Tle

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ

3e édition

ellipses

1001 EXERCICES CORRIGÉS
DE MATHÉMATIQUES
POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ

Tle

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ

Tle

3e édition

Konrad Renard

Enseignant au lycée français international Marguerite Duras
à Hô Chi Minh-Ville, Vietnam

ellipses

Du même auteur chez le même éditeur

Retrouvez tous les livres du même auteur chez le même éditeur
sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-078406
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2023
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Tout en préparant les élèves de terminale à l'épreuve de spécialité mathématiques du baccalauréat, cet ouvrage sera utile à tous ceux qui souhaitent approfondir leurs connaissances dans l'optique d'une poursuite d'études supérieures ayant une composante importante en mathématiques.

Cet ouvrage est un recueil d'exercices allant de la simple application du cours à des exercices difficiles. Il s'articule autour de 4 chapitres.

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

• des sous-chapitres composés d'un bref résumé du cours, d'exercices d'application puis d'exercices d'approfondissement ;

• des exercices de préparation au baccalauréat, exercices issus des annales du baccalauréat ;

• des exercices pour se préparer au supérieur, exercices issus de concours d'entrée en écoles d'ingénieurs, du Concours général, ou abordant des thèmes qui ne sont plus au programme de terminale mais dont la maîtrise sera un atout pour la poursuite d'études. Ces exercices, pour certains très difficiles, ne pourront être abordés qu'après une parfaite maîtrise du chapitre.

Je remercie Anne LE VAN RA pour ses relectures attentives.

Table des matières

1 Suites numériques **7**

1.1 Suites arithmétiques - Suites géométriques 7

1.1.1 Point de cours 7

1.1.2 Exercices d'application de cours 8

1.1.3 Exercices d'approfondissement 11

1.2 Démonstration par récurrence 22

1.2.1 Point de cours 22

1.2.2 Exercices d'application de cours 22

1.2.3 Exercices d'approfondissement 23

1.3 Limites de suites 26

1.3.1 Point de cours 26

1.3.2 Exercices d'application de cours 27

1.3.3 Exercices d'approfondissement 30

1.4 Comportement global d'une suite 39

1.4.1 Point de cours 39

1.4.2 Exercices d'application de cours 39

1.4.3 Exercices d'approfondissement 44

1.5 Vers le baccalauréat 52

1.6 Vers le supérieur 68

2 Fonctions **83**

2.1 Fonctions dérivées 83

2.1.1 Point de cours 83

2.1.2 Exercices d'application de cours 84

2.1.3 Exercices d'approfondissement 87

2.2 Convexité 92

2.2.1 Point de cours 92

2.2.2 Exercices d'application de cours 93

2.2.3 Exercices d'approfondissement 97

2.3 Continuité 103

2.3.1 Point de cours 103

2.3.2 Exercices d'application de cours . . . 104
2.3.3 Exercices d'approfondissement . . . 106
2.4 Limites de fonctions . . . 113
2.4.1 Point de cours . . . 113
2.4.2 Exercices d'application de cours . . . 115
2.4.3 Exercices d'approfondissement . . . 116
2.5 Primitives - Equations différentielles . . . 122
2.5.1 Point de cours . . . 122
2.5.2 Exercices d'application de cours . . . 123
2.5.3 Exercices d'approfondissement . . . 125
2.6 Intégration . . . 130
2.6.1 Point de cours . . . 130
2.6.2 Exercices d'application de cours . . . 131
2.6.3 Exercices d'approfondissement . . . 134
2.7 Fonctions trigonométriques . . . 141
2.7.1 Point de cours . . . 141
2.7.2 Exercices d'application de cours . . . 143
2.7.3 Exercices d'approfondissement . . . 144
2.8 Fonctions exponentielles . . . 153
2.8.1 Point de cours . . . 153
2.8.2 Exercices d'application de cours . . . 153
2.8.3 Exercices d'approfondissement . . . 155
2.9 Fonctions logarithmes . . . 173
2.9.1 Point de cours . . . 173
2.9.2 Exercices d'application de cours . . . 174
2.9.3 Exercices d'approfondissement . . . 177
2.10 Vers le baccalauréat . . . 195
2.11 Vers le supérieur . . . 240

3 Géométrie **265**
3.1 Droites et plans de l'espace . . . 265
3.1.1 Point de cours . . . 265
3.1.2 Exercices d'application de cours . . . 265
3.1.3 Exercices d'approfondissement . . . 267
3.2 Géométrique vectorielle dans l'espace . . . 271
3.2.1 Point de cours . . . 271
3.2.2 Exercices d'application de cours . . . 273
3.2.3 Exercices d'approfondissement . . . 276
3.3 Produit scalaire dans l'espace . . . 284
3.3.1 Point de cours . . . 284
3.3.2 Exercices d'application de cours . . . 285
3.3.3 Exercices d'approfondissement . . . 290

3.4 Vers le baccalauréat 308
3.5 Vers le supérieur 336

4 Dénombrement et probabilités 349
4.1 Dénombrement 349
4.1.1 Point de cours 349
4.1.2 Exercices d'application de cours 350
4.1.3 Exercices d'approfondissement 355
4.2 Loi binomiale 360
4.2.1 Point de cours 360
4.2.2 Exercices d'application de cours 360
4.2.3 Exercices d'approfondissement 364
4.3 Sommes de variables aléatoires 376
4.3.1 Point de cours 376
4.3.2 Exercices d'application de cours 376
4.3.3 Exercices d'approfondissement 377
4.4 Concentration - Loi des grands nombres 381
4.4.1 Point de cours 381
4.4.2 Exercices d'application de cours 382
4.4.3 Exercices d'approfondissement 384
4.5 Vers le baccalauréat 390
4.6 Vers le supérieur 417

5 Corrigés 439
5.1 Suites numériques 439
5.2 Fonctions 503
5.3 Géométrie 648
5.4 Probabilités 720

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Suites arithmétiques - Suites géométriques

1.1.1 Point de cours

Définition : une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé **raison de la suite** (u_n).

