$) et de la même manière on montre que y appartient à $f(B)$. Ainsi :

   $$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

   — On sait que $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc d'après la question 1 :

   $$f(A) \subset f(A \cup B) \text{ et } f(B) \subset f(A \cup B)$$

   On en déduit que : $X \subset W$ et $Y \subset W \Longrightarrow X \cup Y \subset W$

   $$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

   Par double inclusion, on vient de montrer que :

   $$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

4. Soit $x \in E$. Alors x appartient à $f^{-1}(A \cup B)$ si et seulement si $f(x)$ appartient à A ou B donc si et seulement si x appartient à $f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B)$. On en déduit le résultat souhaité :

   $$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Exercice 9 –

1. Raisonnons par analyse-synthèse.
   Analyse. Supposons l'existence d'une solution X à l'équation $A \cup X = B$.
   On a alors $A \subset A \cup X = B$ donc A est une partie de B. On cherche une condition sur A et B

Synthèse. Supposons que A est une partie de B. Remarquons alors que :

$$A \cup (B \setminus A) = B$$

donc l'équation de l'énoncé a au moins une solution.

Ainsi, l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$ admet une solution si et seulement si $A \subset B$.

2. On suppose que A est une partie de B. Une partie $X \in \mathscr{P}(E)$ est solution de $A \cup X = B$ si et seulement si X est une partie de B telle que $(B \setminus A) \subset X$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathscr{S} = \{X \in \mathscr{P}(E),\ (B \setminus A) \subset X \subset B\}$$

Méthode

Pour ce type d'exercice, un bon dessin permet de conjecturer la condition nécessaire et suffisante.

Exercice 10 –

Soit $x \in [0, 1]$. Remarquons que $f(x) \in [0, 1]$ donc $f \circ f(x)$ est bien défini. Distinguons deux cas.

— Si $x \in \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x \in \mathbb{Q}$ donc $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x$.

— Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1 - x$. Le réel $1 - x$ n'est pas rationnel (sinon $-x$ le serait donc x aussi ce qui est faux) donc :

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$$

On en déduit que $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

L'application identité d'un ensemble envoie chaque élément sur lui-même

Exercice 11 –

1. Vrai. Raisonnons par double inclusion. Le fait que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ implique que :

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \text{ et } \mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(B)$$

donc :

$$\mathscr{P}(A \cap B) \subset \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

Montrons l'autre inclusion. Soit $X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Alors X est une partie de A et une partie de B donc X est une partie de $A \cap B$. Ainsi :

$$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cap B)$$

On en déduit que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

2. Faux. Donnons un contre exemple en posant $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$.
On a alors $A \cup B = [0, 3]$. Le segment $[0, 3]$ est donc une partie de $A \cup B$ mais n'est pas une partie de A, ni de B.

3 Injections, surjections, bijections

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) = x^2$$

1. f est injective.	☐ Vrai	☐ Faux
2. f est surjective.	☐ Vrai	☐ Faux
3. f est bijective.	☐ Vrai	☐ Faux
4. g est injective.	☐ Vrai	☐ Faux
5. g est surjective.	☐ Vrai	☐ Faux
6. g est bijective.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \left]e^2, +\infty\right[$ définie par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = e^{2+1/x}$$

1. Montrer que f est une application.
2. Montrer que f est bijective et donner son application réciproque.

Exercice 4 –

Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, f aussi.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g aussi.

3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.

4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Pour aller plus loin

Exercice 5 –

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 6 –

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Fixons A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F.

1. On peut toujours définir la restriction de f à une partie de E. ☐ Vrai ☐ Faux

2. La restriction de f à A est injective si f l'est. ☐ Vrai ☐ Faux

3. La co-restriction de f à B est bien définie. ☐ Vrai ☐ Faux

4. Si f est injective, la co-restriction de de f à $f(E)$ est bijective. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. f est injective. ☐ Vrai ☒ Faux

2. f est surjective. ☐ Vrai ☒ Faux

3. f est bijective. ☐ Vrai ☒ Faux

4. g est injective. ☐ Vrai ☒ Faux

5. g est surjective. ☒ Vrai ☐ Faux

6. g est bijective. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

— On dit que f est *injective* lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f. Montrer que f est injective est équivalent à vérifier :

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

— On dit que f est *surjective* lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f c'est-à-dire :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$$

— On dit que f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective ce qui revient à dire que :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$$

Exercice 2 –

Remarquons que $g \circ f : E \to G$ est bien définie.

1. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Par définition, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or g est injective (et $f(x), f(x')$ sont deux éléments de F) donc $f(x) = f(x')$. Or f est injective donc $x = x'$.

On en déduit que $g \circ f$ est injective.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

— Pour montrer que f est injective, on se donne deux éléments quelconques x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.

— Pour montrer que f n'est pas injective, on cherche deux éléments distincts de E ayant la même image par l'application f.

2. Soit $z \in G$. L'application $g : F \to G$ est surjective donc il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Or $f : E \to F$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On en déduit que :

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

On en déduit que $g \circ f$ est surjective.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

— Pour montrer que f est surjective, on fixe un élément de F et on montre qu'il admet un antécédent par f.

— Pour montrer que f n'est pas surjective, on cherche un élément de F n'admettant pas d'antécédent par f.

Exercice 3 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\frac{1}{x}$ existe donc $f(x)$ aussi. De plus, on a :

$$2 + \frac{1}{x} > 2$$

donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$f(x) = \exp\left(2 + \frac{1}{x}\right) > \mathrm{e}^2$$

Ainsi, $f(x)$ appartient à $]\mathrm{e}^2, +\infty[$. On en déduit que f est une application bien définie.

2. Soit $y \in \left]\mathrm{e}^2, +\infty\right[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = y \iff \exp\left(2 + \frac{1}{x}\right) = y \iff 2 + \frac{1}{x} = \ln(y)$$

car $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective. On en déduit que :

$$f(x) = y \iff \frac{1}{x} = \ln(y) - 2$$

Or $y > \mathrm{e}^2$ donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\ln(y) > 2$ donc $\ln(y) - 2 > 0$. Finalement, on a :

$$f(x) = y \iff x = \frac{1}{\ln(y) - 2}$$

D'après le raisonnement suivant, on sait que le réel $\frac{1}{\ln(y)-2}$ est strictement positif. On en déduit que f est bijective et l'application $f^{-1} : \left]\mathrm{e}^2, +\infty\right[\to \mathbb{R}_+^*$ est définie par :

$$\forall y > \mathrm{e}^2,\ f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln(y) - 2}$$

Méthode

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour montrer que f est bijective, on peut suivre la démarche suivante :

- On fixe un élément y de F.
- On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
- On montre qu'il y a une unique solution x (exprimée en fonction de y) sans oublier de vérifier que celle-ci appartient bien à E.

L'application réciproque de f, notée f^{-1}, est l'application définie sur F à valeurs dans E définie de la manière suivante : pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f (autrement dit, c'est l'élément x obtenu précédemment).

Exercice 4 –

1. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Or $g \circ f$ est injective donc $x = x'$. Ainsi, f est injective.
2. Soit $z \in G$. On sait que $g \circ f$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. On en déduit que :
$$g(f(x)) = z$$
et $f(x) \in F$. Ainsi, g est surjective.
3. D'après la question 1, f est injective donc bijective (car surjective).
On peut alors écrire :

La composition d'applications est associative

$$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$$
Ainsi, g est la composée de deux applications injectives donc est injective (exercice 2).
4. D'après la question 2, l'application g est surjective donc bijective (car injective). On peut alors écrire :
$$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$$
Ainsi, f est la composée de deux applications surjectives donc est surjective (exercice 2).

À retenir

Une bijection réciproque est évidemment bijective.