Forme explicite : si la suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.
Plus généralement : $S = \dfrac{\text{nombre de termes} \times \big(\text{premier terme} + \text{dernier terme}\big)}{2}$.

Définition : une suite (u_n) est géométrique s'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé **raison de la suite** (u_n).

Forme explicite : si la suite (u_n) est **géométrique** de raison q et de premier terme u_0, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$.
Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p q^{n-p}$.

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique :
• si $q = 1$, alors $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0$
• si $q \neq 1$, alors $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

1.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 1 **10 minutes**

Les suites u_n sont-elles arithmétiques? Si oui, donner la raison.

1. $u_n = 2n+3$.
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
3. $u_{n+1} = u_n - 2$.
4. $u_n = n^2+n+3$.
5. $u_n = \sqrt{2017} - 2016n$.
6. $u_n = u_{n-1} + n - 1$.

EXERCICE 2 **5 minutes**

Déterminer le premier terme u_0 et la raison des suites arithmétiques suivantes :

1. $u_{10} = 6$ et $u_{28} = 1,5$.
2. $u_9 = 19$ et $u_{18} = 2017$.

EXERCICE 3 **5 minutes**

Exprimer u_n en fonction de n sachant que la suite (u_n) est arithmétique de raison r :

1. $u_0 = 3$ et $r = 2$.
2. $u_0 = 0$ et $r = 1$.
3. $u_1 = 0$ et $r = \sqrt{2}$.
4. $u_2 = 5$ et $r = -3$.

EXERCICE 4 **5 minutes**

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE 5 **5 minutes**

Calculer la somme des cent premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 5$.

EXERCICE 6 **10 minutes**

Le 1er septembre 2022, Tom décide de mettre de l'argent de côté pour ses vacances d'été. Il dépose 500 € le 1er septembre, puis 30 € de moins par rapport au mois précédent chaque 1er du mois.

Soit t_n la somme mise de côté le n-ième mois. On pose $t_0 = 500$.

1. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n. En déduire la nature de la suite (t_n).
2. En déduire t_n en fonction de n.
3. Soit S_n la somme totale mise de côté par Tom depuis le 1er septembre. Exprimer S_n en fonction de n.
4. De combien disposera Tom le 14 juillet 2023.

EXERCICE 7 **10 minutes**

Les suites u_n sont-elles géométriques? Si oui, donner la raison.

1. $u_n = -7^{n+2}$.
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
3. $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$.
4. $u_n = n^2+n+3$.
5. $u_n = 2016^n$.
6. $u_n = 2u_{n-1} + 2$.

EXERCICE 8 **5 minutes**

Déterminer le premier terme u_0 et la raison $(q > 0)$ des suites géométriques suivantes :

1. $u_{10} = 6$ et $u_{12} = 1,5$.
2. $u_9 = 81$ et $u_{13} = 729$.

EXERCICE 9 **5 minutes**

Exprimer u_n en fonction de n sachant que la suite (u_n) est géométrique de raison q.

1. $u_0 = 3$ et $q = 2$.
2. $u_2 = 5$ et $q = -3$.
3. $u_1 = 1$ et $q = \sqrt{2}$.
4. $u_0 = 3$ et $q = \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 10 **10 minutes**

Déterminer les progressions géométriques de sept termes (réels) telles que la somme des trois premiers termes est égale à 2 et la somme des trois derniers termes est égale à 1 250.

EXERCICE 11 **5 minutes**

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

EXERCICE 12 **5 minutes**

Calculer la somme des cent premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 13 **10 minutes**

Le jeudi 8 septembre 2022, Matt promet à Tom de lui donner tous les jeudis du chocolat pour son aide précieuse en mathématiques. Le 8 septembre, il lui offre un carré et dit qu'il doublera la quantité toutes les semaines.
Soit c_n le nombre de carrés reçus par Tom la n-ième semaine. On pose $c_1 = 1$.

1. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. En déduire la nature de la suite (c_n).
2. En déduire c_n en fonction de n.
3. Soit S_n le nombre total de carrés de chocolat reçus par Tom depuis le 8 septembre. Exprimer S_n en fonction de n.
4. Combien de tablettes de chocolat, au total, Matt aura-t-il donné à Tom le 29 décembre 2022 s'il respecte sa promesse ? (Les tablettes de chocolat de Matt ont 24 carrés).

EXERCICE 14 **10 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1. Démontrer que $S_n = (n+1)u_0 + r\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire que $S_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

EXERCICE 15 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 200$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 15$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire v_n en fonction de n.
c. Exprimer u_n en fonction de n.

EXERCICE 16 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n - 7$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 7$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
b. En déduire v_n en fonction de n.
c. Exprimer u_n en fonction de n.

EXERCICE 17 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,9u_n + 3$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + a$.

a. Déterminer la valeur de a pour que la suite (v_n) soit une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
b. En déduire v_n en fonction de n.
c. Exprimer u_n en fonction de n.

EXERCICE 18 **10 minutes**

On considère la progression géométrique 1, 3, 9, 27, 81.

1. Quelle est la valeur du terme de rang n ?
2. Montrer que les différences entre deux termes successifs forment une progression géométrique.
3. Cette propriété peut-elle être généralisée ?

EXERCICE 19 **10 minutes**

Math s'entraîne 10 minutes à la première séance puis augmente la durée de 10% à chaque séance. Soit u_n la durée d'entraînement de la $n^{\text{ème}}$ séance.

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. Sachant que son objectif est de courir 2 heures 30, à quelle séance, Maths atteindra-t-il son objectif ?
3. Quel sera alors le temps total d'entraînement de Math pour atteindre son objectif ?