Exercice 5 –

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On résout l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

— Si $m > 0$: dans ce cas, si n est pair, $f(n)$ est toujours différent de m car $f(n) \leq 0$. On cherche donc n impair tel que $f(n) = m$, ou encore :
$$\frac{n+1}{2} = m$$
ce qui est équivalent à $n = 2m - 1$. Remarquons que $2m - 1$ est bien un entier naturel car $m \in \mathbb{N}^*$.

— Si $m \leq 0$: dans ce cas, si n est impair, $f(n)$ est toujours différent de m car $f(n) > 0$. On cherche donc n pair tel que $f(n) = m$, ou encore :
$$-\frac{n}{2} = m$$
ce qui est équivalent à $n = -2m$. Remarquons que $-2m$ est bien un entier naturel car $m \leq 0$.

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$ admet une unique solution. On en déduit que f est bijective.

Exercice 6 –

Supposons f injective. Soit $y \in E$. On a :

$$f \circ f \circ f(y) = f(y)$$

donc :

$$f(f(f(y))) = f(y)$$

Or f est injective donc $f(f(y)) = y$.
On en déduit que f est surjective (pour tout $y \in E$, $f(y)$ est un antécédent de y par f).

Supposons f surjective. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On sait que f est surjective donc $f \circ f$ aussi (composée de deux surjections : voir exercice 2). Il existe donc deux éléments y et z de E tels que :

$$x = f \circ f(y) \quad \text{et} \quad x' = f \circ f(z)$$

Or $f(x) = f(x')$ donc :

$$f \circ f \circ f(y) = f \circ f \circ f(z)$$

et ainsi par hypothèse, $f(y) = f(z)$. En appliquant f, on a :

$$x = f \circ f(y) = f \circ f(z) = x'$$

On en déduit que f est injective.

Exercice 7 –

1.	On peut toujours définir la restriction de f à une partie de E.	☒ Vrai	☐ Faux
2.	La restriction de f à A est injective si f l'est.	☒ Vrai	☐ Faux
3.	La co-restriction de f à B est bien définie.	☐ Vrai	☒ Faux
4.	Si f est injective, la co-restriction de de f à $f(E)$ est bijective.	☒ Vrai	☐ Faux

🎓 Cours

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

— Pour toute partie A de E, la restriction de f à A, notée f_A, est l'application de A dans F définie par :

$$\forall x \in A,\ f_A(x) = f(x)$$

— Pour toute partie B de F contenant $f(E)$, la corestriction de f à B, notée f^B, est l'application de E dans B définie par :

$$\forall x \in E,\ f^B(x) = f(x)$$

4 Relations

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. La relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. ☐ Vrai ☐ Faux
2. La relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

On définit la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$:

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ a|b \iff \exists k \in \mathbb{N},\ b = ak$$

Montrer que cela définit sur $\mathbb{N}^*$ une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 3 –

Combien de classes d'équivalence a la relation de congruence modulo $n \geq 1$ sur $\mathbb{Z}$?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n$$

Cette relation est-elle une relation d'ordre ? Une relation d'équivalence ?

Exercice 5 –

1. Étudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$$
2. Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\,\mathscr{R}\,y \iff x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x$$
   a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence d'un réel x.

Pour aller plus loin

Exercice 6 –

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$. On dit qu'une partie F de E admet un élément maximal si il existe $y \in F$ tel que :

$$\forall f \in F,\ f \leq y$$

Montrer que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E (pour la relation $\leq$) est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 7 – Le vrai/faux de la fin

On définit la relation d'équivalence suivante sur $\mathbb{Z}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x \mathrel{\mathscr{R}} y \iff y - x \text{ est pair}$$

1. $\mathscr{R}$ a une infinité de classes d'équivalence deux à deux distinctes. ☐ Vrai ☐ Faux

2. $\mathscr{R}$ admet uniquement deux classes d'équivalence distinctes. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. ☒ Vrai ☐ Faux

2. La relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. ☐ Vrai ☒ Faux

Exercice 2 –

Vérifions les différents points.

— Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Alors $a|a$ car $a = a \times 1$. La relation est donc réflexive.

— Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a|b$ et $b|a$. Alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que $b = ak$ et $a = bk'$. Alors :

$$b = ak = bkk'$$

donc $kk' = 1$ (b est non nul) et sachant que k et k' sont des entiers naturels, on en déduit que $k = k' = 1$ donc $a = b$. La relation est donc antisymétrique.

— Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a|b$ et $b|c$. Alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que $b = ak$ et $c = bk'$. Alors :

$$c = bk' = akk'$$

et $kk' \in \mathbb{N}$ donc $a|c$. Ainsi, la relation est transitive.

On en déduit que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

L'ordre n'est pas total car 2 n'est pas divisible par 3 et 3 n'est pas divisible par 2.

Cours

Soit E un ensemble. Une relation binaire de E est une partie de E^2. En notant $\mathscr{R}$ cette relation, on écrit $x \mathscr{R} y$ si (x, y) appartient à $\mathscr{R}$ et on dit que x est en relation avec y.

On dit que :

- $\mathscr{R}$ est réflexive si : $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x$.
- $\mathscr{R}$ est symétrique si : $\forall x, y \in E,\ x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x$.
- $\mathscr{R}$ est antisymétrique si : $\forall x, y \in E,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x \implies x = y$.
- $\mathscr{R}$ est transitive si : $\forall x, y, z \in E,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z \implies x \mathscr{R} z$.
- $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.
- $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Une relation d'ordre $\mathscr{R}$ est dite totale si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathscr{R} y \text{ ou } y \mathscr{R} x$$

Exercice 3 –

Elle en admet n : $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ (tout entier relatif est congru à 0, 1, …, ou $n-1$ modulo n).

Cours

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On appelle classe d'équivalence d'un élément x de E, et on note $\overline{x}$, la partie de E définie par :

$$\overline{x} = \{y \in E,\ x \mathscr{R} y\}$$

Ces classes d'équivalence forment une partition de E : leur réunion est égale à E et deux classes d'équivalence d'éléments de E sont soit distinctes, soit égales.

Exercice 4 –

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x = x^1$ donc $x \preccurlyeq x$. Ainsi, cette relation est réflexive.

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$. Alors il existe deux entiers naturels n et m tels que $y = x^n$ et $x = y^m$. On a alors :

$$y = x^n = (y^m)^n = y^{nm}$$

On en déduit alors que :

Les termes sont strictement positifs

$$\ln(y) = nm \ln(y)$$

Distinguons deux cas.

Ne pas simplifier par un nombre sans savoir si il est non nul !

- Si $\ln(y) = 0$ alors $y = 1$ et $x = 1^m = 1$ donc $x = y$.

— Si $\ln(y) \neq 0$ alors $nm = 1$. Or n et m sont des entiers naturels donc $n = m = 1$ donc $y = x^1 = x$.

On vient donc de montrer que cette relation est antisymétrique.

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. Alors il existe deux entiers naturels n et m tels que $y = x^n$ et $z = y^m$. On a donc :

$$z = y^m = (x^n)^m = x^{nm}$$

et $nm \in \mathbb{N}$. On en déduit que $x \preccurlyeq z$. Ainsi, cette relation est transitive. C'est donc une relation d'ordre.

Montrons que cette relation n'est pas symétrique en donnant un contre-exemple. Il est clair que $2 \preccurlyeq 4$ car $4 = 2^2$ (et 2 est un entier naturel). Or, 4 n'est pas en relation avec 2 car $2 \neq 4^n$ pour tout entier naturel n. Ainsi, cette relation n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 –

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t} = (1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$$

Le signe de $f'(t)$ est donc le signe de $1 - t$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

2. **a)** Vérifions les différents points de la définition.