1.1.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 20 **10 minutes**

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3 \text{ et } u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n,\ v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est stationnaire.
2. En déduire que la suite (u_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer la somme $S_n = u_0 + u_2 + \cdots + u_n$.

EXERCICE 21 **15 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$
où a et b sont deux réels ($b \neq 0$).

1. Calculer $u_2,\ u_3$ et u_4.
2. Résoudre l'équation $x^2 = 6x - 5$.
3. Déterminer deux réels A et B tels que $u_n = A \times 5^n + B$.
4. En déduire u_{10}.

EXERCICE 22 **10 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$.
On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

1. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
2. Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n, u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.
3. Etudier la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 23 **15 minutes**

Une suite (u_n) est définie par son premier terme u_1 et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2}$.

1. Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de u_1 ($a < b$) pour lesquelles la suite est constante.
2. Montrer que si $u_1 \neq a$ et $u_1 \neq b$, il en est de même de u_n.
Dans ces conditions, calculer $\dfrac{u_{n+1} - a}{u_{n+1} - b}$ en fonction de $\dfrac{u_n - a}{u_n - b}$.
3. En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$ est géométrique.
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

EXERCICE 24 **20 minutes**

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\dfrac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer

suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :
A_n : « Alice atteint la cible au n^e coup »,
B_n : « Alice rate la cible au n^e coup ».
On pose $p_n = P(A_n)$.
Pour les questions **1.** et **2.** on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $p_n = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}$.
3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.
4. Ecrire u_n puis p_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$, interpréter ce résultat.

EXERCICE 25 **10 minutes**

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, $\forall n \in \mathbb{N}^* : n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1$ et $w_0 = 1$.
Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2. Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

EXERCICE 26 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 2$ par la relation $(E) : u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$.

1. On donne la suite géométrique $u_n = r^n$. Montrer qu'il existe deux valeurs de r telles que la suite vérifie la relation (E).
On notera ces deux suites (a_n) et (b_n).
2. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $u_0 = \alpha a_0 + \beta b_0$ et $u_1 = \alpha a_1 + \beta b_1$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha a_n + \beta b_n$.

EXERCICE 27 **10 minutes**

Après ses trois entretiens d'embauche, Bob a reçu trois propositions, pour une embauche le 1er juillet 2017 :
• L'entreprise A lui propose un salaire mensuel de 1 300 € et une augmentation de 100 € chaque 1er juillet.
• L'entreprise B lui propose un salaire mensuel de 1 400 € et une augmentation de 5% chaque 1er juillet.

• L'entreprise C lui propose un salaire mensuel de 1 500 € et une augmentation de 2% plus 30 € chaque 1er juillet.

1. On désigne par a_0 le salaire de départ de Bob s'il choisit l'entreprise A.

- **a.** Déterminer a_0 et a_1.
- **b.** Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et en déduire la nature de la suite (a_n).
- **c.** En déduire une expression de a_n en fonction de a_0 et de n.
- **d.** Soit (A_n) la suite représentant la somme de tous les salaires que Bob aura perçu du 1er juillet 2017 au 31 juin de l'année $2017+n$, s'il choisit l'entreprise A.
  Montrer que $A_n = 600(n+1)(n+26)$

2. On désigne par b_0 le salaire de départ de Bob s'il choisit l'entreprise B.

- **a.** Déterminer b_0 et b_1.
- **b.** Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire la nature de la suite (b_n).
- **c.** En déduire une expression de b_n en fonction de b_0 et de n.
- **d.** Soit (B_n) la suite représentant la somme de tous les salaires que Bob aura perçu du 1er juillet 2017 au 31 juin de l'année $2017+n$, s'il choisit l'entreprise B.
  Montrer que $B_n = 336\,000\left(1,05^{n+1}-1\right)$.

3. On désigne par c_0 le salaire de départ de Bob s'il choisit l'entreprise C.

- **a.** Déterminer c_0 et c_1.
- **b.** Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n et en déduire la nature de la suite (c_n).
- **c.** Soit (u_n) la suite définie par $u_n = c_n + \alpha$. Déterminer la valeur de α pour que la suite (u_n) soit géométrique de raison 1,02.
- **d.** En déduire une expression de u_n puis de c_n en fonction de n.
- **e.** Soit (C_n) la suite représentant la somme de tous les salaires que Bob aura perçu du 1er juillet 2017 au 31 juin de l'année $2017+n$, s'il choisit l'entreprise C.
  Montrer que $C_n = 1\,800\,000\left(1,02^{n+1}-1\right) - 18\,000(n+1)$.

4. En utilisant le tableur de la calculatrice et en se limitant aux 15 prochaines années, aider Bob à choisir son entreprise en fonction du nombre d'années qu'il pense rester dans l'entreprise.

EXERCICE 28 **15 minutes**

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

- **a.** Calculer $u_2,\ u_3$ et u_4.
- **b.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
- **c.** Dans un repère orthonormé tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.
  Placer u_0, en utilisant ces deux droites, placer u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
  Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

- **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 29 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

On admet que $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 30 **10 minutes**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
3. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
4. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

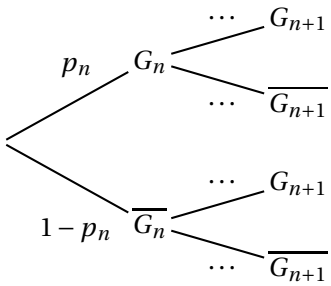
EXERCICE 31 **15 minutes**

Un site internet propose un jeu en ligne :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$;
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

c. Déterminer la limite de p_n.

EXERCICE 32 **20 minutes**

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte ».
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1.

2. Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,
puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

4. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme u_1.

b. Exprimer u_n en fonction de n, puis de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0,6665$.