— Pour tout réel x, $x\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$ donc x est en relation avec x. La relation est donc réflexive.

— Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x \mathrel{\mathscr{R}} y$ alors $x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x$ donc $y\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^y$ et y est donc en relation avec x. La relation est bien symétrique.

— Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si $x \mathrel{\mathscr{R}} y$ et $y \mathrel{\mathscr{R}} z$ alors :

$$x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad y\,\mathrm{e}^z = z\,\mathrm{e}^y$$

On en déduit que :

$$x\,\mathrm{e}^z = x\,\mathrm{e}^y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^z = y\,\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^z = y\,\mathrm{e}^z\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}$$

donc :

$$x\,\mathrm{e}^z = z\,\mathrm{e}^y\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y} = z\,\mathrm{e}^x$$

Ainsi, $x \mathrel{\mathscr{R}} z$. La relation est donc transitive.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel y, $x \mathrel{\mathscr{R}} y$ si et seulement si $x\,\mathrm{e}^y = y\,\mathrm{e}^x$ ce qui est équivalent à $f(x) = f(y)$. On en déduit que la classe de x est $f^{-1}(\{f(x)\})$.

D'après la question 1, on sait que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus, la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$ (par produit), celle en $+\infty$ est 0 (par croissances comparées) et $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

On distingue alors deux cas (en remarquant que $f(0) = 0$).

— Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Alors $f(x) \leq 0$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la classe de x ne contient qu'un seul élément (qui est x).

— Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, différent de 1. Alors $f(x) \in \left]0, \mathrm{e}^{-1}\right[$. La fonction f est négative sur $\mathbb{R}_-$ (donc n'atteint pas la valeur $f(x)$ sur cet intervalle), elle est strictement croissante sur $]0, 1[$ et continue sur cet intervalle donc réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]0, \mathrm{e}^{-1}[$ et de même réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\left]0, \mathrm{e}^{-1}\right[$. On en déduit alors que la classe de x contient deux éléments.

— Si $x = 1$, la classe de x ne contient qu'un seul élément (f n'atteint la valeur e^{-1} qu'en 1).

À retenir

Si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles E et F, on appelle image réciproque d'une partie de Y de E, et on note $f^{-1}(F)$, la partie de E suivante :

$$f^{-1}(F) = \{x \in E, f(x) \in F\}$$

Attention : cet ensemble existe toujours, même si f n'est pas bijective.

Exercice 6 –

Supposons que toute partie de E admet un élément maximal. Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de E. L'ensemble $\{u_n,\ n \geq 0\}$ admet par hypothèse un élément maximal (car c'est une partie de E) donc il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n \leq u_{n_0}$$

Or u est croissante donc :

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n_0} \leq u_n$$

Par antisymétrie, on en déduit que :

Attention : la relation est quelconque, ce n'est pas la relation usuelle sur $\mathbb{R}$. Il est important de préciser l'antisymétrie !

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$$

donc u est stationnaire.

Raisonnons par contraposée pour montrer la deuxième implication. Supposons donc l'existence d'une partie F de E n'admettant pas d'élément maximal. Fixons un élément quelconque de F et nommons

le u_0. Cet élément n'est pas un élément maximal donc il existe un élément de F, que l'on note u_1 tel que $u_0 \leq u_1$ et $u_0 \neq u_1$. Or cet élément u_1 n'est lui non plus pas un élément maximal de F : il existe donc un élément de F, que l'on note u_2 tel que $u_1 \leq u_2$ et $u_1 \neq u_2$. On construit donc de proche en proche, une suite d'éléments de F (donc de E), croissante et non stationnaire.

À retenir

Ne pas écrire $u_0 < u_1$ dans le raisonnement précédent car $<$ n'est pas défini ici ! La relation proposée n'est à priori pas la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 –

1. Faux. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Si x est pair alors x est en relation avec 0 et si x est impair alors x est en relation avec 1. Il ne peut donc y avoir au plus que deux classes d'équivalences distinctes : celle de 0 et celle de 1.
2. Vrai. Il y en a au plus deux d'après la question précédente et 0 et 1 ne sont pas en relation donc il y en a exactement deux.