EXERCICE 33 **20 minutes**

1. Soit deux urnes U_1 et U_2, la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires, la seconde contient 8 boules blanches et 2 boules noires.
De l'une des deux urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne :
• si la boule est blanche on recommence le tirage dans la même urne ;
• si la boule est noire on recommence le tirage dans l'autre urne.
Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.
Soit P_n la probabilité pour que le $n^{ième}$ tirage se fasse dans l'urne U_1.

a. Déterminer P_1.

b. Déterminer P_2 : on se rappellera que le second tirage s'est fait dans U_1 soit parce que le premier tirage a été une boule blanche dans U_1, soit parce que le premier tirage a été une boule noire dans U_2.

c. Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n) de la forme : $\forall n \geqslant 2,\ P_n = aP_{n-1} + b$, où a et b sont des réels que l'on déterminera.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{2}{5}u_{n-1} + \dfrac{1}{5}$.

a. Déterminer le réel α tel que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique.

b. En déduire une expression de u_n puis de u_n en fonction de n.

c. En déduire la valeur de P_{10} arrondi au millième.

EXERCICE 34 **10 minutes**

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,6[$ par $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 &= -3 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

2. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

3. Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 35 **10 minutes**

Etant donné un réel α, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3,\ v_n = u_n + \alpha$.

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n et α. Comment choisir α pour que la suite (v_n) soit géométrique ?

2. On suppose la suite (v_n) géométrique, exprimer alors u_n en fonction de u_0 et n. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 36 **20 minutes**

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 9,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3,\ v_n = u_n + 6$.

1. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique à termes positifs.

b. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.

c. En déduire la somme $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$.

2. On définit la suite (w_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \ln(v_n)$.

a. Montrer que la suite (w_n) est arithmétique.

b. Calculer la somme $S"_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$ en fonction de n.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S"_n$.

3. a. Calculer le produit $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdots v_n$ en fonction de n.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

EXERCICE 37 **15 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 10u_n - 9u_{n-1}$.

1. Calculer $u_2,\ u_3$ et u_4.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b. Calculer v_n, puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

EXERCICE 38 **30 minutes**

On définit une suite (u_n) par la donnée des deux premiers termes u_1 et u_2 et la relation de récurrence : $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ (1)
a et b étant deux réels donnés non nuls.

1. Calculer $u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6,\ u_7$ en fonction de $u_1,\ u_2, a$ et b.

2. On suppose $a^2 + 4b > 0$

a. Montrer qu'il existe deux réels distincts α et β tels que $\alpha + \beta = a$ et $\alpha\beta = -b$.

b. Montrer que la suite (v_n) définie, pour $n \geqslant 1$, par $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n$ est une suite géométrique de raison β.

c. Qu'en déduit-on pour la suite (w_n) définie par $w_{n+1} = u_{n+1} - \beta u_n$?

d. Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.

e. En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.

EXERCICE 39 **30 minutes**

Partie A

Soit f_a la fonction définie par $f_a(x) = \dfrac{(a+2)x}{x+2-a}$, a étant un paramètre réel différent de -2 et 2.

On appelle $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_a$ passent par deux points indépendants de a.

2. Etudier les variations de f_a.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que a appartient à l'intervalle $I = [0\,;\,2[$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0\,;\,2a]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1. a. Vérifier que la suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Que peut-on dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 2a$?

2. On suppose que u_0 est différent de 0 et $2a$ (par suite a différent de 0).

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $u_n \neq 2a$.

b. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 2a}$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de a.

c. Etudier l'existence et la valeur de la limite de la suite (v_n), en déduire l'existence et la valeur de la imite de la suite (u_n).

EXERCICE 40 **10 minutes**

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 0$, $b_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

2. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

3. Déterminer la limite de (u_n).

EXERCICE 41 **30 minutes**

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n).
c. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

a. Calculer w_0.
b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
c. En déduire la nature de la suite (w_n).
d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n ; $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

EXERCICE 42 **10 minutes**

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.
On considère également la suite v définie, $\forall n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

EXERCICE 43 **20 minutes**

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}u_n + \dfrac{1}{3}$.

a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \dfrac{2}{5}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au n-ième lancer », par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n, par R_n l'évènement « on obtient rouge au n-ième lancer », par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de R_n, par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

a. Déterminer a_1.
b. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.
c. En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup \left(R_n \cap \overline{A_n}\right)$, montrer que $r_n = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}$.
d. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.
e. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 44 **20 minutes**

1. Calculer la somme de la progression géométrique $A_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.
2. En déduire la somme $A'_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$.
3. Obtenir également des expressions des sommes suivantes :
a. $U_n = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots + (2n+1)x^{2n}$.
b. $W_n = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots + n^2 x^{n-1}$.

EXERCICE 45 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 5{,}5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} + 0{,}25u_n = 0$ (1).

1. Déterminer le réel a tel que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = u_{n+1} + au_n$ soit géométrique.
2. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 10^{-6}$.

EXERCICE 46 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$ où $p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1, 2\}$.

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de p, n, a.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$. Montrer que la suite (t_n) est constante et exprimer t_n en fonction de a.
3. Exprimer u_n en fonction de w_n et t_n, puis en fonction de p, n, a.

EXERCICE 47 **20 minutes**

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leqslant k \leqslant 6$).
Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables,
- les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
- les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.

2. On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :

— A : « le nombre obtenu est pair »

— B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »

— C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a. Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c. Les événements A et B sont-ils indépendants? Les événements A et C sont-ils indépendants?

EXERCICE 48 **10 minutes**

Soit a, b et c trois réels distincts, avec $a \neq 0$.
Sachant que a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique et que les trois nombres $3a$, $2b$ et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, calculer la raison de la suite géométrique.

EXERCICE 49 **10 minutes**

Déterminer les couples $(u_0,\ q)$, d'entiers positifs premiers entre eux, sachant que les termes de la suite géométrique $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$, de raison q, vérifient l'égalité $u_1 + 2u_3 = 44u_0^2$.

EXERCICE 50 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = e^a \cdot u_{n-1} + b$;
a et b sont deux réels ($b \neq 0$).

1. Pour quelles valeurs de a et de b la suite (u_n) est arithmétique? géométrique?
Calculer dans chacun des cas la somme des n premiers termes de la suite.

2. Les valeurs particulières de a et b obtenues à la question précédente étant exclues, on considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-e^a}$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

1.2 Démonstration par récurrence

1.2.1 Point de cours

Principe : pour montrer qu'une propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$ (n_0 entier naturel donné), on procède en trois étapes.

1. **Initialisation :** on vérifie que la propriété $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie.
2. **Hérédité :** on suppose que la propriété $\mathscr{P}_n$ est **vraie à un rang** $n \geqslant n_0$ (hypothèse de récurrence) et on montre que, sous cette hypothèse, la propriété P_{n+1} est vraie.
3. **Conclusion :** la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang n_0 et est héréditaire, donc la propriété $\mathscr{P}_n$ est **vraie pour tout entier** naturel $n \geqslant n_0$.

1.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 51 **5 minutes**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 7$.

EXERCICE 52 **5 minutes**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 0,8u_n + 0,05$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0,25$.

EXERCICE 53 **5 minutes**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

EXERCICE 54 **5 minutes**

Soit k un entier strictement positif.
Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant k, \dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

EXERCICE 55 **5 minutes**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$
avec a réel donné tel que $0 < a < 1$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

EXERCICE 56 **15 minutes**

Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul,

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. $1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. $1+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

EXERCICE 57 **5 minutes**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par $u_n = \dfrac{n-1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

On pose $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $S_n = 1 - \left(\dfrac{n}{2}+1\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

EXERCICE 58 **5 minutes**

Démontrer par récurrence l'inégalité : soit un réel $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1+na$.

EXERCICE 59 **5 minutes**

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

EXERCICE 60 **5 minutes**

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}, 7^n + 1$ est divisible par 6 ».

1. Démontrer que $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.
2. Calculer $A = 7^n + 1$ pour $n = 0$, $n = 1$.
3. Conclure.

EXERCICE 61 **5 minutes**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n$.

EXERCICE 62 **5 minutes**

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

1.2.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 63 **10 minutes**

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
2. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n$.

EXERCICE 64 **5 minutes**

On considère la suite (p_n), définie par : $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$.

1. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel $n > 0$, on a $p_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 65 **15 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n > 0,\ u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} - 4$.

1. Montrer par récurrence que la différence de deux termes consécutifs est de signe constant. En déduire le sens de variation de cette suite.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 6$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer une expression de (v_n) en fonction de n.

3. Ecrire une fonction en Python permettant de déterminer le plus petit élément $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \implies u_n < -5{,}99$.

EXERCICE 66 **15 minutes**

On définit les suites (u_n) et (S_n) par : $u_0 = 13$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
b. Calculer S_n en fonction de n.
c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 67 **20 minutes**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant 0$.
b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n - 3$.
c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

EXERCICE 68 **20 minutes**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)u_{n-1} + \dfrac{6}{n}$.

1. **a.** Calculer u_1.

b. Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à : 45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
A partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question **1. b**.

EXERCICE 69 **25 minutes**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$. Montrer que si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = f(u_n)$.
$v_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

i. Pour tout entier naturel $n,\ 1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
ii. Pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} \leqslant v_n$.
iii. Pour tout entier naturel $n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
iv. Pour tout entier naturel $n,\ u_n \leqslant u_{n+1}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.

f. Déterminer la valeur exacte de α.

EXERCICE 70 **20 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

EXERCICE 71 **15 minutes**

On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe deux entiers positifs a_n et b_n tels que $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Etablir les égalités $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et $a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n = 1$.

☛ **Pour les options maths expertes**

En déduire que les fractions $\dfrac{a_n}{b_n}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles.

EXERCICE 72 **15 minutes**

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 4$.

2. On pose $w_n = 4 - v_n$. Démontrer que $w_{n+1} < \dfrac{1}{4} w_n$.

3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n < \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} w_0$.

4. En déduire la limite de w_n, puis celle de v_n, lorsque n tend vers l'infini.

1.3 Limites de suites

1.3.1 Point de cours

Suites de référence

•Les suites définies pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, $w_n = \dfrac{1}{n^3}$ et $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0.

• Les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$ et $t_n = \sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$.

Limites et comparaison : soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 :

• $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

• $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement dit « Théorème des gendarmes » : soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Limite d'une somme

limite de (u_n)	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
limite de (v_n)	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de (u_n+v_n)	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	⚠

Limite d'un produit

limite de (u_n)	ℓ	$\ell\neq 0$	∞	0
limite de (v_n)	ℓ'	∞	∞	∞
limite de $(u_n v_n)$	$\ell\ell'$	∞	∞	⚠

Limite d'un quotient

limite de (u_n)	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$ ou ∞	∞	$\pm\infty$	0
limite de (v_n)	$\ell'\neq 0$	∞	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	⚠	⚠

Limite de la suite q^n : soit q un nombre réel.
Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$; si $-1<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$;
Si $q=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$.

1.3.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 73 **10 minutes**

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n=2n^2+3n-3$
2. $u_n=n^2-n+1$
3. $u_n=\dfrac{2}{n+2}$
4. $u_n=\dfrac{3n^2+2}{n+3}$
5. $u_n=\dfrac{4n-2}{n+8}$
6. $u_n=\dfrac{1}{n}\left(2-3n+8n^2\right)$

EXERCICE 74 **5 minutes**

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par $u_n=\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^3}$.