5 Sommes et produits

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ☐ Vrai ☐ Faux

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ☐ Vrai ☐ Faux

3. $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^n - 1$ ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $n \geq 1$. Donner la valeur des sommes suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Retrouver ensuite le résultat plus simplement en remarquant que pour tout entier k, $1 = 1 + k - k$.

Exercice 4 –

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$$

Exercice 5 –

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 6 –

Calculer les sommes doubles suivantes ($n \geq 1$) :

1. $S_1 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i - j|$.
2. $S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i, j)$.
3. $S_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la dérivée de $x \mapsto 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, déterminer pour tout réel x la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{n} k x^k$$

Exercice 8 –

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire le produit suivant à l'aide de factorielles :

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$$

Exercice 9 –

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et P_n le produit défini par :

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} \left(1 + a^{2^i}\right)$$

1. Calculer P_n dans le cas où $a = 1$.
2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$. Donner une expression simple de $(1 - a)P_n$ puis de P_n en fonction de n et de a.

Pour aller plus loin

Exercice 10 –

Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

Exercice 11 –

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n \geq 1$.

1. $\sum_{k=1}^{n}(4k-2) = \sum_{k=1}^{n}(n+k)$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ☒ Vrai ☐ Faux

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ☐ Vrai ☒ Faux

3. $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^n - 1$ ☐ Vrai ☒ Faux

🎓 Cours

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (hors-programme à savoir retrouver)
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Exercice 2 –

🎓 Cours – Formule du binôme de Newton.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On a :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

et comme $n \geq 1$:

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$$

Exercice 3 –

On procède par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 1$, on a d'une part :

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, on a ainsi l'égalité souhaitée au rang 1.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Montrons que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

On sait que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^n + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité souhaitée.

Ainsi, la propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Donnons maintenant une autre preuve en utilisant l'indication. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k-k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

par télescopage. On obtient donc le résultat souhaité car :

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Méthode

Une somme télescopique est une somme dont le terme général est de la forme :

$$a_{k+1} - a_k \text{ ou } a_k - a_{k+1} \text{ ou encore } a_k - a_{k-1}$$

En écrivant les deux premiers termes de la somme, on repère la quantité qui ne se simplifie pas (dans l'exemple précédent c'est $\frac{1}{1}$) ce qui nous permet de reconnaitre la quantité restant dans le dernier terme de la somme (on a gardé au début le terme positif, on garde donc à la fin le terme négatif, c'est-à-dire $-\frac{1}{n+1}$).

Exercice 4 –

Procédons par récurrence.

Pour $n = 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{0} k! = 0! = 1 \leq 1! = (0+1)!$$

L'inégalité souhaitée est donc vérifiée au rang 0.

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$$

Montrons que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! \leq (n+2)!$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k! &= \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \\ &\leq (n+1)! + (n+1)! \\ &= 2(n+1)!\end{aligned}$$

Or $2 \leq n+2$ donc par positivité des termes :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! \leq (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée au rang $n+1$.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

🎓 Cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La factorielle de n, notée $n!$, est définie par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exercice 5 –

Soit $n \geq 1$. Alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

On repère ici une somme télescopique. On a :

$$S_n = (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln(n))$$

donc par télescopage :

$$S_n = -\ln(1) + \ln(n+1) = \ln(n+1)$$

Exercice 6 –

1. On a :

On découpe la somme double suivant le signe de $i-j$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} |i-j| + \sum_{j=i+1}^{n} |i-j|\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} (i-j) + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i)\right) \end{aligned}$$

car si $j \leq i$, $|i-j| = i-j$ et si $j > i$, $|i-j| = j-i$. On remarque alors par changement d'indice que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, on a :

$$\sum_{j=i+1}^{n} (j-i) = \sum_{j=1}^{n-i} j$$

donc :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{i} 1 - \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=1}^{n-i} j\right)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (n-i)(n-i+1) \end{aligned}$$

Or on a pour $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé : Cela revient à faire le changement d'indice $i' = n - i$

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i)(n-i+1) = (n-1)n + (n-2)(n-1) + \cdots + 1 \times 2 + 0 \times 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$$

donc :

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$$

ce qui donne en isolant le dernier terme des deux premières sommes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \end{aligned}$$

après simplifications.

2. On a :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i \right) \end{aligned}$$

car si $j \leq i$, $\min(i,j) = j$ et si $j > i$, $\min(i,j) = i$. Ainsi :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i(i+1)}{2} + (n - (i+1) + 1)i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2}{2} + \frac{i}{2} + (n-i)i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{i^2}{2} + \left(n + \frac{1}{2} \right) i \right) \end{aligned}$$

On utilise alors les valeurs des sommes usuelles :

$$\begin{aligned} S_2 &= -\frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{2n+1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

3. La sommation se résume avec l'inégalité suivante : $1 \leq i \leq j \leq n$. L'indice j varie donc de 1 à n et pour j fixé, i varie de 1 à j donc :

$$S_3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i$$

donc en utilisant la valeur des sommes usuelles :

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n+1} j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{n(n+3)}{4} \end{aligned}$$

À retenir

Dans le cas où la sommation du deuxième indice d'une somme double dépend du premier indice, il peut être utile de résumer la plage de sommation en une inégalité avant de permuter les symboles de sommation.

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

La fonction f_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

Remarquons que si x est un réel différent de 1 alors :

Somme des termes d'une suite géométrique

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Pour tout réel x différent de 1, on en déduit que :

$$f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

En multipliant par x les deux expressions obtenues pour $f_n'(x)$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

Si $x = 1$, on remarque pour finir que :

$$\sum_{k=1}^{n} k1^k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 8 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons P_n ce produit. Alors :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \cdots \times (2n))^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n(1 \times 2 \times \cdots \times n))^2} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$P_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Cours

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ce coefficient est un entier naturel.

Exercice 9 –

1. Si $a = 1$, on a :

$$P_n = \prod_{i=0}^{n}(1 + 1^{2^i}) = \prod_{i=0}^{n}(1 + 1) = \prod_{i=0}^{n} 2 = 2^{n+1}$$

car il y a $n + 1$ facteurs dans le produit.

2. On a :

$$P_n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \times \cdots \times (1 + a^{2^n})$$

donc :

$$(1 - a)P_n = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \times \cdots \times (1 + a^{2^n})$$

Or $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$ (identité remarquable). On a alors :

$$(1 - a)P_n = (1 - a^2)(1 + a^2)(1 + a^4) \times \cdots \times (1 + a^{2^n})$$

Or, de nouveau par identité remarquable, on a $(1 - a^2)(1 + a^2) = 1 - a^4$. Nous obtenons donc une nouvelle simplification :

$$(1 - a)P_n = (1 - a^4)(1 + a^4) \times \cdots \times (1 + a^{2^n})$$

On continue ainsi de suite jusqu'à obtenir :

$$(1 - a)P_n = (1 - a^{2^n})(1 + a^{2^n}) = 1 - (a^{2^n})^2 = 1 - a^{2\times 2^n} = 1 - a^{2^{n+1}}$$

Finalement, comme $a \neq 1$, on a :

$$P_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}$$

Méthode

Pour plus de rigueur, on peut confirmer l'égalité précédente avec un raisonnement par récurrence.