1. Démontrer que pour pout $n\geqslant 1$, $-\dfrac{1}{n^3}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n^3}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 75 **5 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n^2+1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 4$, $u_n\geqslant 2^n$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 76 **10 minutes**

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

3. $u_n = n^2 - \sqrt{n^3+7}$

4. $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$

EXERCICE 77 **10 minutes**

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

2. $u_n = 2^{n+1}$

3. $u_n = -5\left(\dfrac{14}{15}\right)^n$

4. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$

5. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$

6. $u_n = \dfrac{7^n - 2^n}{5^n}$

EXERCICE 78 **10 minutes**

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{5n+2}$.

1. Quel est le rôle de l'algorithme ci-dessous ?

```
U ⟵ √2
Tant que U ⩽ A
    U ⟵ √(5N+2)
    N ⟵ N+1
Fin du Tant que
```

2. Coder l'algorithme dans le langage Python, puis l'exécuter en saisissant en entrée $A = 20$, puis $A = 50$.

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite (u_n) ?

4. Démontrer, à l'aide de la définition, cette conjecture.

EXERCICE 79 **10 minutes**

1. Déterminer la limite de la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

2. Déterminer la limite de la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

EXERCICE 80 : Q. C. M. **10 minutes**

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :

a. la suite (w_n) tend vers $-\infty$ **b.** la suite (u_n) tend vers $-\infty$ **c.** la suite (w_n) n'a pas de limite

2. Si $w_n = 2u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $(\ell > 0)$, alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ **b.** On ne peut rien dire sur la limite de (v_n) **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ et $w_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, alors :

a. On ne peut rien dire sur la convergence de la suite (v_n)

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$

c. La suite (v_n) n'a pas de limite

4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$, alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$

EXERCICE 81 **15 minutes**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$. Démontrer ou invalider par un contre-exemple chaque affirmation.

Affirmation 1	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim (u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 2	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $\left(u_{n,} \times v_n\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 4	Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

EXERCICE 82 **15 minutes**

1. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

Démontrer le théorème de comparaison suivant :

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

(1) à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

a. Vérifier que : $u_1 = -0,5$ et $u_2 = -0,25$.

b. Calculer u_3.

c. On admet que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 0$.
En déduire que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant n-2$.
d. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 83 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{a}{2n+1} + \dfrac{b}{2n+3}$.

2. En déduire une expression simple de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

3. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 84 **15 minutes**

Déterminer, si elle existe, la limite des suites u_n :

1. $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **2.** $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ **3.** $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

1.3.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 85 **10 minutes**

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1+au_n}{a+u_n}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

2. Vérifier que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{a-1}{a+1}$.

3. Etudier la limite de la suite (v_n).

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 86 **20 minutes**

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :
$f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}$.

1. Calculer $f_n'(x)$ et donner son signe sur $[0\,;\,+\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

2. Dresser le tableau de variations de f_n.

3. **a.** Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?
b. Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.
c. En déduire le signe de $f_n(n+1)$.
d. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\,;\,n+1]$; cette solution sera notée u_n.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

EXERCICE 87 **20 minutes**

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0+u_1=1$. En déduire u_0.

2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE 88 **20 minutes**

On considère une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath}\right)$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathcal{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1. a. Placer sur un dessin la droite $\mathcal{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6. On prendra 10 cm comme unité graphique.

b. Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.

c. Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

EXERCICE 89 **10 minutes**

Soit (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2. On pose , $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
Etablir une relation entre w_{n+1} et w_n.

3. En déduire la limite de w_n, puis de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 90 **15 minutes**

Soit a un réel donné. Soit (u_n) la suite définie par ses deux premiers termes : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, et

par la relation $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = au_n + (1-a)u_{n-1}$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Exprimer v_n en fonction de a et de n.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de a et de n.
☞ On pourra considérer les n relations $v_p = u_{p+1} - u_p$ pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$.
3. Comment choisir a pour que la suite (u_n) admette une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 91 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et $\forall n > 1,\ u_n = \dfrac{1}{4}u_{n-1} + 1$.

1. Déterminer le réel α tel que la suite (v_n) définie pour tout $n > 0$ par $v_n = u_n + \alpha$ soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Calculer en fonction de n la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 92 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n > 1,\ n^2u_n^2 - (n-1)^2u_{n-1}^2 = n$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n > 0$ par $v_n = n^2u_n^2$.
Exprimer v_n en fonction de n.
2. En déduire la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 93 **15 minutes**

Soit la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x > \dfrac{1}{2}$, $f(x) \geqslant 1$.
On peut donc définir la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
On se propose, dans la suite de l'exercice, d'exprimer u_n en fonction de n.
2. On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln(v_n)$.
a. Vérifier que v_n et w_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique.
c. Exprimer w_n, puis v_n en fonction de n. En déduire que $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.
d. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 94 **10 minutes**

Soit $[AB]$ un segment de longueur a. Soit M_1 le milieu de $[AB]$, M_2 le milieu de $[BM_1]$, M_3 le milieu de $[M_1M_2]$, M_4 le milieu de $[M_2M_3]$, M_n le milieu de $[M_{n-2}M_{n-1}]$.

1. Calculer la longueur AM_n en fonction de n.
2. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, M_n tend vers une position limite ℓ, que l'on déterminera.

EXERCICE 95 **20 minutes**

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7. On note, pour n entier naturel ou nul :

- G_n l'évènement « Juliette gagne la n-ième partie »
- P_n l'évènement « Juliette perd la n-ième partie »

1. **a.** Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$.
b. En déduire la probabilité $p(G_2)$.
c. Calculer $p(P_2)$.

2. On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.
a. Déterminer pour n entier naturel non nul les probabilités $p_{G_n}(P_{n+1})$ et $p_{P_n}(G_{n+1})$.
b. Montrer que pour tout n entier naturel non nul :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$$

3. Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.
a. Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.
b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

4. **a.** Déduire du 3. l'expression de x_n en fonction de n.
b. Déterminer la limite de la suite (x_n).

EXERCICE 96 **20 minutes**

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_{n+1} = -\dfrac{15}{u_n} + 8$.

1. Démontrer que si $u_1 \neq 3$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \neq 3$.

2. Démontrer qu'il existe un nombre rationnel α indépendant de n tel que $\dfrac{u_{n+1}-5}{u_{n+1}-3} = \alpha \dfrac{u_n - 5}{u_n - 3}$.

3. Soit $t_n = \dfrac{u_n - 5}{u_n - 3}$, calculer t_n, puis u_n, en fonction de n, du nombre α trouvé précédemment et de t_1.

4. Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 97 **15 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

1. Démontrer que la suite (s_n) définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite (t_n) définie par $t_n = v_{n+1} - v_n$.
Exprimer t_n en fonction de s_n.

3. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. (On pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \cdots + t_{n-1}$).

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{8^n}$.

EXERCICE 98 **15 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1. Etudier le cas où $u_0 = 4$.

2. On suppose $u_0 \neq 4$. Montrer qu'il existe une suite géométrique (v_n) telle que $u_n - v_n$ soit indépendant de n.
☞ On pourra recherche un réel a tel que $v_n = u_n + a$.

3. Exprimer u_n en fonction de n et u_0.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 99 **20 minutes**

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services. Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire. Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.
La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à $0,7$.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

— si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,8$;
— si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,7$.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.

a. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité)

b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

b. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 9x_n - 7$.

a. Déterminer la nature de la suite (u_n).

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

EXERCICE 100 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 5\ln(x+3)$.

1. a. Tracer dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

b. Construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite D et la courbe $\mathcal{C}$ et en laissant apparents les traits de construction.

c. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. Soit α un réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

c. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b.

d. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u ⟵ 4
Tant que u − 14,2 < 0
    u ⟵ 5ln(u + 3)
Fin du Tant que
```

a. Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur de u en fin d'algorithme (on arrondira à 5 décimales).

EXERCICE 101 **15 minutes**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. a. Démontrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant (x-1)^{2n} e^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}.$$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 102 **25 minutes**

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C. A l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$; soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$;
- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en C, soit en A de façon équiprobable ;

- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'événement A_n, (respectivement B_n, C_n).
On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.
Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$a_n + b_n + c_n = 1 \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = = \dfrac{1}{3} a_n \end{cases}$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \dfrac{1}{6} a_n$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel p,

$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p \end{cases}.$$

3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

4. On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 103 **30 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1 + 0{,}5u_n}{0{,}5 + u_n}$.
On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
u ⟵ 2
Pour i allant de 1 à n
        u ⟵ (1 + 0,5u) / (0,5 + u)
Fin Pour
```

Compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 11$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 104 **25 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}.$$

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 105 **15 minutes**

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$, λ et μ deux réels positifs.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $u_1 = a$, $v_1 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1 + \lambda}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1 + \mu}$.

1. Comment doit-on choisir λ et μ pour que l'on ait $u_1 < u_2 < v_2 < v_1$?

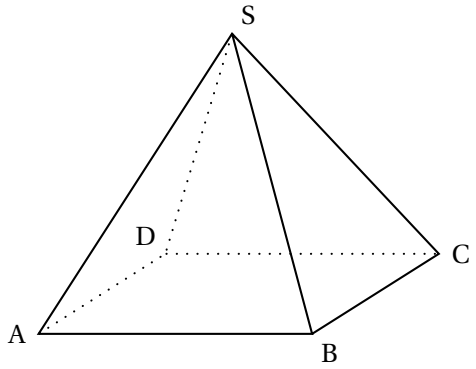
2. λ et μ étant ainsi choisis, démontrer que les suites (u_n) et (v_n) ont une limite commune.

EXERCICE 106 **20 minutes**

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.
Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- en A ?
- en B ?
- en C ?
- en D ?



b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :
S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet évènement.
Donner p_1.
En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n)$.

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout entier $n > 0$ par : $\begin{cases} p_1 &= \frac{1}{3} \\ p_{n+1} &= \frac{1}{3}(1-p_n) \end{cases}$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a

$$p_n = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 107 **20 minutes**

1. a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+2^{-n})}{2n} = 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2^n x}{1+2^n x}\mathrm{d}x$.

a. Calculer u_0.
☞ On pourra remarquer que $x = 1+x-1$.

b. Calculer u_n pour tout $n \geqslant 1$.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1.4 Comportement global d'une suite

1.4.1 Point de cours

Monotonie : soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :
• la suite (u_n) est **croissante** lorsque pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
• la suite (u_n) est **décroissante** lorsque pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
• la suite (u_n) est **monotone** lorsque la suite est **croissante** ou **décroissante**.

Suites majorées - suites minorées : soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :
• la suite (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$. Un tel nombre M est appelé un **majorant** de la suite (u_n) ;
• la suite (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$. Un tel nombre m est appelé un **minorant** de la suite (u_n) ;
• si la suite (u_n) est à la fois majorée et minorée, elle est dite **bornée**.

Théorème 1

1. Toute suite croissante majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante minorée est convergente.

Théorème 2

1. Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
2. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Théorème 3

1. Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite ℓ, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
2. Si une suite (u_n) est décroissante et admet pour limite ℓ, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.

1.4.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 108 **5 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Prouver par un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et que la suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 109 **10 minutes**

Etudier, dans chaque cas, le sens de variation de la suite (u_n).

1. $u_n = \sqrt{3n+1}$.

2. $u_n = \dfrac{2n}{3^n}$

3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

4. $u_n = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{4} \times \dfrac{7}{6} \times \cdots \times \dfrac{2n+1}{2n}$.

5. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$.

6. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n$.

EXERCICE 110 **10 minutes**

Démontrer, dans chaque cas, que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est bornée.

1. $u_n = \dfrac{3n^3}{n^3+1}$.

2. $u_n = 2\cos n + (-1)^n$.

3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. $u_n = 3 - \dfrac{1}{n+1}$.

5. $u_n = 2 - \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

6. $u_n = \dfrac{2\cos n + 3}{5 - 2\sin n}$.

EXERCICE 111 **10 minutes**

La suite (u_n) est bornée par -1 et 2, et la suite (v_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n + 2}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

2. Démontrer que, si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est aussi décroissante.

3. La suite (v_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 112 **15 minutes**

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 5}{3}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

2. Soit (S_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

   a. Montrer que (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 113 **15 minutes**

Soit la suite (u_n) définies par $u_0 \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$.

1. Déterminer le réel a non nul de telle sorte que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n + a}{u_n}$, soit géométrique.
   Déterminer la raison de cette suite.

2. Discuter suivant les valeurs de v_0 la limite de la suite (v_n) et son sens de variation.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) pour $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 114 **15 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $5u_{n+1} = u_n + 8$.
On pose $v_n = u_n - 2$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

2. En déduire l'expression explicite de u_n.

3. Etudier les variations et la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 115 **15 minutes**

1. La suite (u_n) est croissante et non majorée.

a. Soit A un nombre réel donné, justifier qu'il existe un terme u_N de la suite (u_n) qui vérifie $u_N > A$.

b. En déduire que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = v_n^2 - 3v_n + 4$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

b. Démontrer que si la suite (v_n) converge vers le réel ℓ, alors $\ell = 2$.

c. La suite (v_n) peut-elle être majorée ?

d. En déduire la limite de la suite (v_n).

EXERCICE 116 **10 minutes**

Deux suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

1. Les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ sont toutes les deux croissantes.

2. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.

3. Les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ ne sont pas majorées.

EXERCICE 117 **15 minutes**

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

EXERCICE 118 **10 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.
5. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 119 **10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Etablir alors que (u_n) est une suite convergente.

EXERCICE 120 **15 minutes**

On définit :

— la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$,

— la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
b. Calculer S_n en fonction de n.
c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 121 **10 minutes**

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

EXERCICE 122 **10 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \text{ pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante.

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE 123 **15 minutes**

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée.

2. La suite (u_n) converge.

3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.

4. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

EXERCICE 124 **15 minutes**

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. a. Montrer que (u_n) est minorée par 0 et majorée par 4.

b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

b. Retrouver le résultat du **1. c**.

EXERCICE 125 **10 minutes**

Les propositions suivantes sont **fausses**, le justifier par un contre-exemple.

1. Si une suite n'est pas convergente alors elle n'est pas bornée.

2. Toute suite décroissante à termes strictement positifs converge vers 0.

3. Toute suite convergente est monotone.

4. Toute suite bornée est convergente.

5. Si une suite est croissante et majorée par M alors elle converge vers M.

EXERCICE 126 **10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 4$.

2. Montrer que la suite est décroissante.

3. En déduire que la suite est convergente, puis déterminer sa limite.

EXERCICE 127 **15 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 4 \leqslant \dfrac{1}{4}(u_n - 4)$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - 4 \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

3. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

1.4.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 128 **15 minutes**

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 6$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.

a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$.

b. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

EXERCICE 129 **15 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_1 = v_1 = 1$ et $\forall n > 1,\ u_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = 1 + \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n > 1$, $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n}$.

2. En déduire que, pour tout $n > 1$, $v_n = 2 - \dfrac{1}{n}$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Démontrer que pour tout $n > 1$, $u_n \leqslant v_n$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 130 **15 minutes**

Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n^2 < 3$.

3. Démontrer que la suite (x_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 131 **15 minutes**

Soit la suite (q_n) d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2.

On construit la suite (u_n) : $u_0 = \dfrac{1}{q_0}$, $u_1 = \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{q_0 q_1}$, $\cdots$, $u_n = \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par une suite convergente (ne dépendant par exemple que de q_0).

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

EXERCICE 132 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Démontrer que la suite $u_n > 0$.

2. Démontrer que $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{u_n}$. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ u_n>\sqrt{2}$.

3. Démontrer que $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{2}\right)+\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. En déduire que, $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ u_n-\sqrt{2}<\dfrac{1}{2^n}$ (on pourra faire une démonstration par récurrence).

5. La suite (u_n) admet-elle une limite quand n tend vers $+\infty$? Si oui, déterminer cette limite.

EXERCICE 133 **20 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{3u_n+1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 &= 2 \\ v_{n+1} &= \dfrac{3v_n+1}{4} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.

2. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n=u_n+v_n$

a. Calculer s_0, s_1, s_2, s_3. A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n)?

b. En raisonnant par récurrence, montrer que la suite (s_n) est une suite constante.

3. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n=v_n-u_n$.

a. Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique.

b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

4. En utilisant les résultats des questions 2. b. et 3. b., donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

5. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent. Préciser leurs limites.

EXERCICE 134 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n^2+u_n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Démontrer que si (u_n) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

3. Démontrer que si $u_0+u_0^2>0$ alors la suite (u_n) diverge.

4. Etudier la suite (u_n) lorsque $u_0+u_0^2=0$.

5. Démontrer par récurrence que : si $u_0+u_0^2<0$ alors $\forall n\in\mathbb{N},\ -1<u_n<0$.

6. Conclure sur la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 135 **20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_1=\dfrac{1}{2}$ et $\forall n\geqslant 1,\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{4}{u_n}\right)$.

1. Démontrer que tous les termes de la suite sont bien définis et strictement positifs.

2. On pose, pour tout $n\geqslant 1$, $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$.