Exercice 10 –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x,

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

En évaluant en 1, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

- En intégrant f sur $[0, 1]$ (c'est une fonction continue sur cet intervalle), on obtient maintenant :

$$\int_0^1 (1+x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

On a de plus :

$$\int_0^1 (1+x)^n \mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

- Déterminons la troisième somme (notons la S). On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2n+1-k} \\ &= \binom{2n+1}{2n+1} + \binom{2n+1}{2n} + \cdots + \binom{2n+1}{n+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ &= (1+1)^{2n+1} \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. On en déduit que $2S = 2^{2n+1}$ donc :

$$S = 2^{2n} = 4^n$$

À retenir

Soit $n \geq 0$ et $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On a la propriété de symétrie suivante :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Certaines valeurs usuelles doivent être retrouvées rapidement :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n \text{ et } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 11 –

Notons S cette somme. On a :

$$S = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p}$$

Or on a :

$$\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$$

donc :

$$\begin{aligned} S &= \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} \\ &= \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} \end{aligned}$$

d'après la formule de Pascal. En la réutilisant, on a :

$$S = \binom{p+3}{p+1} + \cdots + \binom{n}{p}$$

De proche en proche, on obtient :

$$S = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Méthode

On pouvait aussi remarquer que :

$$\forall k \in \{p+1, \dots, n\}, \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$

et utiliser un télescopage.

Cours – Formule de Pascal.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Alors :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

ou encore :

$$\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1}$$

Exercice 12 –

1. Faux. L'égalité est clairement fausse pour $n = 2$.

2. Vrai. On a :

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n} 2(2k-1) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Or on a montré dans l'exercice 8 que :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

On en déduit alors que :

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}$$

De plus, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = (n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (2n)$$

et cette expression permet d'obtenir l'égalité souhaitée.

6 Trigonométrie

Les fonctions cosinus, sinus et tangente sont indispensables en mathématiques et plus généralement en sciences.

— Il est important de savoir retrouver toutes les formules trigonométriques (à l'aide du cercle par exemple ou en revenant aux formules d'addition).

— La périodicité de ces trois fonctions est cruciale pour la résolution d'équations et d'inéquations ou encore pour réduire l'ensemble d'étude d'une fonction.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(p) + \sin(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. La fonction tangente est impaire sur son ensemble de définition. ☐ Vrai ☐ Faux

4. Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) + \cos(2x)$.

Exercice 3 –

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\tan(x) = \sqrt{3}$.

Exercice 4 –

Soit x un réel ne s'écrivant pas sous la forme $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Exprimer $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$ et prouver ce résultat.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 6 –

Résoudre $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{3\pi}{4})$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 –

Résoudre l'inéquation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) \geq 1$ d'inconnue $x \in [0, \pi]$.

Exercice 8 –

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, noté $\mathscr{D}$, de f.
2. Justifier que l'étude de f sur $[0, \pi]$ suffit pour étudier f sur $\mathscr{D}$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et déterminer f'.
4. En déduire les variations de f sur $[0, \pi]$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Résoudre l'équation $\cos(x)^4 + \sin(x)^4 = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 –

Déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\tan(x)^2 \mathrm{d}x$.

Exercice 11 –

Soit x, y, z trois réels tels que :

$$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0$$

Montrer que $\cos(2x - y - z) = 1$.

Exercice 12 – Le vrai/faux de la fin

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $\sin(2x) = 2\sin(x)$ est équivalente à $\cos(x) = 1$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ☐ Vrai ☐ Faux

$$\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)^2}$$

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$. ☒ Vrai ☐ Faux
2. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(p) + \sin(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. ☐ Vrai ☒ Faux
3. La fonction tangente est impaire sur son ensemble de définition. ☒ Vrai ☐ Faux
4. Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$. ☒ Vrai ☐ Faux

Cours

Pour tout couple de réels (p, q), on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercice 2 –

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(x) + \cos(2x) = 2\cos\left(\frac{x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-2x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

par parité de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 –

1. On sait que :

Ne pas hésiter à tracer un cercle !

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On souhaite donc résoudre l'équation :

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ce qui est équivalent à :

$$x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$